Des outils pour calculer des dérivées

tableau n°1 : fonction dérivée d'une fonction usuelle

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans le tableau suivant on donne l'expression de $f(x)$, l'ensemble de définition de f (noté D_f) , l'ensemble de dérivabilité D' de f ($D' \subseteq D_f$) , l'expression de $f\,'(x)$ pour x élément de D'

$f(x) =$	$D_f =$	$D' =$	$f'(x) =$
k $(constante)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$ $(a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
$x^{\mathbf{n}}$ $(n \in \mathbb{R} - \{0\})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbf{n}x^{\mathbf{n-1}}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $-\mathbf{n}$ $\in \mathbb{Z} - \mathbb{N})$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = -\mathbf{n}x^{-\mathbf{n}-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$	$]0, +\infty[= \mathbb{R}^+ - \{0\}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ \cos x \neq 0\}$	$\mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin\ (ax+b)$ $(a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a \times \cos\ (ax+b)$
$\cos\ (ax+b)$ $(a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a \times \sin\ (ax+b)$
$f(x) = g(ax+b)$	$D_g = D_f$	$D_{g'} = D_{f\,'}$	$f\,'(x) = a \times g'(ax+b)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
lnx	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$

tableau n°2 : dérivées et opérations sur les fonctions

u et v désignent deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont on connaît les fonctions dérivées u' et v'.

On demande la fonction dérivée d'une fonction f associée à u ou bien à u et v

fonction f	$D_f =$	conditions de dérivabilité pour x_0	fonction dérivée f' de f
$f = u + v$	$D_u \cap D_v$	u et v dérivables en x_0	$f\ ' = (u+v)' = u' + v'$
$f = ku$ (k *réel non nul*)	D_u	u dérivable en x_0	$f\ ' = (ku)' = k \times u'$
$f = uv$	$D_u \cap D_v$	u et v dérivables en x_0	$f\ ' = (uv)' = uv' + u'v$
$f = \frac{u}{v}$	$\{x \in D_u \cap D_v \ / \ v(x) \neq 0\}$	u et v dérivables en x_0 et $v(x_0) \neq 0$	$f\ ' = (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$f = \frac{1}{v}$	$\{x \in D_v \ / \ v(x) \neq 0\}$	v dérivable en x_0 et $v(x_0) \neq 0$	$f\ ' = (\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
$f = u^n$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)	D_u	u dérivable en x_0	$f\ ' = (u^n)' = nu^{n-1} \times u'$
$f = \sqrt{u}$	$\{x \in D_u \ / \ u(x) \geq 0\}$	u dérivable en x_0 et $u(x_0) > 0$	$f\ ' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f = e^u$	D_u	u dérivable en x_0	$f\ ' = (e^u)' = u'e^u$
$f = ln(u)$	$\{x \in D_u \ / \ u(x) > 0\}$	u dérivable en x_0 et $u(x_0) > 0$	$f\ ' = (ln(u))' = \frac{u'}{u}$
$f = vou$	$\{x \in D_u \ / \ u(x) \in D_v\}$	u dérivable en x_0 et v dérivable en $u(x_0)$	$f\ ' = (vou)' = (v'ou) \times u'$

deux théorèmes :

- **toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$**
- **toute fonction rationnelle est dérivable en tout réel de son ensemble de définition**