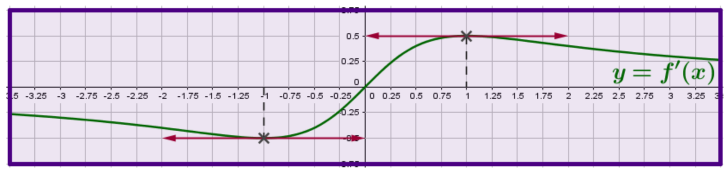
Dérivées - DS 4h - énoncé

exercice 1 Cet exercice utilise un questionnaire à choix multiples (QCM) .

Les six questions suivantes sont indépendantes . **Pour chaque question il y a exactement deux conclusions correctes** . Vous devez donc cocher au plus deux réponses (celles que vous jugez correctes) . Aucune justification n'est demandée

Cet exercice sera noté de la manière suivante : A chacune des six questions est affecté un certain nombre de points ; chaque réponse exacte rapporte la moitié des points ; chaque réponse fausse enlève la moitié des points ; cocher 3 cases ou 4 cases enlève la totalité des points et ne cocher aucune case enlève le quart des points . Si , par application de ce barème , le total des points pour l'ensemble des cinq questions est négatif , la note attribuée à cette première partie est égale à zéro .

Q1 La figure donne la représentation graphique $C_{f'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$



☐ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

☐ La courbe C_f admet en ses points d'abscisse 1 et -1 des droites tangentes parallèles

☐ La courbe C_f admet au moins une droite tangente parallèle à la droite D : $y = 2x$

☐ La courbe C_f admet en son point d'abscisse 0 une droite tangente parallèle à l'axe (Ox)

Q2 avec $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{1-4x}{x^2-2x+2}$ ☐ g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{(x^2-2x+2)^2}$

☐ La courbe C_g admet deux droites tangentes parallèles à l'axe (Ox)

☐ La courbe C_g admet une droite asymptote parallèle à l'axe (Ox)

☐ La courbe C_g admet une droite asymptote parallèle à l'axe (Oy)

Q3 avec la fonction $h : x \longmapsto h(x) = (x^5+2x^3)\tan x$ ☐ h est une fonction impaire

☐ h admet une limite en 0 égale à 0 ☐ h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) = \dfrac{5x^4+6x^2}{\cos^2 x}$

☐ La courbe C_h admet en son point d'abscisse 0 une droite tangente parallèle à l'axe (Ox)

Q4 avec $F : x \longmapsto F(x) = 4x + 2 + \dfrac{3}{3x+1}$ ☐ F est dérivable sur D_F et : $\forall x \in D_F$, $F'(x) = 4 + \dfrac{9}{(3x+1)^2}$

☐ F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ ☐ La courbe C_F admet deux droites tangentes parallèles à l'axe (Ox)

☐ La courbe C_F n'admet pas de droite tangente parallèle à sa droite asymptote oblique

Q5 avec la fonction $G : x \longmapsto G(x) = x\,|x|$ ☐ G est paire ☐ G est dérivable en 0

☐ G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2\,|x|$

☐ G a une fonction dérivée elle même dérivable en 0

Q6 avec la fonction $H : x \longmapsto H(x) = \dfrac{x^2}{2x^2-5x-3}$

☐ H est dérivable sur D_H et vérifie : $\forall x \in D_H$, $H'(x) = \dfrac{5x^2+6x}{(2x^2-5x-3)^2}$

☐ H est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ ☐ H vérifie $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{H(-1+h)-H(-1)}{h} = \dfrac{1}{16}$

☐ La courbe C_H admet trois droites asymptotes

exercice 2

La figure suivante donne , dans un plan muni d'un repère orthogonal , la représentation graphique C_f de la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$, un point fixe $A\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

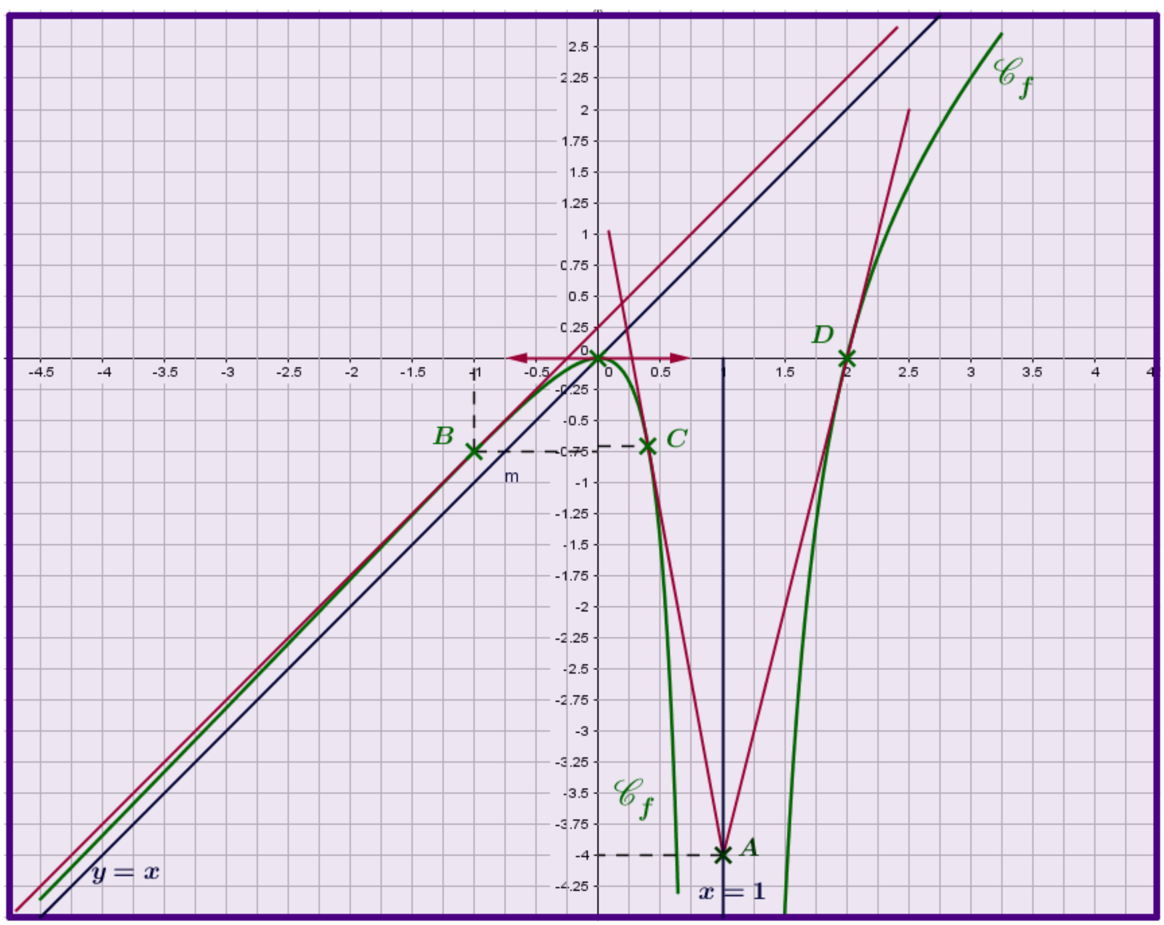
1) Déterminer D_f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f .

2) Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$. En déduire l'existence d'une droite asymptote oblique Δ pour la courbe C_f .

3) 3-1 Préciser l'ensemble D' de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour x élément de D' . Montrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante : $\forall x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^3}$.

3-2 Justifier que C_f possède une seule droite tangente parallèle à l'axe (Ox) puis la tracer sur la figure .

3-3 Justifier que C_f possède une seule droite tangente T parallèle à la droite asymptote Δ ; écrire une équation de T puis la tracer sur la figure . **3-4** Justifier que C_f possède deux droites tangentes contenant $A\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; les tracer sur la figure puis donner la valeur de leurs coefficients directeurs respectifs .



exercice 3

Dans chacun des cas suivants (sauf pour le n°6 et n°7) on demande de préciser l'ensemble de dérivabilité D' de la fonction f puis de calculer $f'(x)$ pour x élément de D' .

1) $f(x) = \dfrac{5}{4}x^8 - \dfrac{7}{8}x^4 + \dfrac{5}{6}x^3 - 4x^2 + 2x\sqrt{3} - 1$

2) $f(x) = (-2x+1)^2(3x+2)^3$(mettre $f'(x)$ sous forme factorisée)

3) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{5}{3x-2}$

4) $f(x) = \dfrac{-5x^2 - 7x + 2}{x^2 + 4x}$

5) $f(x) = \left(\dfrac{x^2+2}{5x-3}\right)^2$

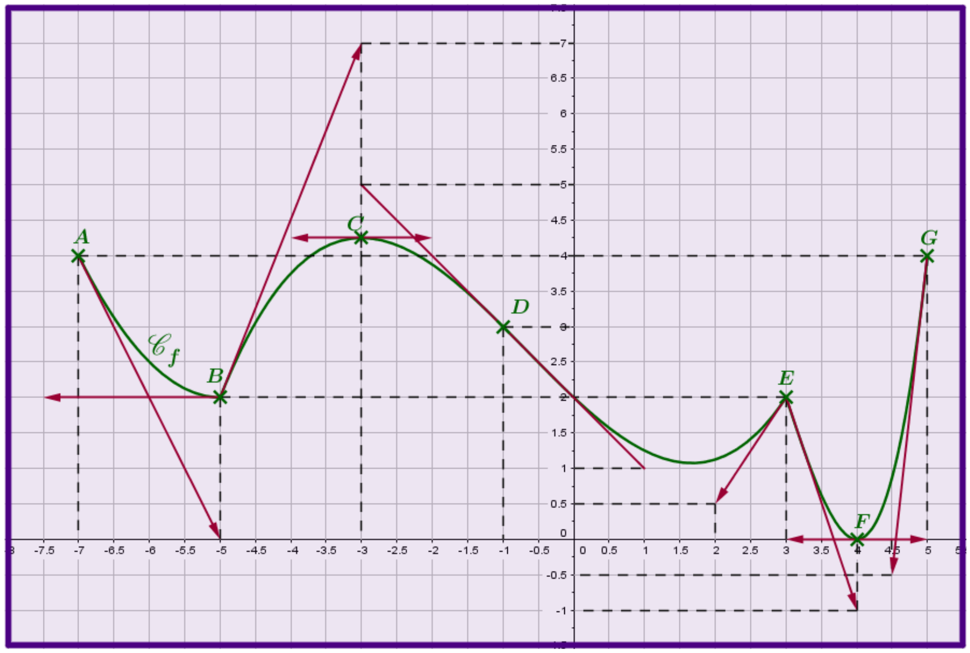
6) $f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$

7) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

8) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

exercice 4 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La figure donne la représentation graphique

C_f d'une fonction f définie sur $[-7, 5]$, des droites tangentes en chacun de ses points C , D , F et des demi-tangentes en chacun de ses points A , B , E , G . Compléter la figure en mettant en évidence les vecteurs sommes du type $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ qui sont égaux aux vecteurs directeurs respectifs de ces tangentes ou de ces demi-tangentes tracés sur la figure .



1) Sans justifier , compléter ce qui suit :

$f'(-3) = \ldots$; $f'(-1) = \ldots$

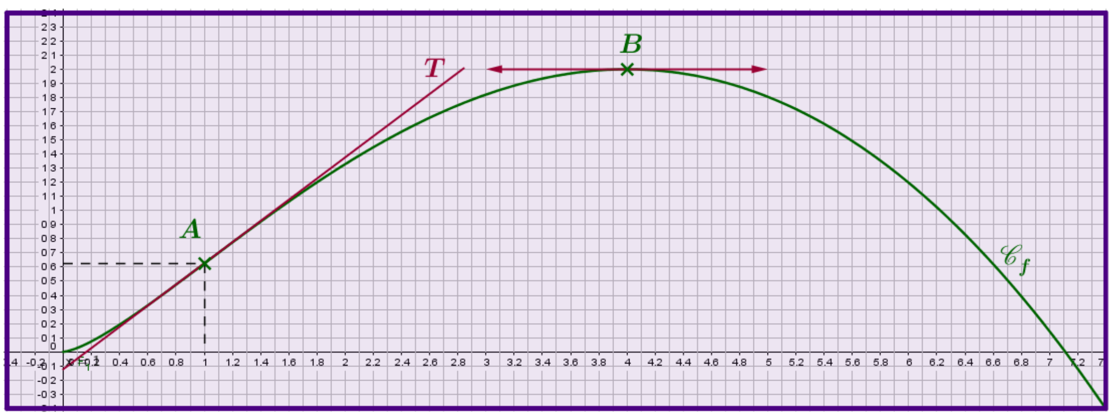
$f'_d(-7) = \ldots$; $f'_g(5) = \ldots$

2) En justifiant , donner la valeur des deux limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(-5+h) - f(-5)}{h}$, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(-5+h) - f(-5)}{h}$. **3)** f est -elle dérivable en 3 ? Motiver votre réponse .

exercice 5 La figure suivante donne (dans un plan muni d'un repère orthogonal) la représentation graphique C_f de la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{8}x^2$ et sa droite tangente T en son point A d'abscisse 1 .

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^+$ puis faire une étude de dérivabilité de f à droite en 0 . Que peut-on en déduire pour C_f ?



2) Justifier que f est dérivable en tout réel x strictement positif puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

3) Ecrire une équation de la droite tangente T en son point A d'abscisse 1 .

4) Le but de cette question est d'étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite T en utilisant la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8}$.

4-1 Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$ puis montrer : $g'(x) = -\dfrac{3}{4}(\sqrt{x} - 1)^2$.

4-2 En déduire le tableau de variation pour la fonction g (sans donner de limite) puis en déduire le signe de $g(x)$ pour x strictement positif .

4-3 En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite T .