Dérivabilité - Point de vue graphique - corrigé

En préalable : des outils pour les lectures graphiques de nombre dérivés

1) compléter le tableau suivant : (f fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un réel noté a)

le nombre dérivé qui existe	ce qu'il représente en termes de limite pour la fonction f	ce qu'il représente pour la courbe C_f représentant la fonction f
$f'(a)$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$f'(a)$: coefficient directeur de la droite T_A tangente à C_f en son point A d'abscisse a ; T_A dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+f'(a)\overrightarrow{j}$
$f'_d(a)$	$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$f'_d(a)$: coefficient directeur de la demi-tangente T_d à droite à C_f en son point A d'abscisse a (pour $x>a$) ; T_d dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\f'_d(a)\end{pmatrix}$
$f'_g(a)$	$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$f'_g(a)$; coefficient directeur de la demi-tangente T_g à gauche à C_f en son point A d'abscisse a (pour $x<a$) ; T_g dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\-f'_g(a)\end{pmatrix}$

Quel est le lien entre les trois nombres dérivés $f'(a)$, $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$?

$f'(a)$ existe si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent en étant égaux et alors : $f'(a)=f'_g(a)=f'_d(a)$

Dans cette situation f est dite dérivable en a

2) Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On suppose que C_f possède une droite tangente T en un point A d'abscisse a :

2-1 Quel est son coefficient directeur ? $f'(a)$

2-2 En connaissant un deuxième point B de la droite tangente T comment peut-on calculer le nombre dérivé $f'(a)$?

$T=(AB)$ et T de coefficient directeur $f'(a)$ donc : $f'(a)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

2-3 Quelles sont les coordonnées du vecteur directeur de T qui a pour première coordonnée ?

$\rightarrow$ le réel 1 ? : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}$; $\rightarrow$ le réel -1 ? : $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-1\\-f'(a)\end{pmatrix}$; $\rightarrow$ le réel 3 ? : $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\3f'(a)\end{pmatrix}$; $\rightarrow$ le réel -2 ? : $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-2\\-2f'(a)\end{pmatrix}$

Ecrire ensuite chacun de ces vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$:

$\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{i}+f'(a)\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{u_2}=-\overrightarrow{i}-f'(a)\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{u_3}=3\overrightarrow{i}+3f'(a)\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{u_4}=-2\overrightarrow{i}-2f'(a)\overrightarrow{j}$

2-4 En déduire une deuxième méthode permettant graphiquement de donner la valeur numérique de $f'(a)$ en utilisant un des vecteurs directeurs de T :

$f'(a)$ est la seconde coordonnée du vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de T dont la première coordonnée vaut 1

D'où la méthode : déterminer graphiquement un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de T puis construire le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{v}$ qui a pour première coordonnée 1 (il se peut que le vecteur $\overrightarrow{v}$ soit d'entrée le vecteur $\overrightarrow{u_1}$) . Le nombre $f'(a)$ est alors égal à la seconde coordonnée de ce vecteur $\overrightarrow{u_1}$.

exercice 1

La figure ci-contre donne , dans un plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la représentation graphique C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La figure met aussi en évidence les droites tangentes à C_f en chacun de ses points A , B , C , D , E .

1) $f'(-1)=f'(5)=0$ $\quad -1$ et 5 sont les abscisses respectives des points B et D situés sur C_f. . En chacun de ces points B et D , la courbe C_f admet une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) .

D'autre part : les droites tangentes à C_f en B et en D ont respectivement pour coefficient directeur $f'(-1)$ et $f'(5)$ et toute droite parallèle à l'axe (Ox) a le réel 0 pour coefficient directeur . Donc : $f'(-1)=f'(5)=0$ est vrai .

2) valeur de $f'(-4)$

-4 est l'abscisse du point A de C_f et la droite tangente T_A à C_f en A est (AI) . Son coefficient directeur est $f'(x_A)$.

D'où : $f'(x_A) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_I - y_A}{x_I - x_A}$

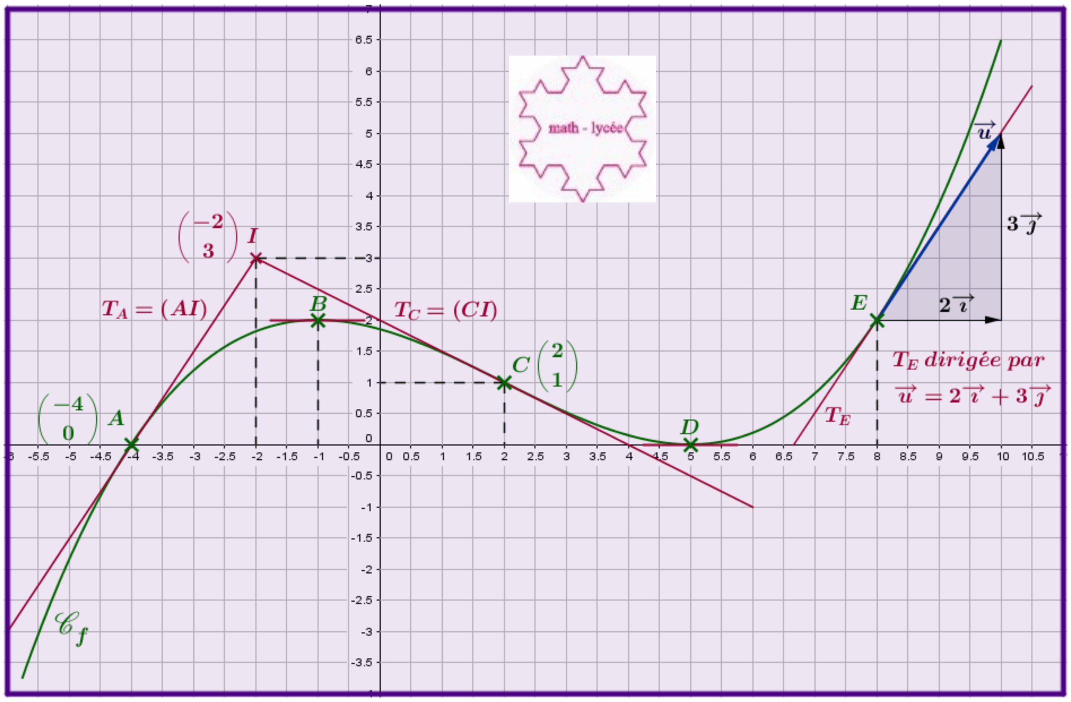
soit : $f'(-4) = \dfrac{3-0}{-2-(-4)} = \dfrac{3}{2}$

valeur de $f'(2)$

2 est l'abscisse du point C de C_f et la droite tangente T_C à C_f en C est (CI) . Son coefficient directeur est $f'(x_C)$.

donc : $f'(x_C) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_C - y_I}{x_C - x_I}$

soit : $f'(2) = \dfrac{1-3}{2-(-2)} = -\dfrac{1}{2}$

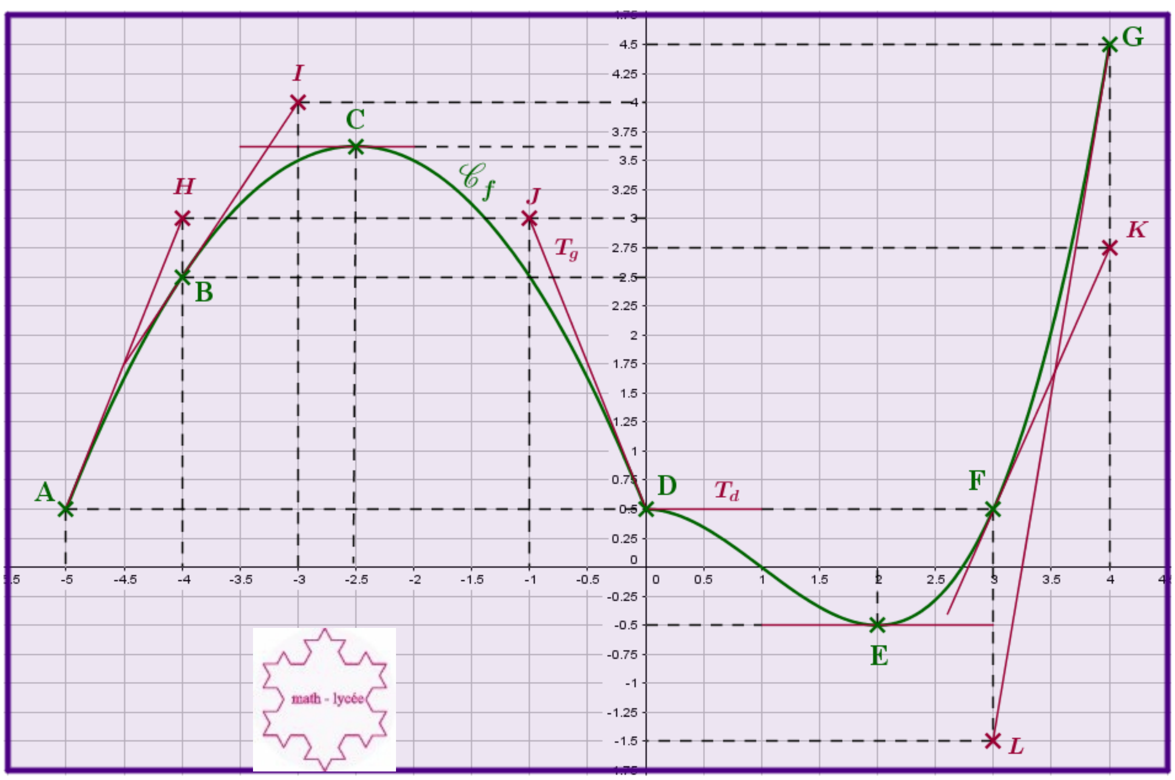


3) valeur de $f'(8)$ 8 est l'abscisse du point E de C_f et la droite tangente T_E à C_f en E , de coefficient directeur $f'(x_E)$, est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\f'(x_E)\end{pmatrix}$. Graphiquement on obtient : T_E dirigée par $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ soit par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Un autre vecteur directeur de T_E est $\dfrac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times 2\\ \frac{1}{2}\times 3\end{pmatrix}$ soit $\dfrac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$. La première coordonnée de ce vecteur étant égale à 1 , sa seconde coordonnée est le coefficient directeur $f'(x_E)$ demandé . Par conséquent : $f'(x_E) = \dfrac{3}{2}$ soit : $f'(8) = \dfrac{3}{2}$.

exercice 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur $[-5, 4]$ et met en évidence des droites tangentes à C_f (en chacun de ses points B , C , E , F) et des demi-tangentes à C_f (en chacun de ses points A , D , G) .



points utilisés dans la suite : $A\begin{pmatrix}-5\\0.5\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-4\\2.5\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-2.5\\\simeq 3.6\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}2\\-0.5\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}3\\0.5\end{pmatrix}$
$G\begin{pmatrix}4\\4.5\end{pmatrix}$; $H\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; $I\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$; $J\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}4\\2.75\end{pmatrix}$; $L\begin{pmatrix}3\\-1.5\end{pmatrix}$

1) Peut-on trouver deux valeurs de réel a tels que : $a \in [-5,4]$ et $f'(a)=0$?

En chacun de ses points C et E , la courbe C_f admet une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) .

D'autre part : $\rightarrow$ les droites tangentes à C_f en C et en E ont respectivement pour coefficient directeur $f'(x_C)$ et $f'(x_E)$

$\rightarrow$ toute droite parallèle à l'axe (Ox) a le réel 0 pour coefficient directeur .

Donc : $f'(x_C)=f'(x_E)=0$ avec : $x_C=-2.5=-\dfrac{5}{2}$ et $x_E=2$. D'où : $f'(-\dfrac{5}{2})=f'(2)=0$.

$-\dfrac{5}{2}$ et 2 sont donc deux valeurs de réel a de l'intervalle $[-5,4]$ vérifiant $f'(a)=0$

2) $f'(-4)$? -4 est l'abscisse du point B de C_f et la droite tangente à C_f en B de coefficient directeur $f'(x_B)$ est : $T_B=(BI)$.

Donc : $f'(x_B)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_I-y_B}{x_I-x_B}$ soit : $f'(-4)=\dfrac{4-2.5}{-3-(-4)}=\dfrac{1.5}{1}=1.5=\dfrac{3}{2}$

3) valeur numérique de la limite suivante : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$

-5 est l'abscisse du point A de C_f et la demi-tangente à droite à C_f en A , de coefficient directeur $f'_d(x_A)$, est : $T_A=[AH)$.

Donc : $f'_d(x_A)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_H-y_A}{x_H-x_A}$ soit : $f'_d(-5)=\dfrac{3-0.5}{-4-(-5)}=\dfrac{2.5}{1}=2.5=\dfrac{5}{2}$.

D'autre part : $f'_d(-5)=\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$. Donc : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(-5+h)-f(-5)}{h}=\frac{5}{2}$.

4) valeur numérique de la limite suivante : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{2f(4+h)-9}{2h}$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{2f(4+h)-9}{2h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{\frac{2f(4+h)-9}{2}}{\frac{2h}{2}}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(4+h)-\frac{9}{2}}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\text{ car : } f(4)=\frac{9}{2}$$

4 est l'abscisse du point G de C_f et la demi tangente à gauche à C_f en G , de coefficient directeur $f'_g(x_G)$, est : $T_G=[GL)$.

Donc : $f'_g(x_G)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_G-y_L}{x_G-x_L}$ soit : $f'_g(4)=\dfrac{4.5-(-1.5)}{4-(3)}=\dfrac{6}{1}=6$.

D'autre part : $f'_g(4)=\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$. Donc : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=6$.

Avec : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{2f(4+h)-9}{2h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ on déduit ensuite : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{2f(4+h)-9}{2h}=6$.

5) valeurs de $f(3)$ et $f'(3)$ 3 est l'abscisse du point F de C_f donc : $f(3)=f(x_F)=y_F=0.5=\dfrac{1}{2}$

La droite tangente à C_f en F , de coefficient directeur $f'(x_F)$, est : $T_F=(FK)$. Donc : $f'(x_F)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_K-y_F}{x_K-x_F}$

soit : $f'(3)=\dfrac{2.75-0.5}{4-3}=\dfrac{2.25}{1}=2.25=\dfrac{9}{4}$

une équation de la droite tangente T_F à C_f en son point F est : $y=f(x_F)+f'(x_F)[x-x_F]$ avec $x_F=3$.

Donc $T_F : y=f(3)+f'(3)[x-3]$ avec $f(3)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(3)=\dfrac{9}{4}$.

$T_F : y=f(3)+f'(3)[x-3]$ devient alors : $T_F : y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{4}[x-3]$ soit $T_F : y=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{27}{4}+\dfrac{2}{4}$ soit $\boxed{T_F : y=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{25}{4}}$

6) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? 0 est l'abscisse du point D de C_f et C_f présente en D deux demi-tangentes T_g et T_d de coefficients directeurs respectifs $f'_g(x_D)$ et $f'_d(x_D)$. D'autre part :

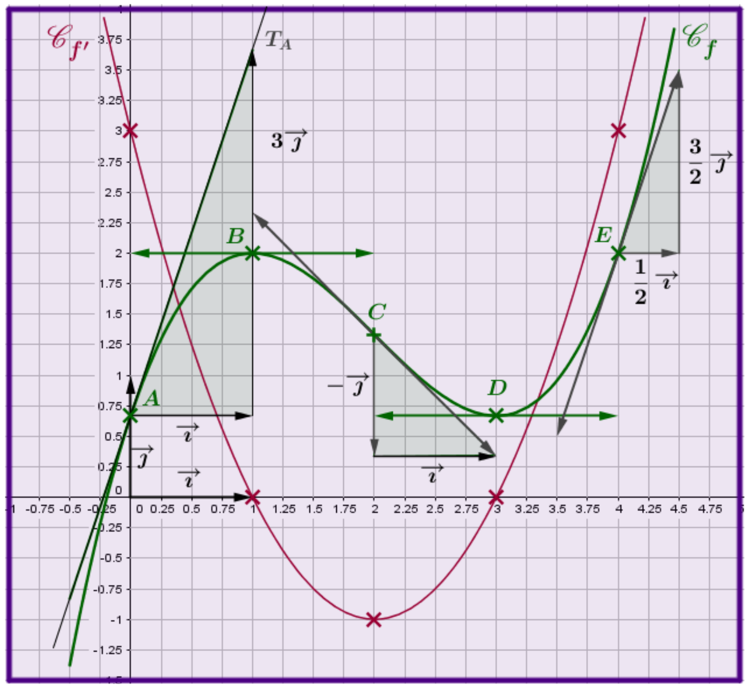
$\rightarrow T_d$, étant parallèle à l'axe (Ox) , son coefficient directeur vaut 0 . D'où : $f'_d(x_D)=0$ soit : $f'_d(0)=0$

$\rightarrow T_g=[DJ)$ donc : $f'_g(x_D)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_D-y_J}{x_D-x_J}$ soit : $f'_g(0)=\dfrac{0.5-(3)}{0-(-1)}=\dfrac{-2.5}{1}=-\dfrac{5}{2}$.

$f'_g(0)\neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 .

exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ (en vert) et la représentation graphique $C_{f'}$ de sa fonction dérivée f' .



1) 1-1 Graphiquement le nombre dérivé $f'(a)$ est l'ordonnée du point de la courbe $C_{f'}$ qui a pour abscisse le réel a

1-2 valeurs prises par $f'(x)$:

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$	3	0	-1	0	3

1-3 Tracer sur la figure les droites tangentes à C_f en chacun de ses points A , B , C , D , E .

2) 2-1 Pour déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$, il suffit d'examiner la position relative de la courbe $C_{f'} : y = f'(x)$ par rapport à l'axe $(Ox) : y = 0$

En effet : les points de $C_{f'}$ situés sur (Ox) ont une ordonnée $f'(x)$ nulle ; les points de $C_{f'}$ situés au dessus de (Ox) ont une ordonnée $f'(x)$ strictement positive ; les points de $C_{f'}$ situés en dessous de (Ox) ont une ordonnée $f'(x)$ strictement négative .

2-2 tableau de variation pour f

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	y_D	$\nearrow$	$+\infty$

exercice 4

La figure de la page 5 / 7 donne la représentation graphique C_f dans un plan muni d'un repère orthogonal d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 3x \text{ si et seulement si } x \text{ vérifie : } x \leq -2 \\ f(x) = f_2(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - 1 \text{ si et seulement si } x \text{ vérifie : } -2 \leq x \leq 4 \\ f(x) = f_3(x) = \dfrac{1}{2}x - 3 - \dfrac{16}{x} \text{ si et seulement si } x \text{ vérifie : } x \geq 4 \end{cases}$$

1) vérifier , par le calcul , que : $f_1(-2) = f_2(-2)$ et $f_2(4) = f_3(4)$

$f_1(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 + 3(-2) = -2 + 6 - 6 = -2$; $f_2(-2) = -\frac{1}{4}(-2)^2 - 1 = -1 - 1 = -2$; $f_1(-2) = f_2(-2)$ est vrai

$f_2(4) = -\frac{1}{4}(4)^2 - 1 = -4 - 1 = -5$; $f_3(4) = \frac{1}{2}(4) - 3 - \frac{16}{4} = 2 - 3 - 4 = -5$; $f_2(4) = f_3(4)$ est vrai

remarque : ces deux égalités montrent que f est définie et continue en -2 . En effet :

$f_1(-2) = f_2(-2) = -2$ donc l'image $f(2)$ existe , se calcule indifféremment avec $f_1(-2)$ ou $f_2(-2)$ et vaut -2

$\lim\limits_{-2^-} f = \lim\limits_{-2^-} f_1 = f_1(-2)$ car la fonction polynôme f_1 est continue sur $\mathbb{R}$. donc : $\lim\limits_{-2^-} f = -2$

$\lim\limits_{-2^+} f = \lim\limits_{-2^+} f_2 = f_2(-2)$ car la fonction polynôme f_2 est continue sur $\mathbb{R}$. donc : $\lim\limits_{-2^+} f = -2$

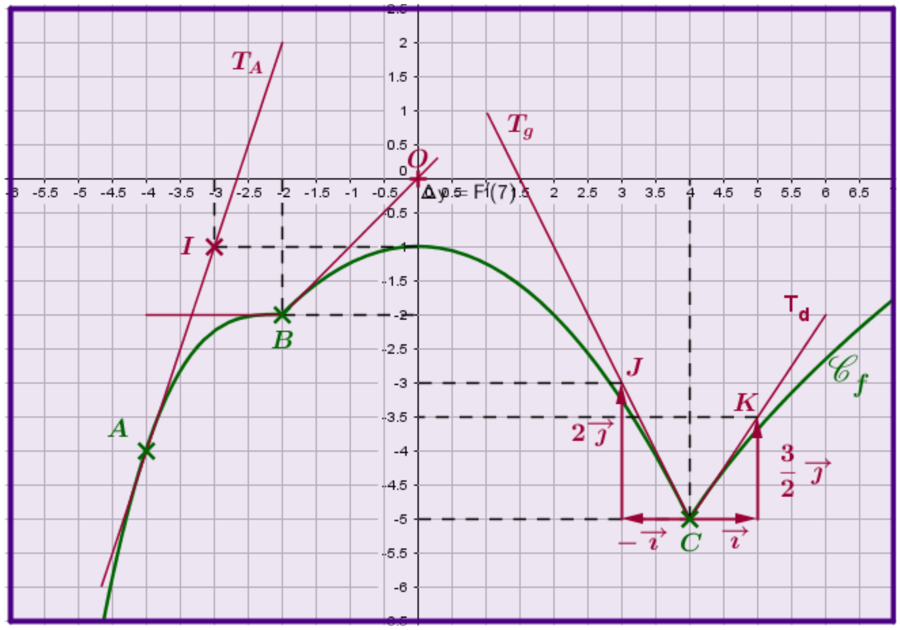
$\lim\limits_{-2^-} f = \lim\limits_{-2^+} f = f(-2) = -2$ vrai donc f est continue en -2

on utilise un raisonnement analogue pour justifier que f est définie et continue en 4 :

$f_2(4) = f_3(4) = -5 = f(4)$ et $\lim\limits_{4^-} f = \lim\limits_{4^-} f_2 = f_2(4) = -5$; $\lim\limits_{4^+} f = \lim\limits_{4^+} f_3 = f_3(4) = -5$

2) coefficient directeur de la droite T_A

Le coefficient directeur de la droite tangente à C_f en son point A vaut $f'(x_A)$.



2-1 valeur de $f'(x_A)$ en utilisant le graphique

La droite tangente à C_f en son point A est $T_A = (AI)$ avec $A\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

$f'(x_A)$ est donc défini par :

$f'(x_A) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_I - y_A}{x_I - x_A}$ avec $x_A = -4$

Donc : $f'(-4) = \dfrac{-1-(-4)}{-3-(-4)} = \dfrac{3}{1} = 3$

2-2 valeur de $f'(x_A)$en utilisant $f'(x)$

Avec $x \leq -2$ on a :

$f(x) = f_1(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 3x$

Comme fonction polynôme , f$_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) = \dfrac{1}{4}\left(3x^2\right) + \dfrac{3}{2}(2x) + 3(1) = \dfrac{3}{4}x^2 + 3x + 3$

$x_A = -4$ et $-4 < -2$ donc : $f'(x_A) = f'(-4) = f'_1(-4) = \dfrac{3}{4}(-4)^2 + 3(-4) + 3 = 12 - 12 + 3 = 3$

La droite tangente T_A a donc le réel 3 comme coefficient directeur .

3) $\rightarrow$ étude de dérivabilité en 4

$\boxed{\text{Avec } h < 0}$ h étant voisin de 0 , on peut supposer $-4 < h < 0$ d'où : $0 < 4 + h < 4$ et $f(4+h) = f_2(4+h) = -\dfrac{1}{4}(4+h)^2 - 1$

Donc : $f(4+h) = -\dfrac{1}{4}(h^2 + 8h + 16) - 1 = -\dfrac{1}{4}h^2 - 2h - 4 - 1 = -\dfrac{1}{4}h^2 - 2h - 5$

Et : $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{-\frac{1}{4}h^2 - 2h - 5 - (-5)}{h} = \dfrac{-\frac{1}{4}h^2 - 2h}{h} = \dfrac{h\left(-\frac{1}{4}h - 2\right)}{h} = -\dfrac{1}{4}h - 2$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \left(-\dfrac{1}{4}h - 2\right) = -\dfrac{1}{4}(0) - 2 = -2$

f est donc dérivable à gauche de 4 et : $f'_g(4) = -2$

$\boxed{\text{Avec } h > 0}$ on a : $4 + h > 4$ et $f(4+h) = f_3(4+h) = \dfrac{1}{2}(4+h) - 3 - \dfrac{16}{4+h} = \dfrac{1}{2}h - 1 - \dfrac{16}{4+h}$

D'où : $f(4+h) - f(4) = \dfrac{1}{2}h - 1 - \dfrac{16}{4+h} - (-5) = \dfrac{1}{2}h + 4 - \dfrac{16}{4+h} = \dfrac{h(h+4) + 8(4+h) - 32}{2(4+h)} = \dfrac{h^2 + 4h + 32 + 8h - 32}{2(4+h)}$

$f(4+h) - f(4) = \dfrac{h^2 + 12h}{2(4+h)} = \dfrac{h(h+12)}{8+2h}$. Et : $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{\frac{h(h+12)}{8+2h}}{h} = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{h(h+12)}{8+2h} = \dfrac{h+12}{8+2h}$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{h+12}{8+2h} = \dfrac{0+12}{8+2(0)} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

f est donc dérivable à droite de 4 et : $f'_d(4) = \dfrac{3}{2}$. $f'_g(4) = -2$ et $f'_d(4) = \dfrac{3}{2}$ donc $f'_g(4) \neq f'_d(4)$ et f n'est pas dérivable en 4

$\rightarrow$ interprétation graphique $\rightarrow f'_g(4) = -2$ donc pour $x < 4$: C_f admet en son point C une demi-tangente T_g de coefficient directeur $f'_g(4) = -2$ et dirigée par $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix}-1\\-f'_g(4)\end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. $\rightarrow f'_d(4) = \dfrac{3}{2}$ donc pour $x > 4$: C_f admet en son point C une demi-tangente T_d de coefficient directeur $f'_d(4) = \dfrac{3}{2}$ et dirigée par $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix}1\\f'_d(4)\end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

figure : on construit à partir de C le vecteur somme $-\vec{i} + 2\vec{j}$ égal à $\overrightarrow{u_g}$. En notant $\overrightarrow{u_g} = \overrightarrow{CJ} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ on a : $T_g = [CJ)$.

Puis on construit à partir de C le vecteur somme $\vec{i} + \dfrac{3}{2}\vec{j}$ égal à $\overrightarrow{u_d}$. En notant $\overrightarrow{u_g} = \overrightarrow{CK} = \vec{i} + \dfrac{3}{2}\vec{j}$ on a : $T_d = [CK)$.

Ces deux demi-tangentes étant de direction différentes ($f'_g(4) \neq f'_d(4)$) , le point C est appelé un point anguleux pour C_f .

4) étude de dérivabilité en -2 avec un point de vue graphique

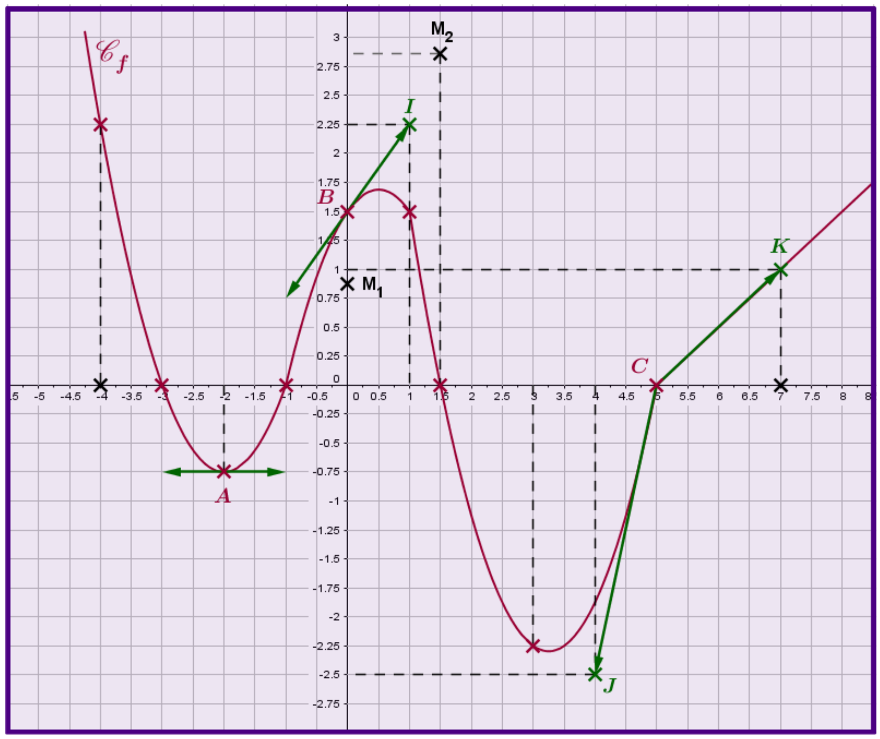
-2 est l'abscisse du point de C_f noté B . Graphiquement on observe : $\rightarrow$ C_f admet une demi-tangente à gauche en B qui est parallèle à l'axe (Ox) . Son coefficient directeur $f'_g(-2)$ est donc égal à 0 . Donc : $f'_g(-2) = 0$.

$\rightarrow$ C_f admet une demi-tangente à droite en B qui passe par l'origine O du repère . Son coefficient directeur $f'_d(-2)$ est donc égal à : $f'_d(-2) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_O}{x_B - x_O}$ avec $B\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Donc : $f'_d(-2) = \dfrac{-2-0}{-2-0}$ soit : $f'_d(-2) = 1$.

$f'_g(-2) \neq f'_d(-2)$ et f n'est pas dérivable en -2 . Le point B est aussi un point anguleux pour C_f .

exercice 5

1) On note A le point de C_f d'abscisse a . $f'(a)$ est le coefficient directeur de la droite T_A tangente à C_f en son point A ; $f'_d(a)$ est le coefficient directeur de la demi-tangente T_d à droite à C_f en A ; $f'_g(a)$ est le coefficient directeur de la demi-tangente T_g à gauche à C_f en A



point de vue graphique

$\boxed{f'(-2) = 0}$ $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la droite T_A tangente à C_f en son point A d'abscisse $\mathbf{-2}$. D'après le graphique , T_A est parallèle à (Ox) et admet le réel 0 comme coefficient directeur . Donc : $f'(-2) = 0$.

$\boxed{f'(0) = -\dfrac{1}{3}}$ $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite T_B tangente à C_f en son point B d'abscisse $\mathbf{0}$.

D'après le graphique : $T_B = (BI)$ avec : $B\begin{pmatrix}0\\1.5\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}1\\2.25\end{pmatrix}$. Donc : $f'(0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_I}{x_B - x_I} = \dfrac{1.5 - 2.25}{0-1} = \dfrac{-0.75}{-1} = 0.75 = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{f'_g(5) \text{ et } f'_d(5)}$ 5 est l'abscisse du point C de C_f . $f'_g(5)$ et $f'_d(5)$ sont les coefficients directeurs respectifs de la demi-tangente T_d à droite à C_f en C et de la demi-tangente T_g à gauche à C_f en C . D'autre part :

$\rightarrow$ $T_g = [CJ]$ avec : $C\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix}4\\-2.5\end{pmatrix}$. Donc : $f'_g(5) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_C - y_J}{x_C - x_J} = \dfrac{0-(-2.5)}{5-(4)} = \dfrac{2.5}{1} = \dfrac{5}{2}$

$\rightarrow$ $T_g = [CK]$ avec : $C\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$. Donc : $f'_g(5) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_C - y_K}{x_C - x_K} = \dfrac{0-(1)}{5-(7)} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

remarque : $f'_g(5) \neq f'_d(5)$ et f n'est pas dérivable en 5

2)

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0.5		1.5		3.25		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	−			0		+		0		−		0	+	
$f(x)$		↘			-2	↗			$\simeq 1.7$	↘			$\simeq -2.3$	↗			
$f'(x)$		−			0	+			0	−			0	+	$\frac{5}{2}$ ‖ $\frac{1}{2}$	+	

3 On associe à la fonction f une fonction notée F dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

Une telle fonction F est appelée une **primitive de** f . La notion de primitive d'une fonction s'étudie en Terminale .

Contrairement à la fonction dérivée d'une fonction qui est unique , une fonction f admet une infinité de primitives . Deux primitives d'une même fonction f diffèrent d'une constante : avec G définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + k$ (k réel quelconque) on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ et donc : G est une autre primitive de f .

3-1 Comment déterminer graphiquement le nombre dérivé $F'(a)$? $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$ donc : $F'(a) = f(a)$. $F'(a)$ est donc l'ordonnée $f(a)$ du point de C_f d'abscisse a .

D'où le tableau suivant de valeurs de $F'(x)$.

x	-4	-3	-2	-1	1.5	3	5	7
$F'(x) = f(x)$	2.25	0	-0.75	0	0	-2.25	0	1

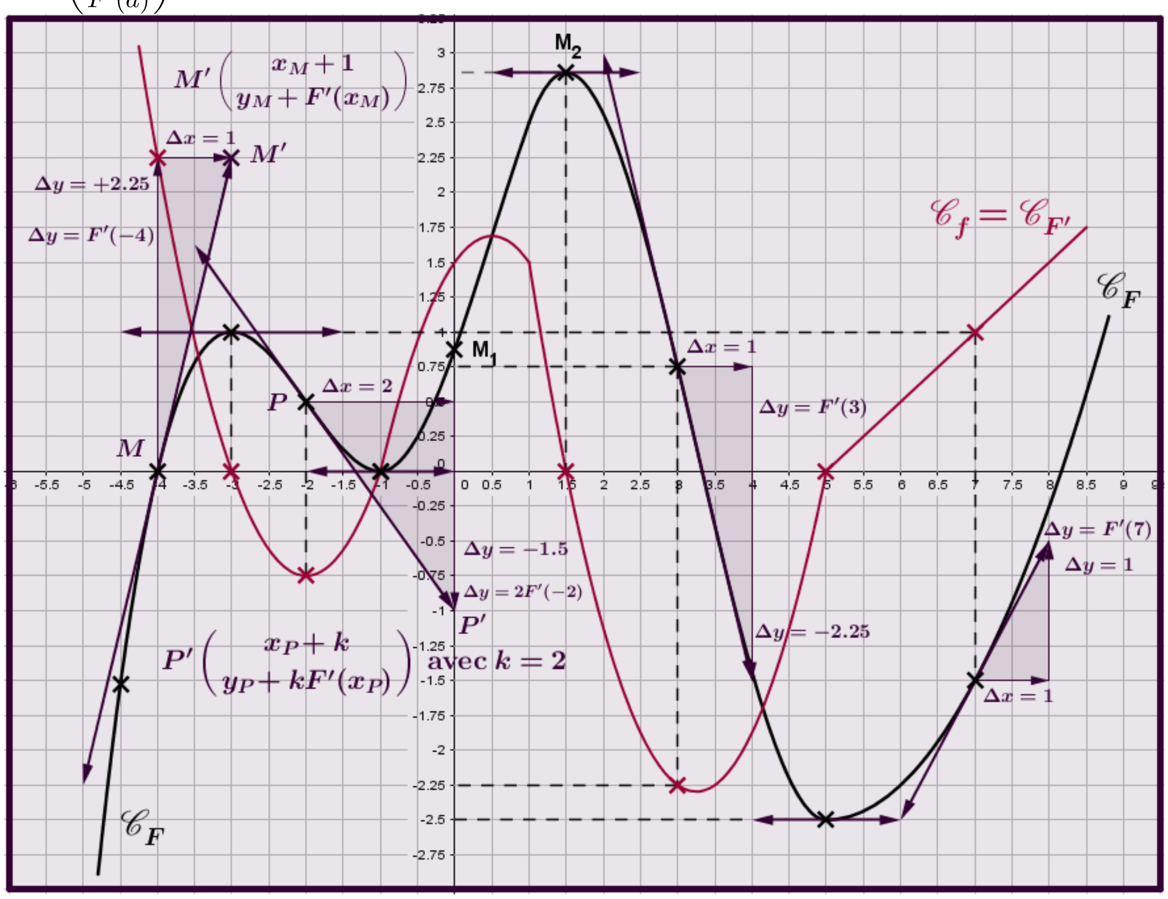
3-2 valeurs prisespar F

x	-4	-3	-2	-1	0	1.5	3	5	7
$F(x)$	0	1	0.5	0	y_{M_1}	y_{M_2}	0.75	-2.5	1

En utilisant les résultats des questions précédentes , dresser le tableau des variations pour F .

x	$-\infty$		-3		-1		1.5		5		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	y_{M_2}	$\searrow$	-2.5	$\nearrow$	

3-3 Que représente $F'(a)$ pour la courbe C_F ? $F'(a)$ est le coefficient directeur de la droite T_M tangente à C_f en son point M d'abscisse a . T_M est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\F'(a)\end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + F'(a)\overrightarrow{j}$ soit par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + f(a)\overrightarrow{j}$ (car : $F'(a) = f(a)$) .



D'après la question 3-1 : $\rightarrow F'(-3) = F'(-1) = 0$ et $F'(1.5) = F'(5) = 0$. Donc en chacun de ses points d'abscisse -3 , -1 , 1.5 , 5 la courbe C_F admet une droite parallèle à (Ox)

$\rightarrow F'(-4) = 2.25$; $F'(-2) = -0.75$; $F'(3) = -2.25$; $F'(7) = 1$. Donc en chacun de ses points d'abscisse -4 , -2 , 3 et 7 la courbe C_F admet une droite tangente de coefficient directeur égal respectivement égal à 2.25 , -0.75 , -2.25 , 1 et dirigée respectivement par $\overrightarrow{i} + 2.25\overrightarrow{j} = 2.25\overrightarrow{j} + \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{i} - 0.75\overrightarrow{j}$ et $2(\overrightarrow{i} - 0.75\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{i} - 1.5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i} - 2.25\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. D'où la figure ci-dessus .