Dérivées - DS 2h - corrigé

exercice 1 ensembles de dérivabilité D' pour une fonction polynôme et pour une fonction rationnelle .

Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$. Une fonction rationnelle est dérivable en tout réel de son ensemble de définition .

on donne $f(x)$ et D' , on demande de calculer $f\,'(x)$

1) $f(x) = -\frac{5}{6}x^9 - \frac{2}{21}x^7 - \frac{3}{8}x^4 + x^2\sqrt{3} - 4x + 1$ On a : $D' = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme . D'autre part :

pour tout x réel , $f\,'(x) = -\frac{5}{6}\left(9x^8\right) - \frac{2}{21}\left(7x^6\right) - \frac{3}{8}\left(4x^3\right) + (2x)\sqrt{3} - 4(1) + (0)$ soit : $\boxed{f\,'(x) = -\frac{15}{2}x^8 - \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^3 + 2\sqrt{3}x - 4}$

2) $f(x) = (3x-2)^4(2x^2+5x)^3$ On a : $D' = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme . D'autre part :

$f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = (3x-2)^4 \text{ donc : } u'(x) = 12(3x-2)^3 \\ v(x) = (2x^2+5x)^3 \text{ donc : } v'(x) = 3(2x^2+5x)^2(4x+5) \end{cases}$

calcul de $u'(x)$ On a : $u = a^4$ avec $a(x) = 3x-2$ et $a'(x) = 3$. Or : $(u)' = \left(a^4\right)' = 4a^3 \times a'$. Donc :

$u'(x) = 4(3x-2)^3 \times 3 = 12(3x-2)^3$

calcul de $v'(x)$ On a : $v = b^3$ avec $b(x) = 2x^2+5x$ et $b'(x) = 4x+5$. Or : $(v)' = \left(b^3\right)' = 3b^2 \times b'$. Donc :

$v'(x) = 3(2x^2+5x)^2(4x+5)$

déduction de $f\,'(x)$ On a : $f\,' = (uv)' = u'v + uv'$. Donc :

$f\,'(x) = 12(3x-2)^3(2x^2+5x)^3 + 3(2x^2+5x)^2(4x+5)(3x-2)^4 = (3x-2)^3(2x^2+5x)^2 \times [12(2x^2+5x) + 3(4x+5)(3x-2)]$

$f\,'(x) = (3x-2)^3(2x^2+5x)^2 \times [24x^2 + 60x + 3(12x^2+7x-10)] = (3x-2)^3\left[x(2x+5)\right]^2 \times [60x^2+81x-30]$

$f\,'(x) = (3x-2)^3 \times x^2(2x+5)^2 \times [3(20x^2+27x-10)]$ soit : $\boxed{f\,'(x) = 3x^2(3x-2)^3(2x+5)^2[27x+20x^2-10]}$

3) $f(x) = -3x^2 - \frac{2}{(4-5x)^2}$ On a : $D' = D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}\right\}$ car f est une fonction rationnelle .

On a : $f = u - \frac{2}{v} = u - 2 \times \frac{1}{v}$ avec : $\begin{cases} u(x) = -3x^2 \text{ et } u'(x) = -3(2x) = -6x \\ v(x) = (4-5x)^2 = 25x^2 - 40x + 16 \text{ et } v'(x) = 50x - 40 = -10(4-5x) \end{cases}$.

Or : $(f)' = \left(u - 2 \times \frac{1}{v}\right)' = u' - 2 \times \left(\frac{1}{v}\right)' = u' - 2 \times \left(\frac{-v'}{v^2}\right) = u' + \frac{2v'}{v^2}$. Donc :

$f\,'(x) = -6x + \frac{2\left[-10(4-5x)\right]}{\left[(4-5x)^2\right]^2} = -6x - \frac{20(4-5x)}{(4-5x)^4}$ soit : $\boxed{f\,'(x) = -6x - \frac{20}{(4-5x)^3}}$

4) $f(x) = \frac{2x^2-4x+3}{(2x+4)(3x-2)}$ On a : $D' = D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}, -2\right\}$ car f est une fonction rationnelle .

On a : $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x^2 - 4x + 3 \text{ donc : } u'(x) = 2(2x) - 4(1) + 0 = 4x - 4 \\ v(x) = (2x+4)(3x-2) = 6x^2 + 8x - 8 \text{ donc : } v'(x) = 12x + 8 \end{cases}$ et : $f\,' = (\frac{\mathbf{u}}{v})' = \frac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$.

Donc : $f\,'(x) = \frac{(4x-4)(6x^2+8x-8) - (12x+8)(2x^2-4x+3)}{(6x^2+8x-8)^2} = \frac{\left(24x^3+8x^2-64x+32\right) - \left(24x^3-32x^2+4x+24\right)}{(6x^2+8x-8)^2}$

Puis : $f\,'(x) = \frac{40x^2-68x+8}{(6x^2+8x-8)^2} = \frac{4\left(10x^2-17x+2\right)}{\left[2 \times (3x^2+4x-4)\right]^2} = \frac{4\left(10x^2-17x+2\right)}{4(3x^2+4x-4)^2}$ soit : $\boxed{f\,'(x) = \frac{10x^2-17x+2}{(3x^2+4x-4)^2}}$

5) $f(x) = \left(\frac{1-4x}{3x+2}\right)^3$ On a : $D' = D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ car f est une fonction rationnelle .

On a : $f = w^3$ avec $w(x) = \frac{1-4x}{3x+2}$ et $w'(x) = \frac{-11}{(3x+2)^2}$.

calcul de $w'(x)$ On a : $w = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 - 4x \text{ donc : } u'(x) = -4 \\ v(x) = 3x + 2 \text{ donc : } v'(x) = 3 \end{cases}$ et : $w\,' = (\frac{\mathbf{u}}{v})' = \frac{\mathbf{u}'v - uv'}{v^2}$.

Donc : $w'(x) = \frac{-4(3x+2) - (3)(1-4x)}{(3x+2)^2} = \frac{-12x - 8 - 3 + 12x}{(3x+2)^2} = \frac{-11}{(3x+2)^2}$

déduction de $f\,'(x)$ On a : $f\,' = (w^3)' = 3w^2 \times w'$. Donc : $f\,'(x) = 3\left(\frac{1-4x}{3x+2}\right)^2 \times \left(\frac{-11}{(3x+2)^2}\right)$

$f\,'(x) = \frac{3(1-4x)^2 \times (-11)}{(3x+2)^2(3x+2)^2}$ soit : $\boxed{f\,'(x) = \frac{-33(1-4x)^2}{(3x+2)^4}}$

6) $f(x)=\dfrac{(2x+1)^3}{3x^2+4x-4}$ On a : $D'=D_f=\mathbb{R}-\left\{-2,\dfrac{2}{3}\right\}$ car f est une fonction rationnelle .

On a : $f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=(2x+1)^3 \text{ donc : } u'(x)=6(2x+1)^2 \\ v(x)=3x^2+4x-4 \text{ donc : } v'(x)=6x+4 \end{cases}$

calcul de $u'(x)$ On a : $u=w^3$ avec $w(x)=2x+1$ et $w'(x)=2$. Or : $(u)'=\left(w^3\right)'=3w^2\times w'$.

Donc : $u'(x)=3(2x+1)^2\times 2=6(2x+1)^2$

déduction de $f'(x)$ On a : $f'=(\dfrac{\mathbf{u}}{v})'=\dfrac{\mathbf{u}'v-uv'}{v^2}$. Donc : $f'(x)=\dfrac{6(2x+1)^2\left(3x^2+4x-4\right)-(6x+4)(2x+1)^3}{\left(3x^2+4x-4\right)^2}$

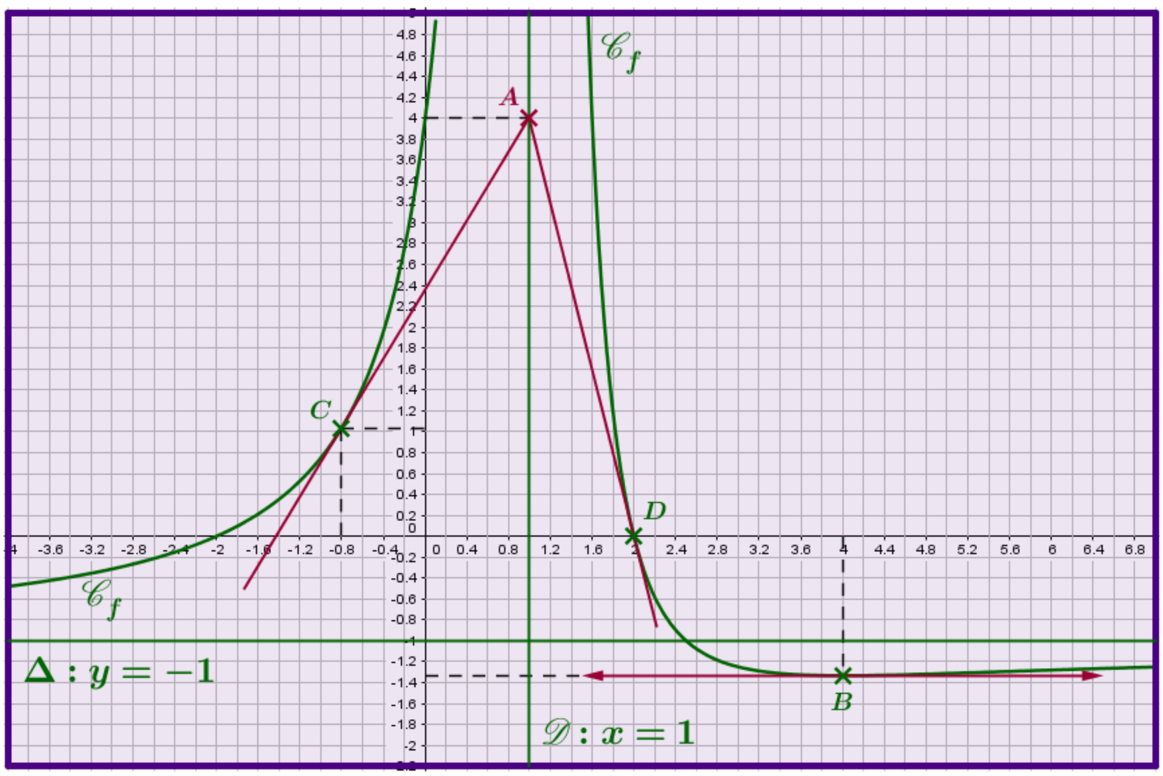
$$f'(x)=\frac{(2x+1)^2\left[6\left(3x^2+4x-4\right)-(6x+4)(2x+1)\right]}{\left(3x^2+4x-4\right)^2}=\frac{(2x+1)^2\left[\left(18x^2+24x-24\right)-\left(12x^2+14x+4\right)\right]}{\left(3x^2+4x-4\right)^2}$$

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)^2\left(6x^2+10x-28\right)}{\left(3x^2+4x-4\right)^2}$ soit : $\boxed{f'(x)=\dfrac{2(2x+1)^2\left(3x^2+5x-14\right)}{\left(3x^2+4x-4\right)^2}}$

exercice 2

On considère la fonction suivante $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x)=\dfrac{4-x^2}{(x-1)^2}$

La figure suivante donne la représentation graphique C_f dans un plan muni d'un repère orthonormal . C_f possède deux droites asymptotes : $D : x=1$ *et* $\Delta : y=-1$.



1) ensemble D' de dérivabilité de f Comme fonction rationnelle , f est dérivable en tout réel x de D_f .

D'autre part , pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Donc : $\boxed{D'=D_f=\mathbb{R}-\{1\}}$

calcul de $f'(x)$ avec x élément de D'

On a : $f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=4-x^2 \text{ donc : } u'(x)=-2x \\ v(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1 \text{ donc : } v'(x)=2x-2=2(x-1) \end{cases}$ et : $f'=(\dfrac{\mathbf{u}}{v})'=\dfrac{\mathbf{u}'v-uv'}{v^2}$.

Donc : $f'(x)=\dfrac{-2x(x-1)^2-2(x-1)(4-x^2)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\dfrac{(x-1)\left[-2x(x-1)-2(4-x^2)\right]}{(x-1)^4}=\dfrac{\left[-2x^2+2x-8+2x^2\right]}{(x-1)^3}$

Puis : $f'(x)=\dfrac{2x-8}{(x-1)^3}$. Ainsi : $\boxed{\forall x\in D' \text{ , } f'(x)=\dfrac{2(x-4)}{(x-1)^3}}$

2) Une droite parallèle à l'axe (Ox) a le réel 0 pour coefficient directeur . Avec f dérivable en a , la courbe C_f admet en son point d'abscisse a une droite tangente de coefficient directeur $f'(a)$. Par conséquent : C_f possède une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) si et seulement si on peut trouver un réel a tel que f soit dérivable en a et que $f'(a) = 0$.

D'autre part : $D' = D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $\forall x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{2(x-4)}{(x-1)^3}$

Donc : $\rightarrow$ f est dérivable en a si et seulement si : $a \neq 1$

$\rightarrow$ Avec $a \neq 1$, $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(a-4)}{(a-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2(a-4) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. 4 convient comme valeur de a car : $4 \neq 1$.

Ainsi : C_f possède une seule droite tangente parallèle à l'axe (Ox) : en son point B d'abscisse 4 .

3) Avec f dérivable en a , la courbe C_f admet en son point d'abscisse a une droite tangente T dont une équation est : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. D'autre part : avec $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $A \in T \Leftrightarrow y_A = f(a) + f'(a)(x_A - a) \Leftrightarrow 4 = f(a) + f'(a)(1-a)$

Or : $f(x) = \dfrac{4-x^2}{(x-1)^2}$ et $f'(x) = \dfrac{2(x-4)}{(x-1)^3}$. Par conséquent , pour tout réel a élément de D' (soit $a \neq 1$) :

$4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow 4 = \dfrac{4-a^2}{(a-1)^2} + \dfrac{2(a-4)}{(a-1)^3}(1-a) \Leftrightarrow 4 = \dfrac{4-a^2}{(a-1)^2} + \dfrac{2(a-4)}{(a-1)^3} \times -(a-1)$

$4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow 4 = \dfrac{4-a^2}{(a-1)^2} + \dfrac{2(a-4)}{(a-1)^2} \times -1 \Leftrightarrow 4 = \dfrac{4-a^2}{(a-1)^2} - \dfrac{2(a-4)}{(a-1)^2}$

$4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow 4 = \dfrac{(4-a^2) - 2(a-4)}{(a-1)^2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{4 - a^2 - 2a + 8)}{(a-1)^2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{-a^2 - 2a + 12}{(a-1)^2}$

$4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow 4(a-1)^2 = -a^2 - 2a + 12$ ($(a-1)^2 \neq 0$ car : $a \neq 1$) .

$4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow 4(a^2 - 2a + 1) = -a^2 - 2a + 12 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 4 + a^2 + 2a - 12 = 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 8 = 0$

2 est une racine de $5a^2 - 6a - 8$ car : $5\,(2)^2 - 6\,(2) - 8 = 20 - 12 - 8 = 0$. Donc $5a^2 - 6a - 8$ est factorisable par $a - 2$.

Pour tout réel a , $5a^2 - 6a - 8 = (a-2)\,(5a+4)$ donc : $5a^2 - 6a - 8 = 0 \Leftrightarrow (a-2)\,(5a+4) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -\dfrac{4}{5}$

par conséquent : $4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow 5a^2 - 6a - 8 = 0$ devient : $4 = f(a) + f'(a)(1-a) \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -\dfrac{4}{5}$.

2 et $-\dfrac{4}{5}$ sont distincts de 1 et conviennent comme valeurs pour a tel que : $4 = f(a) + f'(a)(1-a)$

Ainsi : C_f possède deux droites tangentes contenant $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$: en chacun de ses points C et D d'abscisses $-\dfrac{4}{5}$ et 2 .

figure : ces deux droites tangentes sont les droites (AC) et (AD) car elles contiennent A et passent respectivement par C et D .

exercice 3

On considère la fonction suivante $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = |x|\sqrt{x+4}$

Toutes les droites tangentes ou les demi-tangentes associées aux différentes questions de cet exercice doivent être tracées sur la figure donnant la représentation graphique C_f de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1) ensemble D_f de définition de f $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x + 4$ sont définies sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Donc pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \Leftrightarrow x \in [-4, +\infty[$. Ainsi : $\boxed{D_f = [-4, +\infty[}$

$f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue On a : $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$ et $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ , } f(x) = x\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } f(x) = -x\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x \leq 0}$$

2) étude de dérivabilité de f en -4 Soit h un réel srictement positif et $T(h) = \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$.

$h > 0$ entraîne $-4 + h > -4$ et donc $-4 + h \in D_f$.

D'autre part : $f(-4+h) = |-4+h|\sqrt{(-4+h)+4} = |-4+h|\sqrt{h}$ et $f(-4) = |-4|\sqrt{-4+4} = 0$.

Donc : $T(h) = \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$ devient : $T(h) = \dfrac{|-4+h|\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{|-4+h|\sqrt{h}}{h} = |-4+h| \times \dfrac{\sqrt{h}}{h} = |-4+h| \times \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

D'où : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} |-4+h| \times \frac{1}{\sqrt{h}}$. Or : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0} |-4+h| = |-4+0| = |-4| = 4 \\ \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{h} = 0 \text{ et } h>0 \Rightarrow \sqrt{h}>0 \text{ donc : } \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \end{cases}$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $4>0$) :

$\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} |-4+h| \times \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ soit $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = +\infty$.

Cette limite étant infinie , la fonction f n'est pas dérivable en -4 .

conséquence géométrique : la courbe C_f admet en son point A d'abscisse -4 une droite tangente parallèle à l'axe (Oy) .

3) étude de dérivabilité de f en 0 Soit h un réel non nul tel que $h \in D_f$ et $T(h) = \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$.

$f(h) = |h|\sqrt{h+4}$; $f(0) = |0|\sqrt{0+4} = 0 \times 4 = 0$ donc : $T(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|\sqrt{h+4}-0}{h} = \dfrac{|h|\sqrt{h+4}}{h} = \dfrac{|h|}{h} \times \sqrt{h+4}$

étude à gauche de 0 : $\boxed{h<0 \text{ entraîne } |h| = -h}$

Donc : $T(h) = \dfrac{|h|}{h} \times \sqrt{h+4} = \dfrac{-h}{h} \times \sqrt{h+4} = -\sqrt{h+4}$

Puis $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} T(h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -\sqrt{h+4} = -\sqrt{0+4} = -2$

f est donc dérivable à gauche de 0 et : $f'_g(0) = -2$

conséquence : la courbe C_f admet en son point O d'abscisse 0 une demi-tangente T_g de coefficient directeur $f'_g(0) = -2$.

T_g est dirigée par $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_g(0) \end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

figure : à partir de l'origine O , on construit le vecteur somme $\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ égal à $\overrightarrow{u_g}$. Avec $\overrightarrow{u_g} = \overrightarrow{OG}$, la demi-tangente à construire est : $T_g = [OG)$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 .

étude à droite de 0 : $\boxed{h>0 \text{ entraîne } |h| = h}$

Donc : $T(h) = \dfrac{|h|}{h} \times \sqrt{h+4} = \dfrac{h}{h} \times \sqrt{h+4} = \sqrt{h+4}$

$\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} T(h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{h+4} = \sqrt{0+4} = 2$

f est donc dérivable à droite de 0 et : $f'_d(0) = 2$

conséquence : la courbe C_f admet en son point O d'abscisse 0 une demi-tangente T_d de coefficient directeur $f'_d(0) = 2$.

T_d est dirigée par $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(0) \end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

figure : à partir de l'origine O , on construit le vecteur somme $\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ égal à $\overrightarrow{u_d}$. Avec $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{OD}$, la demi-tangente à construire est : $T_d = [OD)$

4) Calcul de $f'(x)$ pour x strictement supérieur à -4 et distinct de 0

D'après la question **1)** $f(x) = x\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x \geq 0$ et $f(x) = -x\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x \leq 0$. D'après les questions **2)** et **3)** f n'est pas dérivable en -4 et en 0 . D'autre part : $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x+4}$ est dérivable en tout réel x tel que $x+4>0$ soit en tout réel x tel que $x>-4$. Donc $x \mapsto x\sqrt{x+4}$ et $x \mapsto -x\sqrt{x+4}$ sont dérivables en tout réel x strictement supérieur à -4 comme produit de fonctions elles-mêmes dérivables en tout réel x strictement supérieur à -4 .

Calcul de $f'(x)$ pour x strictement supérieur à 0 $f(x) = f_1(x) = x\sqrt{x+4}$ donc : $f_1 = u \times \sqrt{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = x+4 \text{ et } v'(x) = 1 \end{cases}$

Or : $(f_1)' = (u \times \sqrt{v}) = u' \times \sqrt{v} + u \times (\sqrt{v})' = u' \times \sqrt{v} + u \times \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$. Donc : $f'_1(x) = \left(1 \times \sqrt{x+4}\right) + \left(x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)$

$f'_1(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+4}} = \dfrac{\left(2\sqrt{x+4}\right)\sqrt{x+4}+x}{2\sqrt{x+4}} = \dfrac{2(x+4)+x}{2\sqrt{x+4}} = \dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$. D'où : $\boxed{f'(x) = \dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}} \text{ pour } x>0}$

Calcul de $f'(x)$ pour x strictement compris entre -4 et 0 avec $f(x) = -x\sqrt{x+4} = -f_1(x)$, on a : $f'(x) = -f'_1(x)$.

D'où : $\boxed{f'(x) = -\dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}} \text{ pour : } -4<x<0}$

5) Une droite parallèle à l'axe (Ox) a le réel 0 pour coefficient directeur . Avec f dérivable en a , la courbe C_f admet en son point d'abscisse a une droite tangente de coefficient directeur $f'(a)$. Par conséquent : C_f possède une droite tangente parallèle à l'axe (Ox) si et seulement si on peut trouver un réel a tel que f soit dérivable en a et que $f'(a) = 0$.

D'autre part : $f'(x) = -\dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$ pour $-4 < x < 0$ et $f'(x) = \dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$ pour $x > 0$

Donc : $f'(a) = 0 \Leftrightarrow (f'(a) = 0 \text{ et } -4 < a < 0) \text{ ou } (f'(a) = 0 \text{ et } a > 0)$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}} = 0 \text{ et } -4 < a < 0\right) \text{ ou } \left(\dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}} = 0 \text{ et } a > 0\right)$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow (3x+8 = 0 \text{ et } -4 < a < 0) \text{ ou } (3x+8 = 0 \text{ et } a > -4) \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{8}{3} \text{ et } -4 < a < 0\right) \text{ ou } \left(x = -\dfrac{8}{3} \text{ et } a > 0\right)$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{8}{3} \text{ et } -4 < a < 0\right)$ car $-4 < -\dfrac{8}{3} < 0$ vrai et $-\dfrac{8}{3} > 0$ faux .

Ainsi : C_f possède une seule droite tangente parallèle à l'axe (Ox) : en son point B d'abscisse $-\dfrac{8}{3}$.

6) équation réduite de la droite T tangente à C_f en son point C d'abscisse -3

f étant dérivable en -3 ($-4 < -3 < 0$) , la courbe C_f admet en son point C d'abscisse -3 une droite tangente T dont une équation est : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ avec $a = -3$. Donc : $T : y = f(-3) + f'(-3)(x+3)$.

D'autre part : $\rightarrow f(x) = |x|\sqrt{x+4}$ donc : $f(-3) = |-3|\sqrt{-3+4} = 3\sqrt{1} = 3$

$\rightarrow -4 < x < 0$ entraîne $f'(x) = -\dfrac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$ donc $f'(-3) = -\dfrac{3(-3)+8}{2\sqrt{-3+4}} = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $T : y = f(-3) + f'(-3)(x+3)$ devient : $T : y = 3 + \dfrac{1}{2}(x+3)$ soit : $T : y = 3 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ soit $\boxed{T : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}}$

Pour tracer T on utilise les deux points suivants :

$\rightarrow$ le point C d'abscisse -3 et commun à C_f et T : $C\begin{pmatrix}-3\\f(-3)\end{pmatrix}$ soit $C\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ le point E d'abscisse -1 situé sur T : $E\begin{pmatrix}-1\\\dfrac{1}{2}(-1)+\dfrac{9}{2}\end{pmatrix}$ soit $E\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$