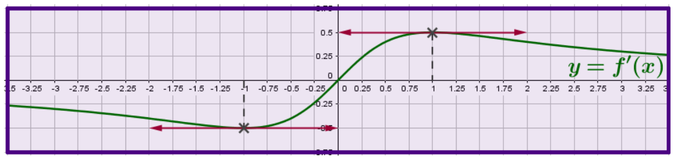
Dérivées - DS 4h - corrigé

exercice 1 Cet exercice utilise un questionnaire à choix multiples (QCM) .

Q1 La figure donne la représentation graphique $C_{f\,'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



1 - Vrai La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2 - Faux La courbe C_f admet en ses points d'abscisse 1 et -1 des droites tangentes parallèles

3 - Faux La courbe C_f admet au moins une droite tangente parallèle à la droite D : $y = 2x$

4 - Vrai La courbe C_f admet en son point d'abscisse 0 une droite tangente parallèle à l'axe (Ox)

des éléments de réponse

1 $C_{f\,'}$ contient l'origine du repère et ses points ayant une abscisse strictement positive sont situés au dessus de (Ox) .

Ayant $f\,'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, $f\,'(x) > 0$, on déduit : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2 D'après le graphique $f\,'(-1) = -0.5$ et $f\,'(1) = 0.5$. Par conséquent , en chacun de ses points d'abscisse -1 et 1 , C_f admet une droite tangente dont les coefficients directeurs respectifs $f\,'(-1)$ et $f\,'(1)$ sont distincts . Ces deux droites tangentes ne peuvent donc pas être des droites parallèles .

3 Graphiquement on observe : les ordonnées $f\,'(x)$ des points d'abscisse x situés sur la courbe représentant $f\,'$ sont comprises entre -0.5 et 0.5 et sont donc différentes de 2 . D'autre part : la droite D : $y = 2x$ a pour coefficient directeur 2 et toute droite tangente à C_f en son point d'abscisse x_0 a pour coefficient directeur $f\,'(x_0)$. Avec $f\,'(x_0)$ distinct de 2 , on déduit : il n'existe pas de droite tangente à C_f parallèle à la droite D : $y = 2x$.

4 $C_{f\,'}$ contient l'origine du repère donc : $f\,'(0) = 0$. Par conséquent , C_f admet en son point d'abscisse 0 une droite tangente dont le coefficient directeur $f\,'(0)$ est nul . Cette droite tangente est donc bien parallèle à l'axe (Ox) .

Q2 avec $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{1-4x}{x^2-2x+2}$ 1- Faux g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{(x+1)\,(2x-3)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$

2 - Vrai La courbe C_g admet deux droites tangentes parallèles à l'axe (Ox)

3 - Vrai La courbe C_g admet une droite asymptote parallèle à l'axe (Ox)

4 - Faux La courbe C_g admet une droite asymptote parallèle à l'axe (Oy)

des éléments de réponse

1 Comme fonction rationnelle , g est dérivable sur D_g . Pour tout réel x , $x \notin D_g \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$x \notin D_g \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -1$.

L'égalité $(x-1)^2 = -1$ est fausse pour tout réel x car : $\Big(\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0\Big)$ et $(-1 < 0)$.

Donc $x \notin D_g$ est faux pour tout réel x et $D_g = \mathbb{R}$. Ainsi : g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

calcul de $g'(x)$ avec x réel quelconque : $g = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 - 4x \text{ et } u'(x) = -4 \\ v(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ et } v'(x) = 2x - 2 \end{cases}$ et $g\,' = (\dfrac{\mathbf{u}}{v})' = \dfrac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$.

Donc : $g\,'(x) = \dfrac{(-4)(x^2-2x+2) - (2x-2)(1-4x)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{\left(-4x^2+8x-8\right) - \left(2x-8x^2-2+8x\right)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{4x^2-2x-6}{(x^2-2x+2)^2}$

-1 est une racine de $4x^2 - 2x - 6$ et $4x^2 - 2x - 6$ est factorisable par $x + 1$. D'où : $4x^2 - 2x - 6 = (x+1)(4x-6)$

Donc : $g\,'(x) = \dfrac{(x+1)(4x-6)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{(x+1)\times 2(2x-3)}{(x^2-2x+2)^2}$ et : $\boxed{g\,'(x) = \dfrac{2(x+1)(2x-3)}{(x^2-2x+2)^2}}$

2 C_g admet une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) en tout point A d'abscisse a vérifiant : $g\,'(a) = 0$.

En utilisant l'expression trouvée précédemment pour $g\,'(x)$ on obtient :

$g\,'(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(a+1)(2a-3)}{(a^2-2a+2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2(a+1)(2a-3) = 0 \Leftrightarrow a+1 = 0$ ou $2a-3 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ ou $a = \dfrac{3}{2}$.

C_g admet donc deux droites tangentes parallèles à l'axe (Ox) : en chacun de ses points d'abscisse -1 et $\dfrac{3}{2}$.

3 Une droite parallèle à l'axe (Ox) a une équation réduite du type : $y = k$. Une telle droite est asymptote à la courbe C_g si et seulement si g admet en $-\infty$ ou en $+\infty$ une limite finie égale à k (ou non exclusif) . g étant une fonction rationnelle , aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, $g(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré qui est : $\dfrac{-4x}{x^2}$ soit : $-4 \times \dfrac{1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 4 \times \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 \times \dfrac{1}{x} = 0$ soit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Ces deux limites étant égales au réel 0 , l'axe (Ox) : $y = 0$ est asymptote à la courbe C_g aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

4 Une droite parallèle à l'axe (Ox) a une équation réduite du type : $x = x_0$. Une telle droite est asymptote à la courbe C_g si et seulement si l'une au moins des deux limites de g en x_{0^-} et en x_{0^+} est infinie .

g étant une fonction rationnelle , cette situation nécessite d'avoir g non définie en x_0 . Ayant : $D_g = \mathbb{R}$, un tel réel x_0 n'existe pas et C_g ne peut pas admettre de droite asymptote parallèle à (Ox) .

Q3 avec la fonction $h : x \longmapsto h(x) = (x^5 + 2x^3)\tan x$ 1 - Faux h est une fonction impaire

2 - Vrai h admet une limite en 0 égale à 0 3 - Faux h est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) = \dfrac{5x^4+6x^2}{\cos^2 x}$

4 - Vrai La courbe C_h admet en son point d'abscisse 0 une droite tangente parallèle à l'axe (Ox)

des éléments de réponse

1 h est le produit de deux fonctions impaires $x \mapsto x^5 + 2x^3$ et $x \mapsto \tan x$. h est donc une fonction paire (propriété) .

Autre justification : donner un exemple de deux réels opposés dont les images par h ne sont pas opposées .

En prenant $x = \dfrac{\pi}{4}$ on a : $h(\dfrac{\pi}{4}) = \left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^5 + 2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^5 + 2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3$ car : $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

D'autre part : $h(-\dfrac{\pi}{4}) = \left(\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^5 + 2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(-\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^5 - 2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3\right) \times (-1)$ car : $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

Donc : $h(-\dfrac{\pi}{4}) = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^5 + 2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^3 = h(\dfrac{\pi}{4})$. $h(-\dfrac{\pi}{4}) \neq -h(\dfrac{\pi}{4})$ donc h n'est pas impaire .

2 $\lim\limits_{x\to0} x^5 + 2x^3 = 0^5 + 2(0^3) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \tan x = \tan 0 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0} h(x) = \lim\limits_{x\to0} (x^5 + 2x^3)\tan x = 0 \times 0 = 0$

3 $x \mapsto x^5 + 2x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est dérivable en tout réel x vérifiant $\cos x \neq 0$ soit en tout réel x disctinct de $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et de $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) . h est donc bien dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme produit de fonctions dérivables sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

calcul de $h'(x)$ avec $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $h = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x^5 + 2x^3 \text{ et } u'(x) = 5x^4 + 6x^2 \\ v(x) = \tan x \text{ et } v'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$ et $h\,' = (uv)' = u'v + v'u$

Donc : $h'(x) = \left(5x^4 + 6x^2\right)\tan x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\left(x^5 + 2x^3\right)$

$h'(x) \neq \dfrac{5x^4 + 6x^2}{\cos^2 x}$. En effet ces deux expressions ne prennent pas la même valeur lorsque x vaut π .

Pour $x = \pi$ on a : $\tan\pi = 0$ et $\cos\pi = -1$. Donc :

$x = \pi$ entraîne : $\dfrac{5x^4 + 6x^2}{\cos^2 x} = \dfrac{5(\pi)^4 + 6(\pi)^2}{\cos^2\pi} = \dfrac{5(\pi)^4 + 6(\pi)^2}{(-1)^2} = 5(\pi)^4 + 6(\pi)^2 = \pi^2(5\pi^2 + 6)$ et $\pi^2(5\pi^2 + 6) \simeq 546,26$

$h'(\pi) = \left(5(\pi)^4 + 6(\pi)^2\right)\tan(\pi) + \dfrac{1}{\cos^2(\pi)}\left((\pi)^5 + 2(\pi)^3\right) = \left(5(\pi)^4 + 6(\pi)^2\right)(0) + \dfrac{(\pi)^5 + 2(\pi)^3}{(-1)^2} = \pi^5 + 2\pi^3$ et $\pi^5 + 2\pi^3 \simeq 368,03$

remarque : l'expression proposée $\dfrac{5x^4 + 6x^2}{\cos^2 x}$ représente le produit des dérivées de u et de v . Or : $(uv)' \neq u' \times v'$

4 La courbe C_h admet en son point d'abscisse 0 une droite tangente de coefficient directeur $h'(0)$.

Une droite est parallèle à l'axe (Ox) si et seulement si son coefficient directeur vaut 0 .

$h'(x) = \left(5x^4 + 6x^2\right)\tan x + \dfrac{x^5 + 2x^3}{\cos^2 x}$ donc $h'(0) = \left(5(0)^4 + 6(0)^2\right)\tan(0) + \dfrac{(0)^5 + 2(0)^3}{\cos^2 x} = (0) \times 0 + \dfrac{0}{1^2} = 0$.

La courbe C_h admet donc en son point d'abscisse 0 une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) .

Q4 avec $F : x \longmapsto F(x) = 4x + 2 + \dfrac{3}{3x+1}$ 1 - Faux F est dérivable sur D_F et : $\forall x \in D_F$, $F'(x) = 4 + \dfrac{9}{(3x+1)^2}$

2 - Faux F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ 3 - Vrai La courbe C_F admet deux droites tangentes parallèles à l'axe (Ox)

4 - Vrai La courbe C_F n'admet pas de droite tangente parallèle à sa droite asymptote oblique

des éléments de réponse

1 Comme fonction rationnelle , F est dérivable sur D_F . $D_F = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$: $x \notin D_F \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

calcul de $F'(x)$ avec $x \in D_F$. On a : $F = u + 3\left(\dfrac{1}{v}\right)$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x + 2 \text{ et } u'(x) = 4 \\ v(x) = 3x + 1 \text{ et } v'(x) = 3 \end{cases}$. D'autre part :

$F' = \left(u + 3\left(\dfrac{1}{v}\right)\right)' = u' + 3\left(\dfrac{1}{v}\right)' = u' + 3\left(\dfrac{-v'}{v^2}\right) = u' - \dfrac{3v'}{v^2}$. Donc : $\boxed{F'(x) = 4 - \dfrac{9}{(3x+1)^2}}$

$F'(x) \neq 4 + \dfrac{9}{(3x+1)^2}$. En effet ces deux expressions ne prennent pas la même valeur lorsque x vaut 0 .

pour $x = 0$: $4 + \dfrac{9}{(3x+1)^2} = 4 + \dfrac{9}{(1)^2} = 13$; $F'(0) = 4 - \dfrac{9}{(1)^2} = -5$ et $13 \neq -5$

2 On peut par exemple comparer les images $F(0)$ et $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$ en sachant que $0 < \dfrac{1}{3}$

$F(0) = 4(0) + 2 + \dfrac{3}{3(0)+1} = 2 + 3 = 5$; $F\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2 + \dfrac{3}{3\left(\dfrac{1}{3}\right) + 1} = \dfrac{4}{3} + 2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{8 + 12 + 9}{6} = \dfrac{29}{6}$

$5 = \dfrac{30}{6}$ donc : $5 > \dfrac{29}{6}$ soit : $F(0) > F\left(\dfrac{1}{3}\right)$. On a donc : $0 < \dfrac{1}{3}$ avec $F(0) < F\left(\dfrac{1}{3}\right)$ faux . F n'est donc pas strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3 C_F admet une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) en tout point A d'abscisse a vérifiant : $F'(a) = 0$

Avec x élément de D_F on a : $F'(x) = 4 - \dfrac{9}{(3x+1)^2} = \dfrac{4\,(3x+1)^2 - 9}{(3x+1)^2} = \dfrac{[2\,(3x+1)]^2 - (3)^2}{(3x+1)^2}$.

D'où : $F'(x) = \dfrac{[2\,(3x+1) - 3]\,[2\,(3x+1) + 3]}{(3x+1)^2} = \dfrac{[6x-1]\,[6x+5]}{(3x+1)^2}$.

Donc : $F'(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{[6a-1]\,[6a+5]}{(3a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow [6a-1]\,[6a+5] = 0 \Leftrightarrow 6a - 1 = 0$ ou $6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{6}$ ou $a = -\dfrac{5}{6}$.

Ainsi : C_F admet deux droites parallèles à l'axe (Ox) : en chacun de ses points d'abscisse $\dfrac{1}{6}$ et $-\dfrac{5}{6}$.

4 $F(x)$ est de la forme $4x + 2 + R(x)$ avec $R(x) = \dfrac{3}{3x+1} = 3 \times \dfrac{1}{3x+1}$.

$3 > 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 1 = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3x+1} = 0$.

Puis : $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 \times \dfrac{1}{3x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 \times \dfrac{1}{3x+1} = 0$ soit : $\lim\limits_{x \to -\infty} R(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

Ayant $F(x) = 4x + 2 + R(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} R(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = 0$, on déduit :

la droite $\Delta : y = 4x + 2$, de coefficient directeur 4 , est une droite asymptote oblique à la courbe C_F .

D'autre part : $\rightarrow$ en tout point A d'abscisse a ($a \in D_F$) C_F admet une droite tangente T de coefficient directeur $F'(a)$.

$\rightarrow$ Deux droites non parallèles à l'axe (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur .

Par conséquent : $\Delta \,//\, T \Leftrightarrow F'(a) = 4 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{9}{(3a+1)^2} = 4 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{(3a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -9 = 0 \times (3a+1)^2 \Leftrightarrow -9 = 0$.

$-9 = 0$ est faux et $-9 = 0 \Leftrightarrow \Delta \,//\, T$. Donc $\Delta \,//\, T$ est faux et C_F n'admet pas de droite tangente parallèle à $\Delta : y = 4x + 2$.

Q5 avec la fonction $G : x \longmapsto G(x) = x\,|x|$ 1 - Faux G est paire 2 - Vrai G est dérivable en 0

3 - Vrai G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2\,|x|$

4 - Faux G a une fonction dérivée elle même dérivable en 0

des éléments de réponse

1 Pour justifier que G n'est pas paire , il suffit de trouver deux réels opposés qui n'ont pas la même image par G .

$G(-1) = (-1)\,|-1| = -1 \times 1 = -1$; $G(1) = (1)\,|1| = 1$; $G(-1) \neq G(1)$ donc G n'est pas paire .

2 G dérivable en 0 signifie : le quotient $\dfrac{G(0+h) - G(0)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0 . D'autre part :
$\dfrac{G(0+h) - G(0)}{h} = \dfrac{G(h) - G(0)}{h} = \dfrac{h\,|h| - 0\,|0|}{h} = \dfrac{h\,|h|}{h} = |h|$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \dfrac{G(0+h) - G(0)}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = |0| = 0$.

Par conséquent : G est dérivable en 0 et $G'(0) = 0$

3 Avec $x > 0$ on a $|x| = x$ et $G(x) = x\,|x|$ devient $G(x) = x^2$. D'où : $G'(x) = 2x$ et $G'(x) = 2\,|x|$ vrai pour $x > 0$

Avec $x < 0$ on a $|x| = -x$ et $G(x) = x\,|x|$ devient $G(x) = -x^2$. D'où : $G'(x) = -2x = 2(-x)$ et $G'(x) = 2\,|x|$ vrai pour $x < 0$

Avec $x = 0$, $G'(x) = 2\,|x|$ devient $G'(0) = 2\,|0| = 0$ et $G'(0) = 0$ justifié précédemment .

En résumé : l'égalité $G'(x) = 2\,|x|$ est vrai pour tout réel x .

4 L'application valeur absolue : $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 (un résultat à connaître)

conséquence : la fonction G' : $x \longmapsto G(x) = 2\,|x|$ n'est pas dérivable en 0 .

Q6 avec la fonction $H : x \longmapsto H(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 - 5x - 3}$

1 - Faux H est dérivable sur D_H et vérifie : $\forall x \in D_H$, $H'(x) = \dfrac{5x^2 + 6x}{\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2}$

2 - Faux H est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ 3 - Vrai H vérifie $\displaystyle\lim_{h \to 0} \dfrac{H(-1+h) - H(-1)}{h} = \dfrac{1}{16}$

4 - Vrai La courbe C_H admet trois droites asymptotes

des éléments de réponse

1 Comme fonction rationnelle , H est dérivable sur D_H .

D'autre part : $H = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \text{ et } u'(x) = 2x \\ v(x) = 2x^2 - 5x - 3 \text{ et } v'(x) = 4x - 5 \end{cases}$ et $H\,' = (\dfrac{\mathbf{u}}{v})' = \dfrac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$H'(x) = \frac{2x(2x^2 - 5x - 3) - x^2(4x - 5)}{\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2} = \frac{4x^3 - 10x^2 - 6x - 4x^3 + 5x^2}{\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2} = \frac{-5x^2 - 6x}{\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2} \text{ soit } \boxed{H'(x) = \frac{-x(5x + 6)}{\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2}}$$

2 Avec x élément de D_H , on a : $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$ et $\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2 > 0$. Par conséquent le signe de $H'(x)$ est le même que celui de son numérateur $N(x)$ égal à : $-x(5x + 6)$. En se plaçant sur $\mathbb{R}^+$, on a : $x \geq 0$.

D'où : $\rightarrow -x \leq 0$ car $-1 < 0$ et $x \geq 0$ $\rightarrow 5x + 6 > 0$ car $5 > 0$, $x \geq 0$ entraîne $5x \geq 0$ puis $5x + 6 \geq 6$ et $6 > 0$.

On déduit alors pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $-x(5x + 6) \leq 0$ et $H'(x) \leq 0$. La fonction H est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

3 -1 est élément de D_H . En effet : pour $x = -1$ on a : $2x^2 - 5x - 3 = 2\,(-1)^2 - 5\,(-1) - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$ et $4 \neq 0$.
H est donc dérivable en -1 et $H'(-1) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \dfrac{H(-1+h) - H(-1)}{h}$. D'autre part : $H'(x) = \dfrac{-x(5x + 6)}{\left(2x^2 - 5x - 3\right)^2}$.
D'où : $H'(-1) = \dfrac{-(-1)(5(-1) + 6)}{\left(2(-1)^2 - 5(-1) - 3\right)^2} = \dfrac{1 \times 1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \dfrac{H(-1+h) - H(-1)}{h} = \dfrac{1}{16}$ est vrai .

4 $D_H = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{1}{2}, 3 \right\}$. En effet : pour tout réel x , $x \notin D_H \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$

3 est une racine de $2x^2 - 5x - 3$ car $2(3)^2 - 5(3) - 3 = 18 - 15 - 3 = 0$. Donc $2x^2 - 5x - 3$ est factorisable par $(x - 3)$ et pour tout réel x , $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)\,(2x + 1)$. D'où : $x \notin D_H \Leftrightarrow (x - 3)\,(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

droites asymptotes à C_H $\quad H(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x)=x^2$ et $D(x)=2x^2-5x-3$ et $D_H=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},3\right\}$.

situation $x\to-\dfrac{1}{2}$

$N(x)=x^2$	$N(x)\underset{x\to-\frac{1}{2}}{\longrightarrow}N\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ réel non nul
$D(x)=2x^2-5x-3$	$D(x)\underset{x\to-\frac{1}{2}}{\longrightarrow}0$

Donc $\lim\limits_{-\frac{1}{2}^-}f$ et $\lim\limits_{-\frac{1}{2}^+}f$ infinies et D_1 : $x=-\dfrac{1}{2}$ est une première droite asymptote à la courbe C_H .

situation $x\to3$

$N(x)=x^2$	$N(x)\underset{x\to3}{\longrightarrow}N(3)=9$ réel non nul
$D(x)=2x^2-5x-3$	$D(x)\underset{x\to3}{\longrightarrow}0$

Donc $\lim\limits_{3^-}f$ et $\lim\limits_{3^+}f$ infinies et D_2 : $x=3$ est une deuxième droite asymptote à la courbe C_H .

Aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{x^2}{2x^2}$ soit à $\dfrac{1}{2}$

Donc : $\lim\limits_{-\infty}f=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{+\infty}f=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Ces deux limites étant égales au réel $\dfrac{1}{2}$, la droite D_3 : $y=\dfrac{1}{2}$ est une troisième droite asymptote à la courbe C_H .

exercice 2

fonction f : $x\longmapsto f(x)$ avec $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$, un point fixe $A\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

1) $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{1\}}$. En effet : pour tout réel x , $x\notin D_f\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

limites de f aux bornes de D_f

avec x élément de D_f , $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}$ et $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[$

$\boxed{\lim\limits_{-\infty}f=-\infty\ ;\ \lim\limits_{+\infty}f=+\infty}$

$\to$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}=\frac{x^3\left[1-\dfrac{2x^2}{x^3}\right]}{x^2\left[1-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right]}=\frac{x^3}{x^2}\times\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=x\times\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$\to$ déduction de $\lim\limits_{-\infty}f$ et $\lim\limits_{+\infty}f$ $\qquad$ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. Donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1-2(0))}{1-2(0)+(0)}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1-2(0))}{1-2(0)+(0)}=1$. D'autre part : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $1>0$) :

$\lim\limits_{x\to-\infty}x\times\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$ soit : $\lim\limits_{-\infty}f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$.

$\lim\limits_{1^-}f=-\infty$ $\lim\limits_{1^+}f=-\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite D : $x=1$ est une droite asymptote à C_f .

situation $x\to1$

$N(x)=x^3-2x^2$	$N(x)\underset{x\to1}{\longrightarrow}-1$ (réel non nul)
$D(x)=(x-1)^2$	$D(x)\underset{x\to1}{\longrightarrow}0$

Pour la suite j'utilise : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\left(x^3-2x^2\right)\times\dfrac{1}{(x-1)^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to1}x^3-2x^2=(1)^3-2(1)^2=1-2=-1$

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $x\neq1$ entraîne $(x-1)^2>0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-1<0$) :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^3-3x^2+4x\right)\times\dfrac{1}{(x-1)^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x^3-3x^2+4x\right)\times\dfrac{1}{(x-1)^2}=-\infty$ soit : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$.

2) les réels a , b et c tels que $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

x est un réel de D_f . On note $E(x) = ax + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$. On a : $E(x) = \dfrac{ax(x-1)^2}{(x-1)^2} + \dfrac{b(x-1)}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$E(x) = \frac{ax\left(x^2-2x+1\right)+b(x-1)+c}{(x-1)^2} = \frac{ax^3-2ax^2+ax+bx-b+c}{(x-1)^2} = \frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2} .$$

Par conséquent : $f(x) = E(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c}{(x-1)^2}$

Puis : $f(x) = E(x) \Leftrightarrow x^3-2x^2 = ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c \quad ((x-1)^2 \neq 0$ pour $x \in D_f$)

Deux polynômes de degré trois sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients . Donc :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^3-2x^2 = ax^3-2ax^2+(a+b)x-b+c\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ -2a=-2 \\ a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \\ b=-a \\ c=b \end{cases} \Leftrightarrow a=1, b=-1, c=-1$$

On obtient donc ainsi : $\boxed{\forall x \in D_f \ , \ f(x) = x - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}}$

Pour justifier que la courbe C_f possède la droite $\Delta : y = x$ comme droite asymptote il suffit de prouver : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0 \end{cases}$

Avec $\forall x \in D_f$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$ on obtient : $\forall x \in D_f$, $f(x) - x = -\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$

Puis : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = -(0)-(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = -(0)-(0) = 0$ soit : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0 \end{cases}$.

La droite $\Delta : y = x$ répond bien à la définition d'une droite asymptote à la courbe C_f .

3) 3-1 ensemble D' de dérivabilité de f Comme fonction rationnelle , f est dérivable en tout réel de D_f. . Donc $D' = D_f$.

calcul de $f'(x)$ pour x élément de D_f

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3-2x^2 \text{ et } u'(x) = 3x^2-4x \\ v(x) = (x-1)^2 = x^2-2x+1 \text{ et } v'(x) = 2x-2 = 2(x-1) \end{cases}$ et $f' = (\dfrac{\mathbf{u}}{v})' = \dfrac{\mathbf{u}'v-uv'}{v^2}$.

Donc : $f'(x) = \dfrac{\left(3x^2-4x\right)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-2x^2)}{\left((x-1)^2\right)^2} = \dfrac{(x-1)\left[\left(3x^2-4x\right)(x-1) - 2(x^3-2x^2)\right]}{(x-1)^4}$

$f'(x) = \dfrac{\left(3x^2-4x\right)(x-1) - 2(x^3-2x^2)}{(x-1)^3} = \dfrac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}$ et $\boxed{f'(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}}$

3-2 droite tangente à C_f parallèle à l'axe (Ox)

C_f admet une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) en tout point A d'abscisse a vérifiant : $a \in D'$ et $f'(a) = 0$.

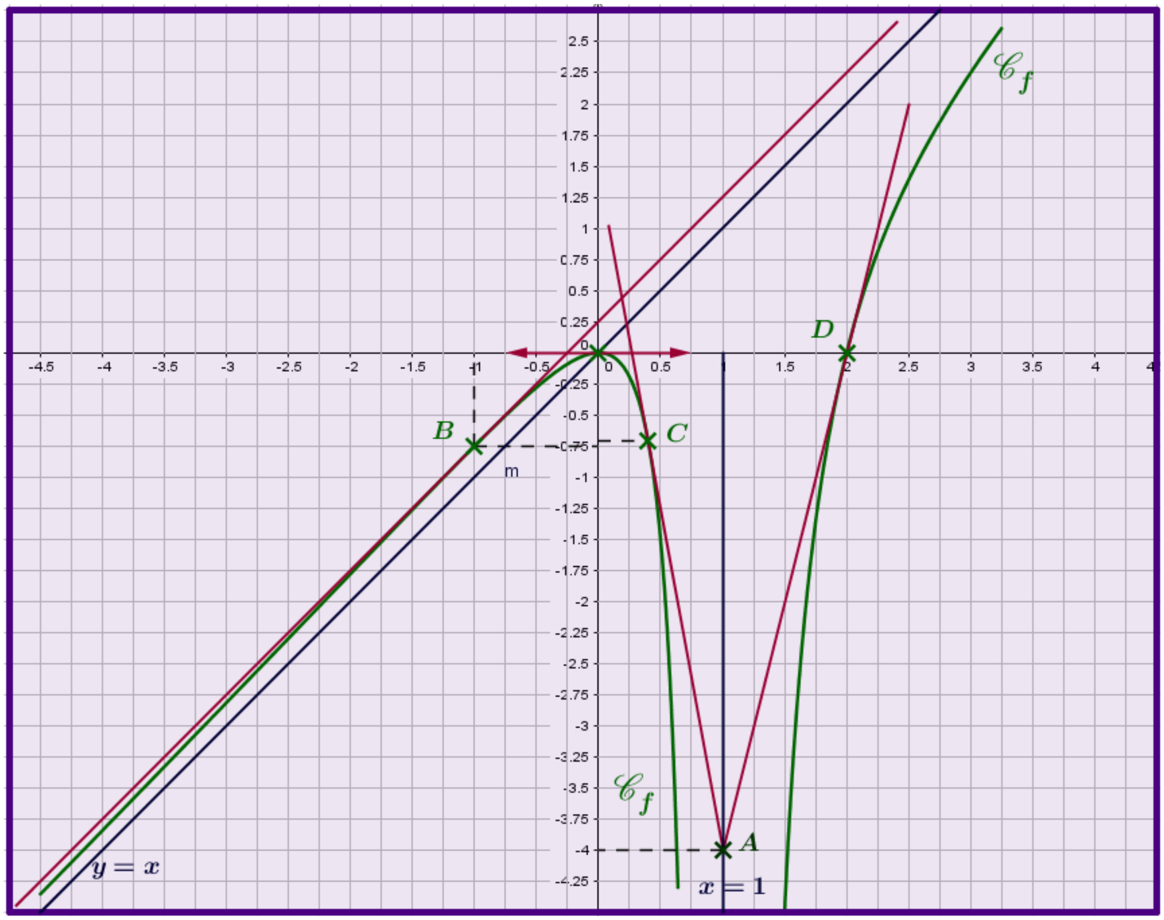
D'autre part : $D' = D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et pour tout réel x de D_f , $f'(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}$. Par conséquent :

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a^3-3a^2+4a}{(a-1)^3} = 0 \Leftrightarrow a^3-3a^2+4a = 0 \Leftrightarrow a\left(a^2-3a+4\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a^2-3a+4 = 0$$

le discriminant Δ de x^2-3x+4 vaut : $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4(1)(4) = 9-16 = -7$. Δ étant strictement négatif , x^2-3x+4 n'admet pas de racine et pour tout réel a , $a^2-3a+4 \neq 0$. D'où : $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $0 \in D_f$ est vrai .

Ainsi : C_f possède une seule droite tangente parallèle à l'axe (Ox) : en son point d'abscisse 0 qui est l'origine O du repère car :

$f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ entraîne $f(0) = \dfrac{(0)^3-2(0)^2}{((0)-1)^2} = \dfrac{0}{1} = 0$



3-3 C_f possède une seule droite tangente T parallèle à la droite asymptote $\Delta : y = x$

En tout point d'abscisse a ($a \in D'$) , C_f admet une droite tangente de coefficient directeur $f'(a) = \dfrac{a^3 - 3a^2 + 4a}{(a-1)^3}$.

La droite $\Delta : y = x$ est de coefficient directeur 1 et deux droites non parallèles à (Oy) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur . Donc C_f possède une droite tangente parallèle à la droite Δ si et seulement si on peut trouver un réel a de $D' = D_f$ tel que : $f'(a) = 1$. D'autre part avec a élément de D' (soit avec $a \neq 1$)

$f'(a) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a^3 - 3a^2 + 4a}{(a-1)^3} = 1 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4a = (a-1)^3 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4a = (a-1)(a-1)^2$

$f'(a) = 1 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4a = (a-1)(a^2 - 2a + 1) \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4a = a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1 \Leftrightarrow 4a = 3a - 1 \Leftrightarrow a = -1$

La valeur trouvée pour a convient car : $-1 \in D'$. Ainsi :

C_f possède une seule droite tangente T parallèle à la droite asymptote $\Delta : y = x$: en son point B d'abscisse -1 .

équation réduite de T

En tout point d'abscisse a de D' , C_f admet une droite tangente dont une équation est : $y = f(a) + f'(a)[x - a]$.

Avec $a = -1$, $y = f(a) + f'(a)[x - a]$ devient : $y = f(-1) + f'(-1)[x - (-1)]$. Donc : $T : y = f(-1) + f'(-1)[x + 1]$

D'autre part : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$ entraîne $f(-1) = \dfrac{(-1)^3 - 2(-1)^2}{((-1)-1)^2} = \dfrac{-3}{4}$; $f'(-1) = 1$ d'après ce qui précède .

Donc : $T : y = f(-1) + f'(-1)[x + 1]$ devient $T : y = -\dfrac{3}{4} + 1 \times [x + 1]$ soit $T : y = x + 1 - \dfrac{3}{4}$soit $\boxed{T : y = x + \dfrac{1}{4}}$

Pour tracer T on utilise le point de tangence B et le point de T d'abscisse 0 et d'ordonnée égale à $0 + \dfrac{1}{4}$ soit à $\dfrac{1}{4}$.

3-4 C_f possède deux droites tangentes contenant $A\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

En tout point M d'abscisse a $(a \in D')$, C_f admet une droite tangente T_M dont une équation est : $y = f(a) + f\,'(a)\,[x-a]$.

Pour le point $A\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$: $A \in T_M \Leftrightarrow y_A = f(a) + f\,'(a)\,[x_A - a] \Leftrightarrow -4 = f(a) + f\,'(a)\,[1-a]$.

D'autre part : avec $a \in D'$ (soit $a \neq 1$) , $f(a) = \dfrac{a^3-2a^2}{(a-1)^2}$ et $f\,'(a) = \dfrac{a^3-3a^2+4a}{(a-1)^3}$.

Donc : $A \in T_M \Leftrightarrow -4 = \dfrac{a^3-2a^2}{(a-1)^2} + \dfrac{a^3-3a^2+4a}{(a-1)^3}\,[1-a] \Leftrightarrow -4 = \dfrac{a^3-2a^2}{(a-1)^2} + \dfrac{a^3-3a^2+4a}{(a-1)^3} \times -(a-1)$

Puis : $A \in T_M \Leftrightarrow -4 = \dfrac{a^3-2a^2}{(a-1)^2} + \dfrac{a^3-3a^2+4a}{(a-1)^2} \times -1 \Leftrightarrow -4 = \dfrac{a^3-2a^2-(a^3-3a^2+4a)}{(a-1)^2} \Leftrightarrow -4 = \dfrac{a^2-4a}{(a-1)^2}$

$A \in T_M \Leftrightarrow -4(a-1)^2 = a^2-4a \Leftrightarrow -4(a^2-2a+1) = a^2-4a \Leftrightarrow -4a^2+8a-4-a^2+4a = 0 \Leftrightarrow -5a^2+12a-4 = 0$

2 est une racine de $-5x^2+12x-4$ car $-5\,(2)^2 + 12\,(2) - 4 = -20+24-4 = 0$.

Par conséquent $-5x^2+12x-4$ est factorisable par $(x-2)$ et $-5x^2+12x-4 = (x-2)(-5x+2)$.

D'où : $A \in T_M \Leftrightarrow -5a^2+12a-4 = 0$ devient : $A \in T_M \Leftrightarrow (a-2)(-5a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = \dfrac{2}{5}$

2 et $\dfrac{2}{5}$ sont distincts de 1 et conviennent comme valeurs de l'abscisse a d'un point M de C_f vérifiant : $A \in T_M$.

Ainsi : C_f possède deux droites tangentes contenant $A\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$: en chacun de ses points C et D ayant respectivement $\dfrac{2}{5}$ et 2 comme abscisse . Ces deux droites tangentes sont les droites (AC) et (AD) et ont respectivement pour coefficient directeur $f\,'(x_C)$ et $f\,'(x_D)$ soit $f\,'\left(\dfrac{2}{5}\right)$ et $f\,'(2)$. On a : $f\,'(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}$. Donc :

$$f\,'\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\left(\frac{2}{5}\right)-1\right)^3} = \frac{\left(\frac{8}{125}\right) - 3\left(\frac{4}{25}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{\frac{8-60+200}{125}}{-\frac{27}{125}} = -\frac{\frac{148}{125}}{\frac{27}{125}} = -\frac{148}{27}$$

$$f\,'(2) = \frac{(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2)}{((2)-1)^3} = \frac{8-12+8}{1^3} = 4$$

Ainsi : Les droites tangentes (AC) et (AD) ont respectivement pour coefficient directeur : $-\dfrac{148}{27}$ et 4 .

exercice 3

Dans chacun des cas suivants (sauf pour le n^o6 et n^o7) on demande de préciser l'ensemble de dérivabilité D' de la fonction f puis de calculer $f\,'(x)$ pour x élément de D' .

$\underline{\underline{1)\, f(x) = \frac{5}{4}x^8 - \frac{7}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 4x^2 + 2x\sqrt{3} - 1}}$ On a : $D' = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme . D'autre part : pour tout réel x ,

$f\,'(x) = \dfrac{5}{4}\left(8x^7\right) - \dfrac{7}{8}\left(4x^3\right) + \dfrac{5}{6}\left(3x^2\right) - 4\,(2x) + 2\,(1)\,\sqrt{3} - 0$ soit : $\boxed{f\,'(x) = 10x^7 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 8x + 2\sqrt{3}}$

$\underline{\underline{2)\, f(x) = (-2x+1)^2(3x+2)^3}}$ On a : $D' = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme . D'autre part : pour tout réel x ,

$f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = (-2x+1)^2 \text{ donc : } u'(x) = -4(-2x+1) \\ v(x) = (3x+2)^3 \text{ donc : } v'(x) = 9(3x+2)^2 \end{cases}$

<u>calcul de $u'(x)$</u> On a : $u = a^2$ avec $a(x) = -2x+1$ et $a'(x) = -2$. Or : $(u)' = \left(a^2\right)' = 2a \times a'$. Donc :

$u'(x) = 2(-2x+1) \times (-2) = -4(-2x+1)$

<u>calcul de $v'(x)$</u> On a : $v = b^3$ avec $b(x) = 3x+2$ et $b'(x) = 3$. Or : $(v)' = \left(b^3\right)' = 3b^2 \times b'$. Donc :

$v'(x) = 3(3x+2)^2 \times (3) = 9(3x+2)^2$

<u>déduction de $f\,'(x)$</u> On a : $f\,' = (uv)' = u'v + uv'$. Donc :

$f\,'(x) = -4(-2x+1)(3x+2)^3 + 9(3x+2)^2(-2x+1)^2 = (-2x+1)(3x+2)^2\,[-4(3x+2) + 9(-2x+1)]$

$f\,'(x) = (-2x+1)(3x+2)^2\,[-12x-8-18x+9]$ soit : $\boxed{f\,'(x) = (-2x+1)(3x+2)^2\,(-30x+1)}$

3) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{5}{3x-2}$ On a : $D' = D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ car f fonction rationnelle et $x \notin D_f \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

On a : $f = u + \dfrac{5}{v} = u + 5 \times \dfrac{1}{v}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 2x + 3 \text{ et } u'(x) = 2 \\ v(x) = 3x - 2 \text{ et } v'(x) = 3 \end{cases}$

Or : $(f)' = \left(u + 5 \times \dfrac{1}{v}\right)' = u' + 5 \times \left(\dfrac{1}{v}\right)' = u' + 5 \times \left(\dfrac{-v'}{v^2}\right) = u' - \dfrac{5v'}{v^2}$.

Donc : $f'(x) = 2 - \dfrac{5 \times 3}{(3x-2)^2}$ soit $\boxed{f'(x) = 2 - \dfrac{15}{(3x-2)^2}}$

4) $f(x) = \dfrac{-5x^2 - 7x + 2}{x^2 + 4x}$ On a : $D' = D_f = \mathbb{R} - \{0, -4\}$ car $\begin{cases} \text{f est une fonction rationnelle} \\ x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4 \end{cases}$

On a : $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = -5x^2 - 7x + 2 \text{ donc : } u'(x) = -10x - 7 \\ v(x) = x^2 + 4x \text{ donc : } v'(x) = 2x + 4 \end{cases}$ et $f\,' = (\dfrac{\mathbf{u}}{v})' = \dfrac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$f\,'(x) = \frac{(-10x-7)(x^2+4x) - (2x+4)(-5x^2-7x+2)}{(x^2+4x)^2} = \frac{\left(-10x^3 - 40x^2 - 7x^2 - 28x\right) - \left(-10x^3 - 14x^2 + 4x - 20x^2 - 28x + 8\right)}{(x^2+4x)^2}$$

$f\,'(x) = \dfrac{\left(-10x^3 - 47x^2 - 28x\right) - \left(-10x^3 - 34x^2 - 24x + 8\right)}{(x^2+4x)^2}$. Ainsi : $\boxed{f\,'(x) = \dfrac{-13x^2 - 4x - 8}{(x^2+4x)^2}}$

5) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+2}{5x-3}\right)^2$ On a : $D' = D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$ car f est une fonction rationnelle et $x \notin D_f \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

D'autre part : $f = w^2$ avec $w(x) = \dfrac{x^2+2}{5x-3}$ et $w'(x) = \dfrac{5x^2 - 6x - 10}{(5x-3)^2}$.

calcul de $w'(x)$ On a : $w = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 2 \text{ donc : } u'(x) = 2x \\ v(x) = 5x - 3 \text{ donc : } v'(x) = 5 \end{cases}$ et $w\,' = (\dfrac{\mathbf{u}}{v})' = \dfrac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$.

Donc : $w'(x) = \dfrac{2x(5x-3) - (5)(x^2+2)}{(5x-3)^2} = \dfrac{10x^2 - 6x - 5x^2 - 10}{(5x-3)^2} = \dfrac{5x^2 - 6x - 10}{(5x-3)^2}$

déduction de $f\,'(x)$ On a : $f\,' = (w^2)' = 2w \times w'$.

Donc : $f\,'(x) = 2\left(\dfrac{x^2+2}{5x-3}\right) \times \left(\dfrac{5x^2-6x-10}{(5x-3)^2}\right)$ soit : $\boxed{f\,'(x) = \dfrac{2(x^2+2)(5x^2-6x-10)}{(5x-3)^3}}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{cos2x}$ f est la fonction inverse de $x \mapsto \cos 2x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable en tout réel x de D_f .

Avec x réel : $x \notin D_f \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $2x \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{2\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{2\pi}{2}\right]$

$x \notin D_f \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[\pi]$. Donc $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}, x \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[\pi] \text{ ou } x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[\pi]\} = D'$

calcul de $f'(x)$ Ona : $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = \cos 2x$ et $v'(x) = -2\sin 2x$. Or : $f\,' = \left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

Donc : $f\,'(x) = \dfrac{-(-2\sin 2x)}{(\cos 2x)^2}$ et $\boxed{f\,'(x) = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}}$

7) $f(x) = \dfrac{sinx + cosx}{sinx - cosx}$ f est une fonction quotient utilisant les fonctions sinus et cosinus dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable en tout réel x de D_f . Avec x réel : $x \notin D_f \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \cos(\dfrac{\pi}{2} - x)$

$x \notin D_f \Leftrightarrow x \equiv \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)[2\pi]$ ou $x \equiv -\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)[2\pi] \Leftrightarrow x + x \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ ou $x - x \equiv \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi]$

$x \notin D_f \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ ou $0 \equiv \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ et $0 \equiv \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ faux car 0 et $-\dfrac{\pi}{2}$ ne sont pas des mesures d'un même angle

$x \notin D_f \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left[\dfrac{2\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \equiv \left(\dfrac{\pi}{4}\right)[\pi]$ et $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}, x \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[\pi]\}$

calcul de $f'(x)$ On a : $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \sin x + \cos x \text{ donc : } u'(x) = \cos x - \sin x \\ v(x) = \sin x - \cos x \text{ donc : } v'(x) = \cos x + \sin x \end{cases}$ et $f\,' = (\dfrac{\mathbf{u}}{v})' = \dfrac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$f\,'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$f\,'(x) = \frac{-(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$f\,'(x) = \dfrac{-\left(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x\right) - \left(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x} = \dfrac{-2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{(\sin x - \cos x)^2}$ et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Donc : $f\,'(x) = \dfrac{-2}{1 - 2\sin x\cos x}$ et $2\sin x\cos x = \sin 2x$. D'où : $f\,'(x) = \dfrac{-2}{1 - \sin 2x}$ soit : $\boxed{f\,'(x) = \dfrac{2}{\sin 2x - 1}}$

8) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ ensemble de dérivabilité D' • $D_f = \mathbb{R}$. Pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -1$

$x^2 \geq -1$ est vrai pour tout x réel car : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ et $-1 < 0$. Donc $x \in D_f$ est vrai pour tout x réel .

• $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable en tout réel x vérifiant $1+x^2 > 0$ soit $x^2 > -1$

$x^2 > -1$ est vrai pour tout x réel car : $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$ et $0 > -1$. Donc $1+x^2 > 0$ est vrai pour tout x réel et $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable en tout réel x . Finalement : f est dérivable en tout réel x comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

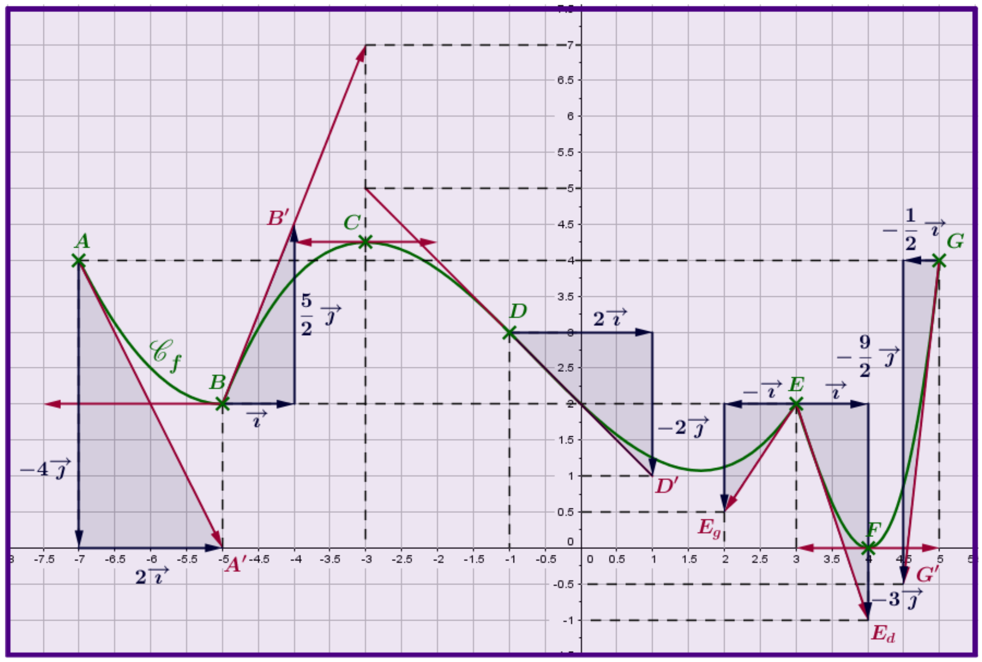
calcul de $f'(x)$ On a : $f = u \times \sqrt{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ donc : } u'(x) = 1 \\ v(x) = x^2+1 \text{ donc : } v'(x) = 2x \end{cases}$

Or : $f' = (u \times \sqrt{v})' = u \times (\sqrt{v})' + u' \times \sqrt{v} = \left(u \times \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}\right) + (u' \times \sqrt{v})$.

Donc : $f'(x) = x \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 \times \sqrt{1+x^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{(\sqrt{1+x^2}) \times \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x^2+(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}}$

exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La figure donne la représentation graphique



1) $\boxed{f'(-3) = 0}$ -3 est l'abscisse du point C et $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la droite tangente à C_f en C qui est d'après le graphique parallèle à (Ox) et donc de coefficient directeur nul .

$\boxed{f'(-1) = -1}$ -1 est l'abscisse du point D et $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la droite (DD') tangente à C_f en D qui est d'après le graphique dirigée par $\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. (DD') est aussi dirigée par $\frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La première coordonnée de $\frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}$ valant 1 , sa deuxième coordonnée est le coefficient directeur de (DD') . Ainsi : $f'(-1) = -1$

$\boxed{f'_d(-7) = -2}$ -7 est l'abscisse du point A de C_f et $f'(-7)$ est le coefficient directeur de la demi-tangente à droite $[AA')$ à C_f en son point A qui est d'après le graphique dirigée par $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Un autre vecteur directeur de $[AA')$ est $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La première coordonnée de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ valant 1 , la seconde coordonnée de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ représente le coefficient directeur $f'_d(-7)$ et : $f'(-7) = -2$.

$\boxed{f'_g(5) = 9}$ 5 est l'abscisse du point G de C_f et $f'_g(5)$ est le coefficient directeur de la demi-tangente à gauche $[GG')$ à C_f en son point G qui est d'après le graphique dirigée par $\overrightarrow{GG'}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$. Un autre vecteur directeur de $[GG')$ est $-2\overrightarrow{GG'}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$. La première coordonnée de $-2\overrightarrow{GG'}$ valant 1 , la seconde coordonnée de $-2\overrightarrow{GG'}$ représente le coefficient directeur $f'_g(5)$ et : $f'_g(5) = 9$.

2) valeur des deux limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$

-5 est l'abscisse du point B de C_f et C_f admet en ce point B deux demi-tangentes T_g et T_d de coefficients directeurs respectifs $f'_g(-5)$ et $f'_d(-5)$. Graphiquement on obtient :

→ la demi-tangente T_g est parallèle à (Ox) et a donc pour coefficient directeur le réel 0 . D'où : $f'_g(-5) = 0$

$\rightarrow$ la demi-tangente T_d est dirigée par $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}1\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ de première coordonnée 1 . La seconde coordonnée de $\overrightarrow{BB'}$ représente donc le coefficient directeur $f'_d(-5)$ et : $f'_d(-5)=\dfrac{5}{2}$.

D'autre part , en termes de limite on a : $f'_g(-5)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\,<\,0}}\dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$ et $f'_d(-5)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\,>\,0}}\dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$.

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\,<\,0}}\dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}=0$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\,>\,0}}\dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}=\dfrac{5}{2}$.

3) <u>étude de dérivabilité en 3</u> 3 est l'abscisse du point E de C_f et C_f admet en ce point E deux demi-tangentes (EE_g) et (EE_d) de coefficients directeurs respectifs $f'_g(3)$ et $f'_d(3)$. Graphiquement on obtient : $E\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $E_g\begin{pmatrix}2\\0.5\end{pmatrix}$; $E_d\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

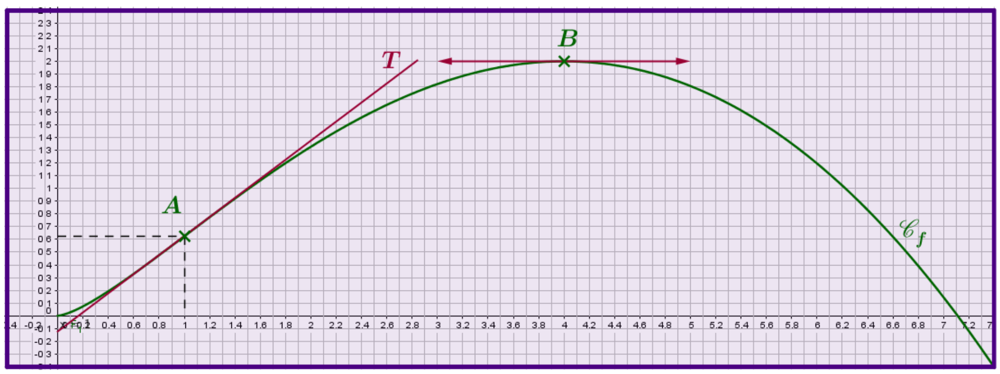
$\rightarrow$ le coefficient directeur $f'_g(3)$ de la demi-tangente (EE_g) vaut : $f'_g(3)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_E-y_{E_g}}{x_E-x_{E_g}}=\dfrac{2-0.5}{3-2}=1.5=\dfrac{3}{2}$.

$\rightarrow$ le coefficient directeur $f'_d(3)$ de la demi-tangente (EE_g) vaut : $f'_d(3)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_E-y_{E_d}}{x_E-x_{E_d}}=\dfrac{2-(-1)}{3-4}=-3$.

$f'_g(3)\neq f'_d(3)$. Donc f n'est pas dérivable en 3 .

exercice 5

La figure suivante donne (dans un plan muni d'un repère orthogonal) la représentation graphique C_f de la fonction $f : x\longmapsto f(x)$ avec $f(x)=x\sqrt{x}-\dfrac{3}{8}x^2$ et sa droite tangente T en son point A d'abscisse 1 .



1) <u>f est définie sur $\mathbb{R}^+$</u> $\boxed{D_f=\mathbb{R}^+}$ En effet $\sqrt{x}$ et $x\sqrt{x}$ existent si et seulement si x est positif et $-\dfrac{3}{8}x^2$ est défini pour tout réel x .

<u>étude de dérivabilité de f à droite en 0</u> . Soit h un réel strictement positif et $T(h)=\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

On a : $f(0+h)=f(h)=h\sqrt{h}-\dfrac{3}{8}h^2$ et $f(0)=0\sqrt{0}-\dfrac{3}{8}(0)^2=0$. Donc : $T(h)=\dfrac{h\sqrt{h}-\frac{3}{8}h^2-0}{h}=\sqrt{h}-\dfrac{3}{8}h$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\,>\,0}}T(h)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\,>\,0}}\left(\sqrt{h}-\dfrac{3}{8}h\right)=\sqrt{0}-\dfrac{3}{8}(0)=0$. Cette limite étant réelle on peut affirmer :

f est dérivable à droite en 0 et de nombre dérivé à droite : $f'_d(0)=0$.

conséquence : $f(0)=0$ donc la courbe C_f passe par l'origine O . $f'_d(0)$ étant égal à 0 , la courbe C_f admet en son point O une demi-tangente de coefficient directeur nul . Cette demi-tangente est donc parallèle à (Ox) .

2) <u>dérivabilité de f en $x>0$</u> $x\mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable en tout réel de $]0,+\infty[$.

Donc $x\mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en tout réel de $]0,+\infty[$. D'autre part : $x\mapsto -\dfrac{3}{8}x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $x\longmapsto x\sqrt{x}-\dfrac{3}{8}x^2$ est dérivable en tout réel de $]0,+\infty[$.

<u>calcul de $f'(x)$ pour $x>0$</u> On a : $f=uv-w$ avec : $\begin{cases}u(x)=x \text{ et } u'(x)=1 \ ;\ v(x)=\sqrt{x} \text{ et } v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\\ w(x)=\dfrac{3}{8}x^2 \text{ et } w'(x)=\dfrac{3}{8}(2x)=\dfrac{3}{4}x\end{cases}$.

D'autre part : $(f)'=(uv-w)'=(uv)'-w'=uv'+u'v-w'$.

Donc : $f'(x)=x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)+1\left(\sqrt{x}\right)-\dfrac{3}{4}x=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt{x}-\dfrac{3}{4}x$ et $\boxed{f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{3}{4}x}$

3) équation réduite de la droite tangente T en son point A d'abscisse 1

f étant dérivable en 1 ($1 > 0$) , la courbe C_f admet en son point A d'abscisse 1 une droite tangente T dont une équation est :

$y = f(a) + f'(a)[x-a]$ avec $a = 1$.

Avec $a = 1$, $y = f(a) + f'(a)[x-a]$ devient : $y = f(1) + f'(1)[x-(1)]$. Donc : $T : y = f(1) + f'(1)[x-1]$

D'autre part : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{8}x^2 \text{ entraîne : } f(1) = 1\sqrt{1} - \dfrac{3}{8}(1)^2 = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8} \\ f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{4}x \text{ entraîne : } f'(1) = \dfrac{3}{2}\sqrt{1} - \dfrac{3}{4}(1) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Par conséquent $T : y = f(1) + f'(1)[x-1]$ devient $T : y = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{4}[x-1]$ puis $T : y = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{4}$ soit $\boxed{T : y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}}$

4) Le but de cette question est d'étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite T en utilisant la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8}$

4-1 $g'(x)$ pour $x > 0$

On a : $g(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} = f(x) + u(x)$ avec $u(x) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8}$. D'autre part : f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine . Par conséquent , g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel x strictement positif :

$g'(x) = f'(x) + u'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{4}\left(\sqrt{x}\right)^2 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4}\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} + 1\right] = -\dfrac{3}{4}(\sqrt{x}-1)^2$

4-2 signe de $g'(x)$ pour $x > 0$

$\rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}(\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x = 1$ et $1 > 0$

$\rightarrow$ avec $x > 0$ et $x \neq 1$ on a $\sqrt{x} \neq 1$ d'où $\sqrt{x} - 1 \neq 0$ puis $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 > 0$.

Ayant $-\dfrac{3}{4} < 0$ et $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 > 0$ on déduit : $-\dfrac{3}{4}(\sqrt{x}-1)^2 < 0$ soit $g'(x) < 0$ pour tout réel x de $]0,+\infty[- \{1\}$

$g(1) = 1\sqrt{1} - \dfrac{3}{8}(1)^2 - \dfrac{3}{4}(1) + \dfrac{1}{8} = 1 - \dfrac{3}{8} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8} - \dfrac{5}{8} = 0$

tableau de variation pour la fonction g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

déduction du signe de $g(x)$

pour $x = 1$ on a : $g(x) = g(1) = 0$

g étant strictement décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ on a pour tout réel x strictement positif :

$\rightarrow x < 1$ entraîne $g(x) > g(1)$ soit $g(x) > 0$

$\rightarrow x > 1$ entraîne $g(x) < g(1)$ soit $g(x) < 0$

4-3 Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite $T : y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}$ revient à comparer les ordonnées de deux points de même abscisse x ($x > 0$) : $\begin{cases} \rightarrow \text{l'un , noté } M \text{ , situé sur } C_f \text{ et d'ordonnée : } y_M = f(x) \\ \rightarrow \text{l'autre , noté } P \text{ , situé sur } T \text{ et d'ordonnée : } y_p = y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8} \end{cases}$

Avec $x > 0$: $y_M - y_P = f(x) - \left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}\right) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} = g(x)$.

En utilisant la question **4-2** on déduit :

$\rightarrow x = 1$ entraîne $g(x) = 0$ soit $y_M - y_P = 0$ soit $y_M = y_P$

D'autre part : $1 = x_A$ donc : $y_M = y_A$. On retrouve ainsi : C_f et T se coupent en A qui est le point de tangence .

La courbe C_f traverse sa droite tangente T en A qui est donc un point d'inflexion pour la courbe C_f .

$x > 0$	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
$y_M - y_P = g(x)$	$+$	0	$-$
position de C_f par rapport à T	$y_M > y_P$ C_f au dessus de T	$\cap$	$y_M < y_P$ C_f en dessous de T