Fonctions : trois langages - lectures graphiques

situation : f est une fonction définie sur D_f et représentée par une courbe C_f dans un repère d'origine O .

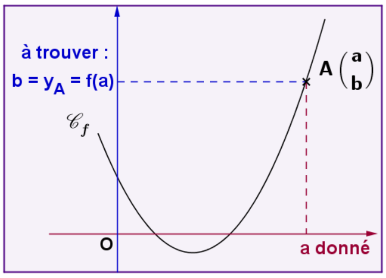
Un point M quelconque de C_f a pour coordonnées $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ avec $x \in D_f$. Le tableau est construit de la façon suivante :

colonne de gauche (trois langages)	colonne de droite (comment utiliser le graphique)
? : **ce qui est demandé en langage des fonctions** ***A*** : autrement dit : avec le **langage de l'Algèbre** ***G*** : autrement dit : avec le **langage de la géométrie**	ce qu'il faut ajouter à la figure , ce qu'il faut observer , ce qu'il faut lire sur le graphique pour répondre à la question posée

---

?	trouver l'**image d'un réel a de D_f**
A	trouver la valeur de f(a)
G	trouver l'ordonnée du point de C_f qui a pour abscisse a

rédiger : l'image f(a) d'un réel a de D_f est l'ordonnée y_A du point A de C_f d'abscisse a



→ placer sur C_f le point A d'abscisse a

→ lire son ordonnée y_A

y_A est l'image f(a) demandée

?	le réel **b est-il l'image du réel a** ?
A	a-t-on l'égalité : $f(a) = b$?
G	le point de C_f qui a pour abscisse a a-t-il b comme ordonnée ? ou bien C_f contient-elle le point $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

rédiger : b est l'image f(a) du réel a ssi la courbe C_f contient le point $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

→ placer le point $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

→ si M est situé sur C_f son ordonnée b vérifie $b = f(a)$ donc b est l'image de a par f

→ si $M \notin C_f$ alors $b \neq f(a)$

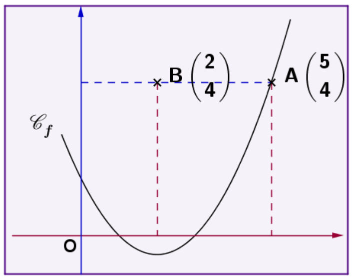


figure : pour les deux points $A\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ on a :

$A \in C_f$ donc $f(x_A) = y_A$ soit : $f(5) = 4$ et 4 est l'image de 5 par f

$B \notin C_f$ donc $f(x_B) \neq y_B$ et 4 n'est pas l'image de 2 par f

---

?	**le réel α admet-il une image par f ?** ou bien : α est il élément de D_f ?
A	$f(\alpha)$ existe-t-il ?
G	la courbe C_f possède-t-elle un point d'abscisse α ?

rédiger : l'image $f(\alpha)$ est , quand elle existe , l'ordonnée du point d'intersection de la courbe C_f et de la droite D : $x = \alpha$

→ tracer la droite D : $x = \alpha$.

D // (Oy) , D contient tous les points ayant α pour abscisse .

→ observer l'intersection de C_f avec la droite D

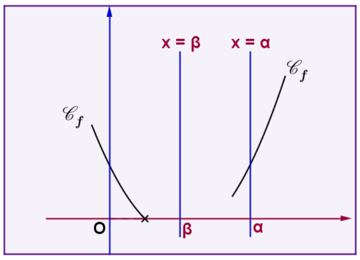
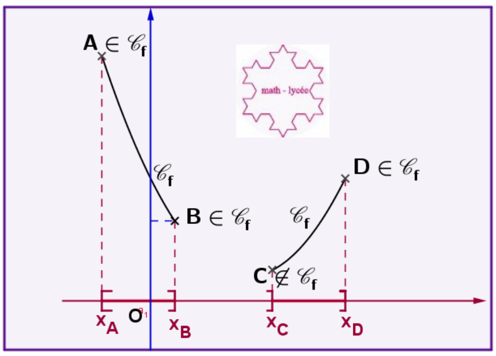


figure : D : $x = \alpha$ coupe C_f en un point donc $\alpha \in D_f$.

D' : $x = \beta$ ne coupe pas C_f donc $\beta \notin D_f$

?	donner l'**ensemble de définition de f**
A	pour quelles valeurs de x peut-on calculer f(x) ?
G	déterminer l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe C_f

rédiger : L'ensemble de définition de f est l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe C_f . Graphiquement on obtient :



→ sur (Ox) lire de gauche à droite l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour les abscisses x des points situés sur la courbe C_f

figure : $D_f = [x_A, x_B] \cup]x_C, x_D]$ (courbe en deux morceaux)

?	déterminer les **éventuels antécédents du réel 0** pour f
A	**résoudre graphiquement** $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$
G	déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe (Ox) : $y = 0$

rédiger : Les antécédents de 0 pour f (ou les solutions de : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$) sont , quand ils (ou quand elles) existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe (Ox) d'équation : $y = 0$

→ observer l'intersection de la courbe C_f avec l'axe (Ox)
→ lire les abscisses des éventuels points de C_f situés sur (Ox)

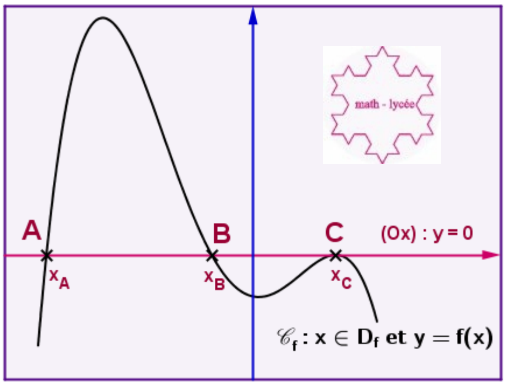
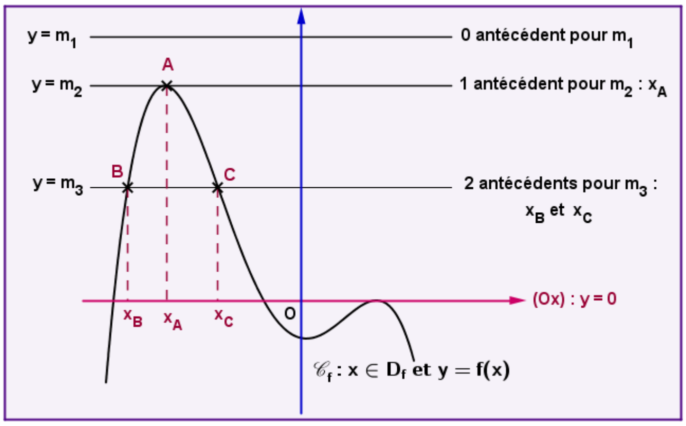


figure : la courbe C_f coupe (Ox) en trois points A , B , C d'abscisses respectivement égales à : x_A , x_B , x_C ; le réel 0 possède donc trois antécédents pour f : x_A , x_B et x_C

?	déterminer les **éventuels antécédents du réel m** pour f
A	**résoudre graphiquement l'équation** $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = m$
G	déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de la courbe C_f avec la droite $\Delta : y = m$ ($\Delta // (Ox)$)

rédiger : Les antécédents de m pour f (ou les solutions de : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = m$) sont , quand ils (ou quand elles) existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite Δ : $y = m$ ($\Delta // (Ox)$)

→ tracer la droite $\Delta : y = m$; $\Delta // (Ox)$ et Δ indique le niveau d'ordonnée m puis observer l'intersection de la courbe C_f avec Δ

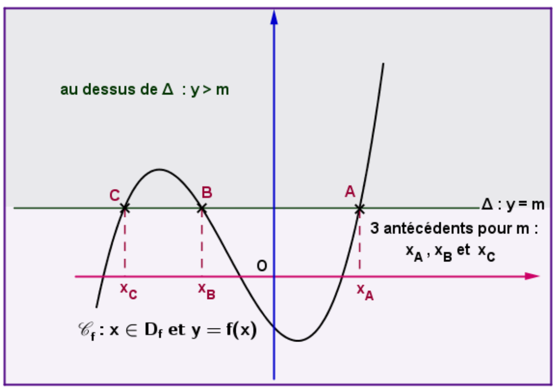


→ lire les abscisses des éventuels points de C_f situés sur Δ dont le niveau d'ordonnée f(x) est égal à m : ce sont les antécédents demandés .

?	déterminer les réels qui ont une image par f strictement supérieure à m
A	**résoudre graphiquement l'inéquation :** $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > m$
G	déterminer les abscisses des éventuels points de C_f qui sont situés au dessus de la droite $\Delta : y = m$

rédiger : Les solutions de l'inéquation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > m$ sont , quand elles existent , les abscisses des points de C_f situés au dessus de la droite Δ : $y = m$
Graphiquement on obtient comme ensemble solution : S =

→ tracer la droite $\Delta : y = m$ et colorier le demi-plan situé au dessus de Δ ; ce demi-plan contient tous les points qui ont un niveau d'ordonnée y vérifiant : $y > m$
→ observer les parties de la courbe C_f contenues dans ce demi- plan et donc situées au dessus de Δ



→ lire , pour chacune de ces parties , l'ensemble des valeurs des abscisses de leurs points dont le niveau d'ordonnée f(x) vérifie : f(x) > m ; **figure :** $S =]x_C, x_B[\cup]x_A, +\infty[$

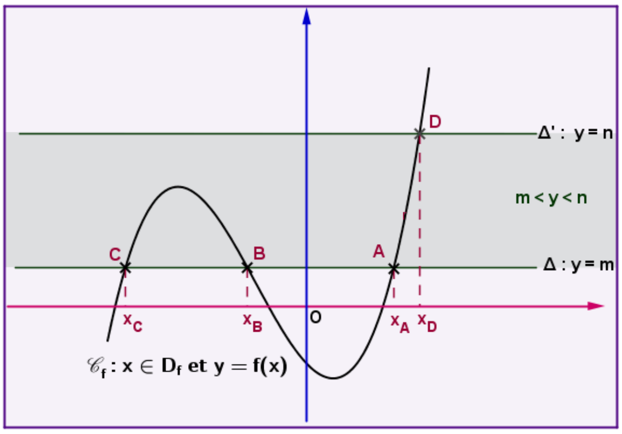
?	déterminer les réels qui ont une image par f comprise entre m et n
A	**résoudre graphiquement** $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq n$
G	déterminer les abscisses des éventuels points de C_f situés sur la droite $\Delta : y = m$ ou sur la droite : $\Delta' : y = n$ ou au dessus de Δ et en dessous de Δ'

rédiger : Les réels x vérifiant : $m \leq f(x) \leq n$ sont , quand ils existent , les abscisses des points de C_f situés sur $\Delta : y = m$ ou sur $\Delta' : y = n$ ou au dessus de Δ tout en étant situés en dessous de Δ' .

figure : L'ensemble S des réels x vérifiant l'encadrement : $m \leq f(x) \leq n$ est :
$S = [x_C, x_B] \cup [x_A, x_D]$

→ tracer les droites $\Delta : y = m$ et $\Delta' : y = n$ et (facultatif) colorier la région du plan contenant les points qui sont situés au dessus de Δ et en dessous de Δ' ; cette région avec ses deux frontières Δ et Δ' contient tous les points qui ont un niveau d'ordonnée y vérifiant : $m \leq y \leq n$

→ observer les parties de C_f contenues dans cette région



→ lire , pour chacune de ces parties , l'ensemble des valeurs des abscisses de leurs points dont le niveau d'ordonnée f(x) vérifie : $m \leq f(x) \leq n$

?	étudier , selon les valeurs de x , le signe de l'image de x par f
A	**étudier graphiquement le signe de f(x)**
G	déterminer les abscisses des éventuels points de C_f situés : soit sur (Ox) : $y = 0$, soit au dessus de (Ox) , soit en dessous de (Ox)

rédiger : étudier graphiquement le signe de f(x) revient à examiner la position relative de la courbe C_f par rapport à l'axe (Ox) : $y = 0$.

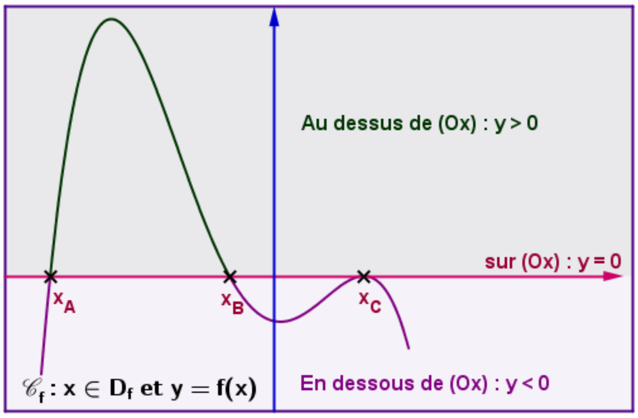
figure :

- La courbe C_f coupe l'axe (Ox) : $y = 0$ en trois points A , B , C d'abscisses respectives : x_A, x_B, x_C .

Donc : $f(x_A) = 0$, $f(x_B) = 0$, $f(x_C) = 0$

- D'où le tableau ci-dessous :

→ compléter la figure en indiquant clairement les équations de (Ox) et des deux demi-plans situés au dessus et en dessous de (Ox) puis en écrivant les abscisses des points communs à C_f et à (Ox)



→ dresser le tableau donnant le signe du niveau d'ordonnée f(x) sur la courbe C_f en lisant sur (Ox) les abscisses x des trois catégories suivantes de points appartenant à C_f :

· les points situés sur (Ox) pour lesquels : $f(x) = 0$

· les points situés au dessus de (Ox) pour lesquels : $f(x) > 0$

· les points situés en dessous de (Ox) pour lesquels : $f(x) < 0$

x	$-\infty$	x_A		x_B		x_C		$+\infty$
signe de f(x)	−	0	+	0	−	0	−	
position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (Ox)	en dessous de (Ox)		au dessus de (ox)		en dessous de (Ox)		en dessous de (Ox)	