Dérivabilité - Point de vue graphique - énoncé

En préalable : des outils pour les lectures graphiques de nombre dérivés

1) compléter le tableau suivant : (f fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un réel noté a)

le nombre dérivé qui existe	ce qu'il représente en termes de limite pour la fonction f	ce qu'il représente pour la courbe C_f représentant la fonction f
$f'(a)$		
$f'_d(a)$		
$f'_g(a)$		

Quel est le lien entre les trois nombres dérivés $f'(a)$, $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$?

2) Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On suppose que C_f possède une droite tangente T en un point A d'abscisse a .

2-1 Quel est son coefficient directeur ?

2-2 En connaissant un deuxième point B de la droite tangente T comment peut-on calculer le nombre dérivé $f'(a)$?

2-3 Quelles sont les coordonnées du vecteur directeur de T qui a pour première coordonnée

$\rightarrow$ le réel 1 ? : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ \ \end{pmatrix}$; $\rightarrow$ le réel -1 ? : $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -1 \\ \ \end{pmatrix}$; $\rightarrow$ le réel 3 ? : $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 3 \\ \ \end{pmatrix}$; $\rightarrow$ le réel -2 ? : $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix} -2 \\ \ \end{pmatrix}$

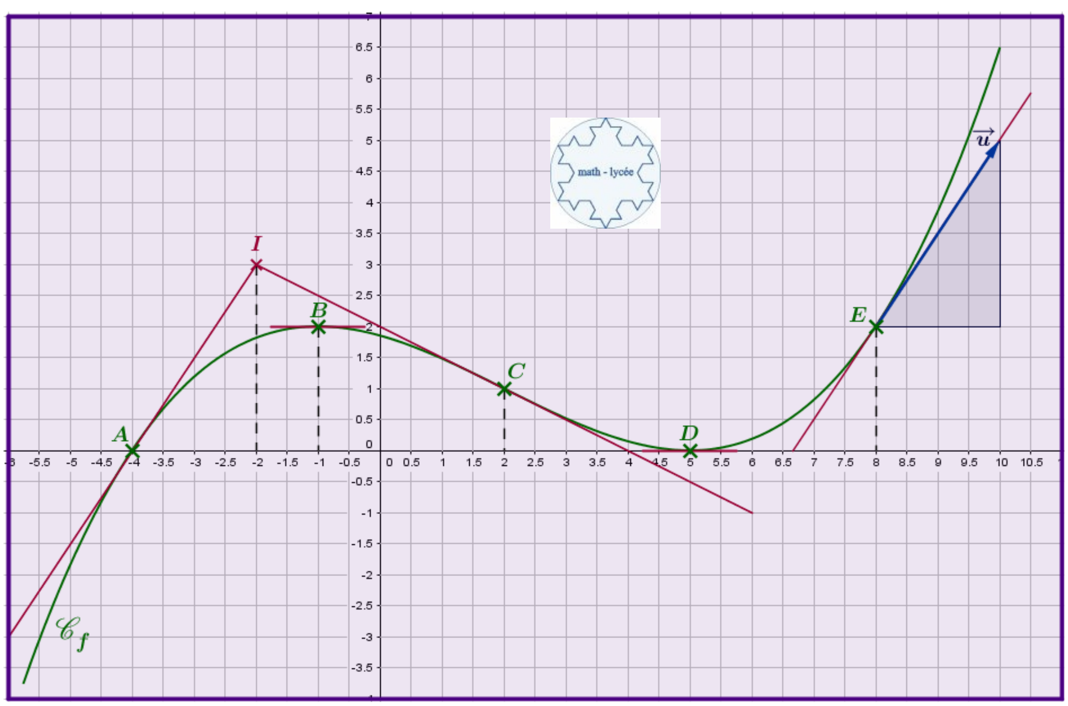
Ecrire ensuite chacun de ces vecteurs comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$:

$\overrightarrow{u_1} =$; $\overrightarrow{u_2} =$; $\overrightarrow{u_3} =$; $\overrightarrow{u_4} =$

2-4 En déduire une deuxième méthode permettant graphiquement de donner la valeur numérique de $f'(a)$ en utilisant un des vecteurs directeurs de T

exercice 1

La figure ci-contre donne , dans un plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la représentation graphique C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La figure met aussi en évidence les droites tangentes à C_f en chacun de ses points A , B , C , D , E .

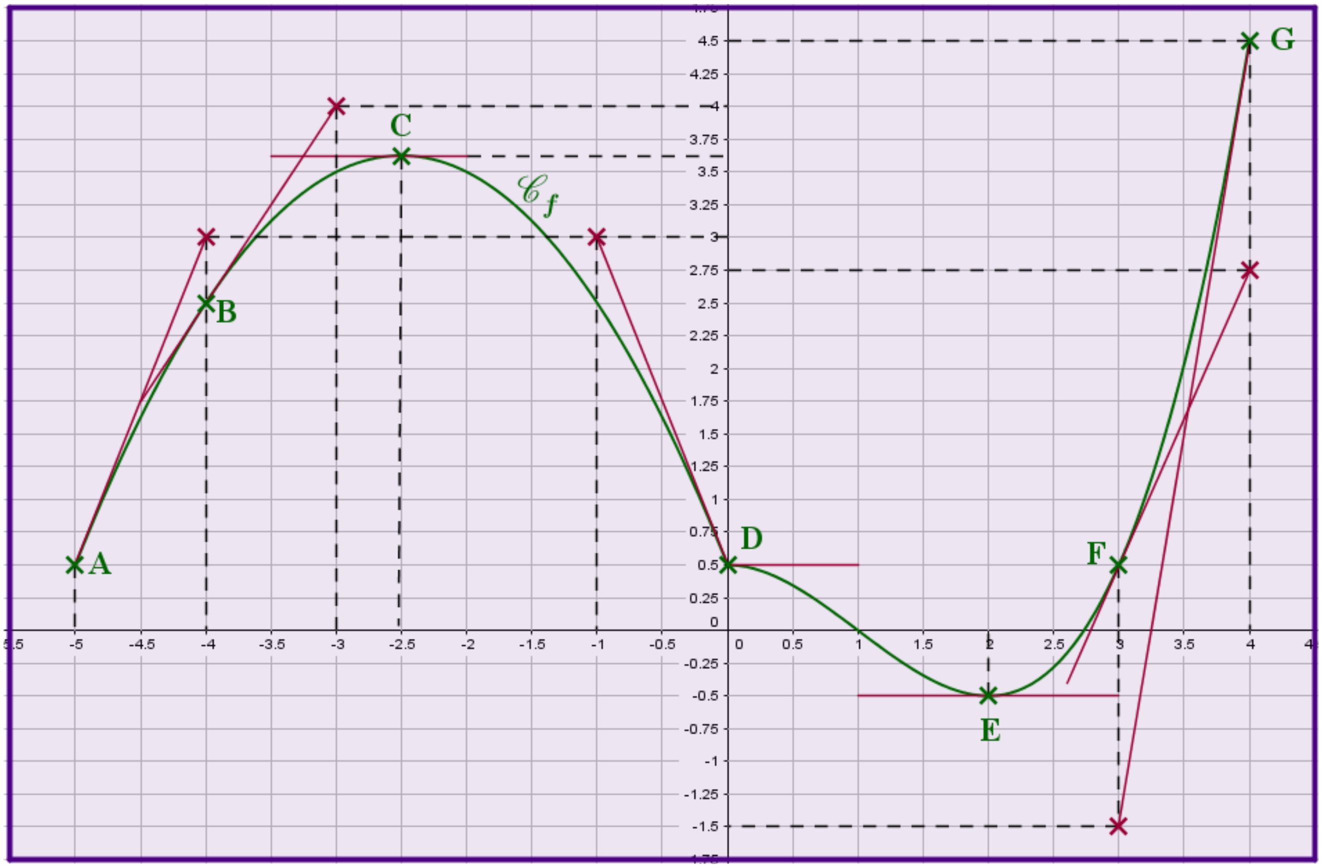


1) Justifier : $f'(-1) = f'(5) = 0$.

2) En utilisant le point I , préciser les valeurs numériques respectives de $f'(-4)$ et $f'(2)$.

3) En utilisant le vecteur $\overrightarrow{u}$, préciser la valeur de $f'(8)$.

exercice 2 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5, 4]$ et met en évidence des droites tangentes à C_f (en chacun de ses points B , C , E , F) et des demi-tangentes à C_f (en chacun de ses points A , D , G) .



Répondre de manière graphique (en complétant la figure et en justifiant votre réponse) aux questions suivantes :

1) Peut-on trouver deux valeurs de réel a vérifiant : $a \in [-5, 4]$ et $f'(a) = 0$?

2) Que vaut $f'(-4)$?

3) En utilisant la demi-tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse A (pour $x > -5$) préciser la valeur numérique de la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(-5+h) - f(-5)}{h} =$

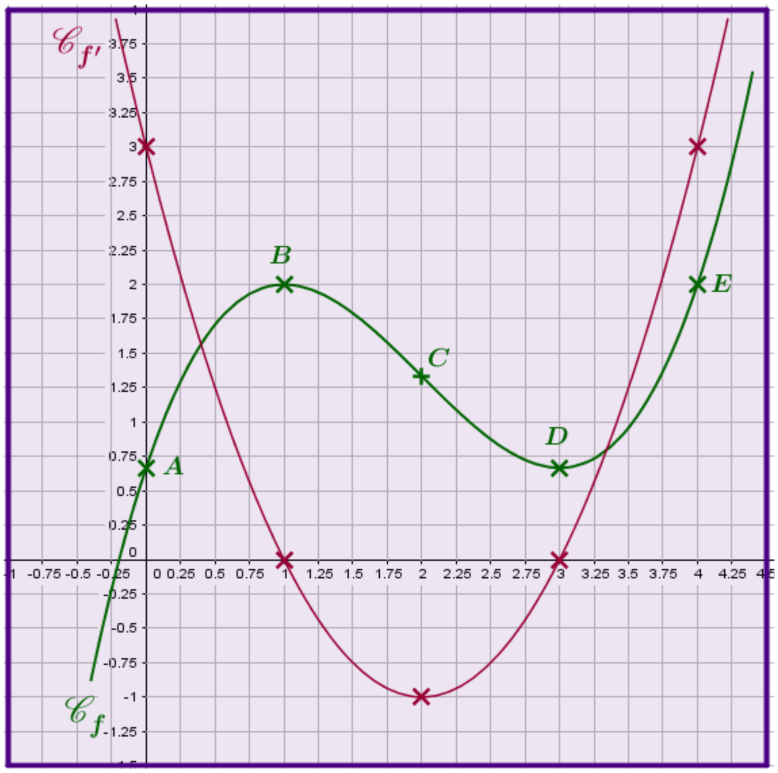
4) En utilisant la demi-tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse G (pour $x < 4$) préciser la valeur numérique de la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{2f(4+h) - 9}{2h} =$

5) Déterminer $f(3)$ puis $f'(3)$ puis écrire une équation de la droite tangente à C_f en son point F d'abscisse 3

6) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ (en vert) et la représentation graphique $C_{f'}$ de sa fonction dérivée f' .



1) 1-1 Pour un réel a donné , comment peut-on déterminer graphiquement le nombre dérivé $f'(a)$?

1-2 Par lecture graphique compléter le tableau suivant

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$					

1-3 Tracer sur la figure les droites tangentes à C_f en chacun de ses points A , B , C , D , E .

2) 2-1 Comment peut-on déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$?

2-2 Graphiquement , compléter le tableau de variation pour f

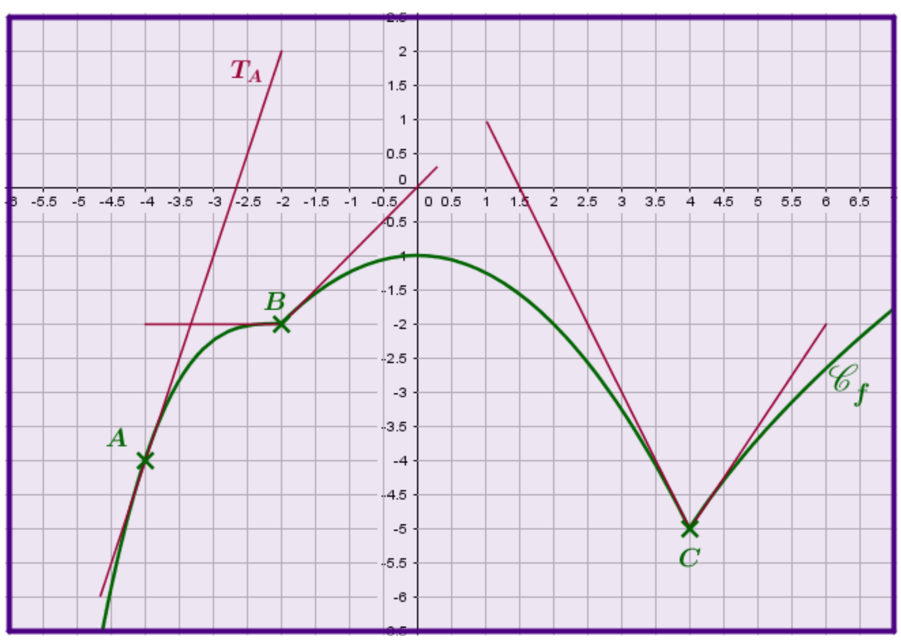
x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

exercice 4

La figure donne la représentation graphique C_f dans un plan muni d'un repère orthonormal d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = f_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x$ si et seulement si x vérifie : $x \leq -2$; $f(x) = f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$ si et seulement si x vérifie : $-2 \leq x \leq 4$; $f(x) = f_3(x) = \frac{1}{2}x - 3 - \frac{16}{x}$ si et seulement si x vérifie : $x \geq 4$

1) vérifier , par le calcul ,que :

$f_1(-2) = f_2(-2)$ et $f_2(4) = f_3(4)$



2) 2-1 En utilisant un point de vue graphique trouver le coefficient directeur de la droite T_A tangente à C_f en son point A

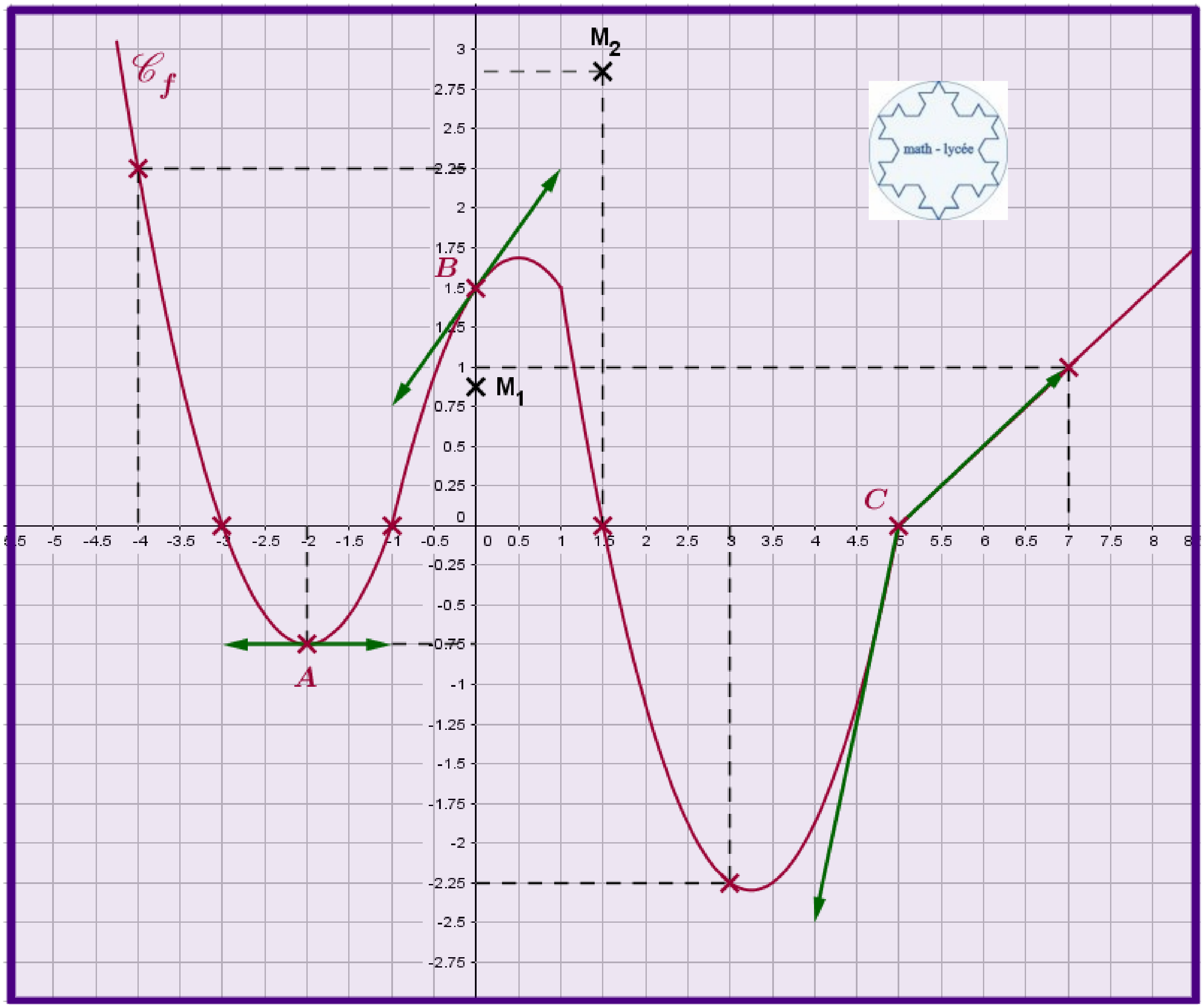
2-2 Retrouver ce résultat algébriquement en utilisant $f'(x)$

3) h étant un réel non nul , calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

Interpréter graphiquement les résultats trouvés et construire sur la figure les éléments graphiques donnés lors de cette interprétation

4) En utilisant un point de vue graphique , justifier que f n'est pas dérivable en -2

exercice 5 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



La figure met en évidence deux points M_1 et M_2 et la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ avec ses droites tangentes respectivement en A et en B et ses deux demi-tangentes en C .

1) Que représente les nombres dérivés $f\,'(a)$ $f\,'_g(a)$; $f\,'_d(a)$ pour la courbe C_f ? Déterminer , par lecture graphique , les valeurs des nombres dérivés suivants : $f\,'(-2)$; $f\,'(0)$; $f\,'_g(5)$; $f\,'_d(5)$

2) Sans justifier , compléter par lecture graphique , le tableau suivant qui donne , selon les valeurs de x , le signe de $f(x)$ puis les variations de f puis le signe de $f\,'(x)$ que l'on peut alors déduire .

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0.5		1.5		3.25		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0		−		0		+		0		−		0	+	
$f(x)$		↘				↗			$\simeq 1.7$	↘			$\simeq -2.3$	↗			
$f'(x)$					0										‖		

3) On associe à la fonction f une fonction notée F dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

3-1 Comment déterminer graphiquement le nombre dérivé $F'(a)$?

Compléter le tableau suivant de valeurs de $F'(x)$.

x	-4	-3	-2	-1	1.5	3	5	7
$F'(x)$								

3-2 On admet que F prend les valeurs indiquées dans ce tableau :

x	-4	-3	-2	-1	0	1.5	3	5	7
$F(x)$	0	1	0.5	0	y_{M_1}	y_{M_2}	0.75	-2.5	-1.5

En utilisant les résultats des questions précédentes , dresser le tableau des variations pour F .

x	
$F'(x)$	
$F(x)$	

3-3 Que représente $F'(a)$ pour la courbe C_F ?

Sur la figure ci-dessous tracer les droites tangentes à la courbe C_F représentative de la fonction F associées au tableau complété en **3-1 .** Proposer ensuite une allure pour la courbe C_F qui soit compatible avec le tableau de variation de F .