Calcul Algébrique - corrigés feuille 2

Factoriser

Préalable : les quatre outils permettant de factoriser

situation 1 : l'expression à factoriser est la forme développée d'un produit remarquable

forme 1 : $a^2 + 2ab + b^2$ Autrement dit : on reconnaît une expression comportant **trois termes** où deux de ces trois termes sont les carrés a^2 et b^2 de deux nombres a et b , le troisième (égal à $+\ 2ab$) représentant le double produit de a et de b

outil n°1 La forme factorisée de $a^2 + 2ab + b^2$ est : $(a+b)^2$ ou $(a+b)(a+b)$

forme 2 : $a^2 - 2ab + b^2$ Autrement dit : on reconnaît une expression comportant **trois termes** où deux de ces trois termes sont les carrés a^2 et b^2 de deux nombres a et b , le troisième (égal à $-\ 2ab$) représentant l'opposé du double produit de a et de b

outil n°2 La forme factorisée de $a^2 - 2ab + b^2$ est : $(a-b)^2$ ou $(a-b)(a-b)$

forme 3 : $a^2 - b^2$ Autrement dit : on reconnaît une expression de **deux termes** qui est une différence de deux carrés

outil n°3 La forme factorisée de $a^2 - b^2$ est : $(a+b)(a-b)$ ou $(a-b)(a+b)$

situation 2 : l'expression à factoriser est un produit de facteurs , chaque produit utilisant un facteur commun

des exemples	la forme de l'expression qui doit être factorisée	le facteur < commun >	**outil n°4** sa forme factorisée
somme de deux produits différence de deux produits	• $Fa + Fb$ • $Fa - Fb$	F F	• $Fa + Fb = F(a+b)$ • $Fa - Fb = F(a-b)$
somme de deux produits	• $Fa + F$ soit $Fa + F\times 1$	F	• $Fa + F = F(a\ +1\ )$
différence de deux produits	• $Fa - F$ soit $Fa - F\times 1$	F	• $Fa - F = F(a\ -1\ )$
somme de trois produits somme de quatre produits	• $Fa + Fb + Fc$ • $Fa - Fb + Fc - Fd$	F F	• $Fa + Fb + Fc = F(a+b+c)$ • $Fa - Fb + Fc - Fd = F(a-b+c-d)$

exercice 1 **on utilise un seul des quatre outils** pour factoriser et on met en évidence la possibilité d'utiliser cet outil (comme le montre les exemples traités)

Première partie : en utilisant l'outil n°3 : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ou bien $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$A(x) = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - (3)^2 = (2x-3)\,(2x+3)$
$B(x) = 25x^2 - 64 = (5x)^2 - (8)^2 = (5x-8)\,(5x+8)$
$C(x) = 49 - 64x^2 = (7)^2 - (8x)^2 = (7-8x)\,(7+8x)$
$D(x) = 9x^2 - 7 = (3x)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(3x - \sqrt{7}\right)\left(3x + \sqrt{7}\right)$
$E(x) = 5 - 7x^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(x\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{5} - x\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} + x\sqrt{7}\right)$
$F(x) = -25 + 9x^2 = 9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2 = (3x-5)\,(3x+5)$
$G(x) = -64x^2 + 81 = 81 - 64x^2 = (9)^2 - (8x)^2 = (9-8x)\,(9+8x)$
$H(x) = 49x^2 - 32 = (7x)^2 - \left(\sqrt{32}\right)^2 = \left(7x - \sqrt{32}\right)\left(7x + \sqrt{32}\right) = \left(7x - 4\sqrt{2}\right)\left(7x + 4\sqrt{2}\right)$; $\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$
$I(x) = (x+2)^2 - 9 = (x+2)^2 - (3)^2 = [(x+2)-3]\,[(x+2)+3] = (x-1)\,(x+5)$
$J(x) = (2x+3)^2 - 9x^2 = (2x+3)^2 - (3x)^2 = [(2x+3)-3x]\,[(2x+3)+3x] = (-x+3)\,(5x+3)$

$K(x)=4(x+1)^2-9=(2)^2\,(x+1)^2-(3)^2=[2\,(x+1)]^2-(3)^2=[2\,(x+1)-3]\;[2\,(x+1)+3]$

$K(x)=[2x+2-3]\;[2x+2+3]=(2x-1)\,(2x+5)$

$L(x)=25(x-2)^2-16x^2=(5)^2\,(x-2)^2-(4x)^2=[5\,(x-2)]^2-(4x)^2=[5\,(x-2)-4x]\;[5\,(x-2)+4x]$

$L(x)=[5x-10-4x]\;[5x-10+4x]=(x-10)\,(9x-10)$

$M(x)=(2x-5)^2-16=(2x-5)^2-(4)^2=[(2x-5)-4]\,[(2x-5)+4]=(2x-9)\,(2x-1)$

$N(x)=(3x-1)^2-4x^2=(3x-1)^2-(2x)^2=[(3x-1)-2x]\,[(3x-1)+2x]=(x-1)\,(5x-1)$

$O(x)=9(x-2)^2-4=(3)^2\,(x-2)^2-(2)^2=[3\,(x-2)]^2-(2)^2=[3\,(x-2)-2]\;[3\,(x-2)+2]$

$O(x)=[3x-6-2]\;[3x-6+2]=(3x-8)\,(3x-4)$

$P(x)=4(-2x+3)^2-49x^2=(2)^2\,(-2x+3)^2-(7x)^2=[2\,(-2x+3)]^2-(7x)^2=[2\,(-2x+3)+7x]\;[2\,(-2x+3)-7x]$

$P(x)=[-4x+6+7x]\;[-4x+6-7x]=(3x+6)\,(-11x+6)$

$Q(x)=(3x+1)^2-(5x+6)^2=[(3x+1)+(5x+6)]\;[(3x+1)-(5x+6)]$

$Q(x)=[3x+1+5x+6]\;[3x+1-5x-6]=(8x+7)\,(-2x-5)$

$R(x)=(-2x-7)^2-(6x+5)^2=[(-2x-7)+(6x+5)]\;[(-2x-7)-(6x+5)]$

$R(x)=[-2x-7+6x+5]\;[-2x-7-6x-5]=(4x-2)\,(-8x-12)$

$S(x)=4(x+3)^2-(7x+4)^2=(2)^2\,(x+3)^2-(7x+4)^2=[2\,(x+3)]^2-(7x+4)^2$

$S(x)=[2\,(x+3)+(7x+4)]\;[2\,(x+3)-(7x+4)]=[2x+6+7x+4]\;[2x+6-7x-4]$

$S(x)=(9x+10)\,(-5x+2)$

$T(x)=4(2x-3)^2-25(-x+4)^2=(2)^2\,(2x-3)^2-(5)^2\,(-x+4)^2=[2\,(2x-3)]^2-[5\,(-x+4)]^2$

$T(x)=[2\,(2x-3)+5\,(-x+4)]\;[2\,(2x-3)-5\,(-x+4)]=[4x-6-5x+20]\;[4x-6+5x-20]$

$T(x)=(-x+14)\,(9x-26)$

$U(x)=-16(x+6)^2+81(2-5x)^2=81(2-5x)^2-16(x+6)^2=(9)^2\,(2-5x)^2-(4)^2\,(x+6)^2=[9\,(2-5x)]^2-[4\,(x+6)]^2$

$U(x)=[18-45x]^2-[4x+24]^2=[(18-45x)+(4x+24)]\;[(18-45x)-(4x+24)]$

$U(x)=[18-45x+4x+24]\;[18-45x-4x-24]=(-41x+42)\,(-49x-6)$

Deuxième partie : en utilisant l'un des deux outils n^{o}1 et n^{o}2 : $a^2+2(ab)+b^2=(a+b)^2$ *ou* $a^2-2(ab)+b^2=(a-b)^2$

$a(x)=16x^2+24x+9=(4x)^2+2(12x)+(3)^2=(4x+3)^2$

$b(x)=25x^2+4-20x=(5x)^2+(2)^2-2(10x)=(5x-2)^2$

$c(x)=9x^2-12x+4=(3x)^2-2(6x)+(2)^2=(3x-2)^2$

$d(x)=x^2-18x+81=(x)^2-2(9x)+(9)^2=(x-9)^2$

$e(x)=25x^2+49+70x=(5x)^2+(7)^2+2(35x)=(5x+7)^2$

$f(x)=9x^2-30x+25=(3x)^2-2(15x)+(5)^2=(3x-5)^2$

$$g(x)=4x^2+3x+\frac{9}{16}=(2x)^2-2\left(\frac{3}{2}x\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2=(2x)^2-2\,(2x)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$$

$$i(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\left(\frac{5}{4}x\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)^2$$

ou bien :

$$i(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=\frac{1}{4}\left(x^2-10x+25\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[(x)^2-2(5x)+(10)^2\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^2(x-5)^2=\left[\frac{1}{2}\,(x-5)\right]^2=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)^2$$

$j(x)=4x^4+28x^2+49=(2x^2)^2+2(14x^2)+(7)^2=\left(2x^2+7\right)^2$

situation 4-1 : le facteur commun est une constante réelle	**observation préalable**
$A_1(x) = 14x + 21 = 7(2x+3)$	**14 et 21 divisibles par 7**
$B_1(x) = -15x - 10 = -5(3x+2)$	**-15 et -10 divisibles par -5**
$C_1(x) = 8x + 10 = 2\,(4x+5)$	**8 et 10 divisibles par 2**
$D_1(x) = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2} = \frac{3}{2}\,(x+7)$	$\frac{21}{2} = \frac{3}{2} \times 7$
$E_1(x) = (4x-2)\,(-18x+9) = 2\,(2x-1) \times -9\,(2x-1)$ $E_1(x) = 2 \times -9 \times (2x-1) \times (2x-1) = -18\,(2x-1)^2$	$(4x-2)$ **: 4 et 2 divisibles par 2** $(-18x+9)$ **: -18 et 9 divisibles par -9**

situation 4-2 : le facteur commun est une puissance de x : x , x^2 , x^3 , ...	**observation préalable**
$A_2(x) = -2x^2 + 3x = x\,(-2x+3)$	$-2x^2$ et $3x$ **factorisables par x**
$B_2(x) = 4x^3 + 5x^2 = x^2\,(4x+5)$	$4x^3$ et $5x^2$ **factorisables par** x^2
$C_2(x) = 2x^5 + 5x^4 - 4x^3 = x^3\left(2x^2+5x-4\right)$	$2x^5$, $5x^4$ et $-4x^3$ **factorisables par** x^3
$D_2(x) = x^6 + 2x^4 - 7x^2 = x^2\left(x^4+2x^2-7\right)$	x^6 , $2x^4$ et $-7x^2$ **factorisables par** x^2
$E_2(x) = -2x^4 + 5x^3 + 7x^2 = x^2\left(-2x^2+5x+7\right)$	$-2x^4$, $5x^3$ et $7x^2$ **factorisables par** x^2

situation 4-3 : le facteur commun est du type ax^n : $-3x$, $4x^2$, $7x^3$, ...	**observation préalable**
$A_3(x) = -6x^2 - 21x = -3x\,(2x+7)$	$-6x^2$ et $-21x$ **factorisables par** $-3x$
$B_3(x) = -20x^3 + 35x^2 = -5x^2\,(4x-7)$	$-20x^3$ et $35x^2$ **factorisables par** $-5x^2$
$C_3(x) = 8x^4 + 10x^3 - 6x^2 = 2x^2\left(4x^2+5x-3\right)$	$8x^4$, $10x^3$ et $-6x^2$ **factorisables par** $2x^2$
$D_3(x) = -5x^6 + 15x^5 + 20x^4 = -5x^4\left(x^2-3x-4\right)$	$-5x^6$, $15x^5$ et $20x^4$ **factorisables par** $-5x^4$
$E_3(x) = 4x^4 + 8x^3 - 24x^2 = 4x^2\left(x^2+2x-6\right)$	$4x^4$, $8x^3$ et $-24x^2$ **factorisables par** $4x^2$

situation 4-4 : le facteur commun est évident et est un facteur de degré 1 du type ax + b	**facteur commun**
$A_4(x) = (5x-3)\ (x+2)\ + 9\ (x+2)\ =\ (x+2)\ [(5x-3)+9] = (x+2)(5x+6)$	$(x+2)$
$B_4(x) = (7x-4)\ (2x+3)\ - 7\ (2x+3)\ =\ (2x+3)\ [(7x-4)-7] = (2x+3)(7x-11)$	$(2x+3)$
$C_4(x) = (6x-5)\ (-x+5)\ +\ (-x+5)\ =\ (-x+5)\ [(6x-5)+1] = (-x+5)(6x-4)$	$(-x+5)$
$D_4(x) = (-5x+3)\ (3x+2)\ -\ (3x+2)\ =\ (3x+2)\ [(-5x+3)-1] = (3x+2)(-5x+2)$	$(3x+2)$
$E_4(x) = (4x+9)^2 + 5(4x+9) = (4x+9)\ (4x+9)\ + 5\ (4x+9)\ =\ (4x+9)\ [(4x+9)+5] = (4x+9)(4x+14)$	$(4x+9)$

situation 4-5 : le facteur commun est un facteur de degré 1 du type ax + b à débusquer	**facteur commun**
$A_5(x) = (5x-3)\,(2x+1) + 14x + 7 = (5x-3)\ (2x+1)\ + 7\ (2x+1)\ =\ (2x+1)\ [(5x-3)+7] = (2x+1)(5x+4)$	$(2x+1)$
$B_5(x) = (5x-3)\,(x+2) - 10x^2 + 6x =\ (5x-3)\ (x+2) - 2x\ (5x-3)\ =\ (5x-3)\ [(x+2)-2x] = (5x-3)(-x+2)$	$(5x-3)$
$C_5(x) = (5x+3)\,(3x+6) + (-2x-4)(6x+5) = (5x+3) \times 3(x+2) - 2(x+2)(6x+5)$ $C_5(x) = 3(5x+3)\ (x+2)\ - 2\ (x+2)\ (6x+5) =\ (x+2)\ [3(5x+3) - 2(6x+5)]$ $C_5(x) = (x+2)\,[15x+9-12x-10] = (x+2)(3x-1)$	$(x+2)$
$D_5(x) = (4x^2-9)(5x+7) + 63 - 42x = \left[(2x)^2 - (3)^2\right](5x+7) - 42x + 63 =\ (2x-3)\ (2x+3)(5x+7) - 21\ (2x-3)$ $D_5(x) =\ (2x-3)\ [(2x+3)(5x+7) - 21] = (2x-3)(10x^2+14x+15x+21-21) = (2x-3)(10x^2+29x)$ $D_5(x) = (2x-3)(x)(10x+29) = x(2x-3)(10x+29)$	$(2x-3)$
$E_5(x) = (x^2-6x+9) + (5x-11)(-x+3) = \left[(x)^2 - 2(3x) + (3)^2\right] + (5x-11) \times [-1(x-3)]$ $E_5(x) = (x-3)^2 - (5x-11)(x-3) =\ (x-3)\ (x-3) - (5x-11)\ (x-3)\ =\ (x-3)\ [(x-3)-(5x-11)]$ $E_5(x) = (x-3)(x-3-5x+11) = (x-3)(-4x+8) = (x-3) \times -4(x-2) = -4(x-3)(x-2)$	$(x-3)$

l'expression à factoriser	les outils utilisés	résultat à trouver : sa forme factorisée
$A(x) = 15x^2 + 6x$	1 2 3 **4**	$A(x) = 3x\,(5x + 2)$
$B(x) = 4(2 - 5x)^2 - (x + 3)^2$	1 2 **3** 4	$B(x) = (-11x + 1)(-9x + 7)$
$C(x) = 7x^4 - 28x^2$	1 2 **3** **4**	$C(x) = 7x^2\,(x - 2)\,(x + 2)$
$D(x) = (8x - 2)^2 - 4x + 1$	1 2 3 **4**	$D(x) = (4x - 1)\,(16x - 5)$
$E(x) = 121x^3 + 44x^2 + 4x$	**1** 2 3 **4**	$E(x) = x\,(11x + 2)^2$
$F(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{3}\right)(x + 1) - (1 + x)\left(\frac{3}{4}x + 5\right)$	1 2 3 **4**	$F(x) = (x + 1)\left(-\frac{1}{2}x - \frac{14}{3}\right)$
$G(x) = \left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 - \frac{25}{9}(3 - x)^2$	1 2 **3** 4	$G(x) = \left(\frac{7}{3}x - 6\right)(-x + 4)$
$H(x) = (5x^2 + 3x - 2)^2 - (4x^2 - 3x - 2)^2$	1 2 **3** **4**	$H(x) = x(x + 6)(3x - 2)(3x + 2)$
$I(x) = (5 - 2x)(2x + 7) - 4x^2 + 25$	1 2 **3** **4**	$I(x) = 4(5 - 2x)(x + 3)$
$J(x) = (x^2 - 6x + 9) + (5x - 3)(-x + 3) + 4x^4 - 12x^3$	1 **2** **3** **4**	$J(x) = 4x(x - 3)(x - 1)(x + 1)$
$K(x) = (16x^2 + 8x + 1) - 8(x - 1)(12x + 3) + 16x^3 + 4x^2$	**1** **2** 3 **4**	$K(x) = (4x + 1)\,(2x - 5)^2$
$L(x) = (16x^2 - 24x + 9) - (8x - 6)(3x - 7) + 3 - 4x$	1 **2** 3 **4**	$L(x) = -2\,(4x - 3)\,(x - 5)$
$M(x) = 7x(3x - 2)^2(4 - 2x) - (2 - 3x)(15 - 42x)(4 - x^2)$	1 2 **3** **4**	$M(x) = (3x - 2)(2 - x)\,(-97x + 30)$
$N(x) = -4x^4 - 20x^3 + 25x^2 + 125x$	1 2 **3** **4**	$N(x) = x(x + 5)(5 - 2x)(5 + 2x)$
$O(x) = (2x + 5)^2 + (3x + 7)^2 - (4x + 1)^2 - (5x + 3)^2$	1 2 **3** **4**	$O(x) = -4(x - 2)(7x + 8)$

solutions détaillées	quelques commentaires
$\underline{A(x) = 15x^2 + 6x}$. $A(x) = 3x\,(5x + 2)$	15 et 6 divisibles par 3 ; x^2 produit de x par lui -même . Donc $A(x)$ factorisable par 3x (facteur commun).
$\underline{B(x) = 4(2 - 5x)^2 - (x + 3)^2}$. $B(x) = 2^2(2 - 5x)^2 - (x + 3)^2$ $B(x) = [2(2 - 5x)]^2 - (x + 3)^2 = (4 - 10x)^2 - (x + 3)^2$ $B(x) = [(4 - 10x) - (x + 3)]\,[(4 - 10x) + (x + 3)] =$ $B(x) = [4 - 10x - x - 3)]\,[4 - 10x + x + 3)]$ $B(x) = (-11x + 1)(-9x + 7)$	B(x) est de la forme $4a^2 - b^2$ et $4a^2 = (2a)^2$
$\underline{C(x) = 7x^4 - 28x^2}$ $C(x) = 7x^2(x^2 - 4) = 7x^2\left[(x)^2 - (2)^2\right]$ $C(x) = 7x^2\,(x - 2)\,(x + 2)$	28 et 7 divisibles par 7 ; x^4 produit de x^2 par lui-même . Donc C(x) factorisable par $7x^2$ (facteur commun)
$\underline{D(x) = (8x - 2)^2 - 4x + 1}$. $D(x) = [2(4x - 1)]^2 - 4x + 1$ $D(x) = 4(4x - 1)^2 - (4x - 1)$ $D(x) = 4\ (4x - 1)\ (4x - 1) -\ (4x - 1)\ \times 1$ $D(x) =\ (4x - 1)\ [4(4x - 1) - 1]$ $D(x) = (4x - 1)(16x - 4 - 1) = (4x - 1)(16x - 5)$	$8x - 2 = 2(4x - 1)$ et $-4x + 1 = -(4x - 1)$. Donc $(4x - 1)$ est un facteur commun .
$\underline{E(x) = 121x^3 + 44x^2 + 4x}$ $E(x) = x(121x^2 + 44x + 4)$ $E(x) = x\left[(11x)^2 + 2(11x) + (2)^2\right] = x(11x + 2)^2$	E(x) est factorisable par x $121x^2$: carré de 11x ; 4 : carré de 2 et $44x = 2(11x)(2)$. Donc : $121x^2 + 44x + 4$ de la forme $a^2 + 2ab + b^2$

$F(x)=\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\right)(x+1)-(1+x)\left(\dfrac{3}{4}x+5\right)$.	F(x) est une somme de deux produits ayant un facteur commun évident car : $(x+1)=(1+x)$
$F(x)=\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\right)\ (x+1)\ -\ (x+1)\ \left(\dfrac{3}{4}x+5\right)$	
$F(x)=\ (x+1)\ \left[\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{3}{4}x+5\right)\right]$	
$F(x)=(x+1)\left[\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}x-5\right]$	
$F(x)=(x+1)\left(-\dfrac{2}{4}x+\dfrac{1}{3}-\dfrac{15}{3}\right)=(x+1)\left(-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{14}{3}\right)$	

$G(x)=\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)^2-\dfrac{25}{9}(3-x)^2$	G(x) est de la forme $a^2-\dfrac{25}{9}b^2$ et $\dfrac{25}{9}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$
$G(x)=\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)^2-\left(\dfrac{5}{3}\right)^2(3-x)^2$	
$G(x)=\left[\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)-\dfrac{5}{3}(3-x)\right]\left[\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)+\dfrac{5}{3}(3-x)\right]$	
$G(x)=\left[\dfrac{2}{3}x-1-5+\dfrac{5}{3}x\right]\left[\dfrac{2}{3}x-1+5-\dfrac{5}{3}x\right]$	
$G(x)=\left(\dfrac{7}{3}x-6\right)(-x+4)$	

$H(x)=(5x^2+3x-2)^2-(4x^2-3x-2)^2$	H(x) est de la forme a^2-b^2 avec :
$H(x)=\left[(5x^2+3x-2)-(4x^2-3x-2)\right]\left[(5x^2+3x-2)+(4x^2-3x-2)\right]$	$a=5x^2+3x-2$ et $b=4x^2-3x-2$
$H(x)=\left[5x^2+3x-2-4x^2+3x+2\right]\left[5x^2+3x-2+4x^2-3x-2\right]$	
$H(x)=\left[x^2+6x\right]\left[9x^2-4\right]$	On a maintenant un produit de deux facteurs avec
$H(x)=[x(x+6)]\left[(3x)^2-(2)^2\right]$	• x^2+6x factorisable par x
$H(x)=x(x+6)(3x-2)(3x+2)$	• $9x^2-4$ de la forme a^2-b^2
$I(x)=(5-2x)(2x+7)-4x^2+25.$	$-4x^2+25=25-4x^2$ et $25-4x^2$ de la forme a^2-b^2
$I(x)=(5-2x)(2x+7)+25-4x^2$	
$I(x)=(5-2x)(2x+7)+\left[(5)^2-(2x)^2\right]$	
$I(x)=\ (5-2x)\ (2x+7)+\ (5-2x)\ (5+2x)$	On a maintenant une somme de deux produits
$I(x)=(5-2x)\ [(2x+7)+(5+2x)]$	avec un facteur commun évident : $(5-2x)$
$I(x)=(5-2x)(4x+12)$	
$I(x)=(5-2x)\times 4(x+3)=4(5-2x)(x+3)$	

$J(x)=(x^2-6x+9)+(5x-3)(-x+3)+4x^4-12x^3$	• (x^2-6x+9) est de la forme $a^2-2ab+b^2$
$J(x)=\left[(x)^2-2(3x)+(3)^2\right]+(5x-3)(-x+3)+4x^3(x-3)$	avec $a=x$ et $b=3$
$J(x)=(x-3)^2+(5x-3)\times[-(x-3)]+4x^3(x-3)$	• $(5x-3)(-x+3)$ est un produit de deux facteurs :
J(x) est maintenant une somme de trois produits avec un	facteur communs possibles $5x-3$, $-x+3$ ou $x-3$.
facteur commun évident : $(x-3)$. D'où :	• $4x^4-12x^3$ est factorisable par $4x^3$ car :
$J(x)=\ (x-3)\ (x-3)-(5x-3)\ (x-3)\ +4x^3\ (x-3)$	12 et 4 divisibles par 4 et x^4 produit de x^3 par x
$J(x)=\ (x-3)\ \left[(x-3)-(5x-3)+4x^3\right]$	
$J(x)=(x-3)\left[x-3-5x+3+4x^3\right]=(x-3)\left[4x^3-4x\right]$	$4x^3-4x$ est factorisable par $4x$
$J(x)=(x-3)\left[4x(x^2-1)\right]=4x(x-3)\left[(x)^2-(1)^2)\right]$	
$J(x)=4x(x-3)(x-1)(x+1)$	

$\underline{K(x) = (16x^2+8x+1) - 8(x-1)(12x+3) + 16x^3 + 4x^2}$ $K(x) = \left[(4x)^2 + 2(4x) + (1)^2\right] - 8(x-1)\times 3(4x+1) + 4x^2(4x+1)$ $K(x) = (4x+1)^2 - 24(x-1)(4x+1) + 4x^2(4x+1)$ $K(x) = (4x+1)\,(4x+1) - 24(x-1)\,(4x+1)\, + 4x^2\,(4x+1)$ $K(x) = (4x+1)\,\left[(4x+1) - 24(x-1) + 4x^2\right]$ $K(x) = (4x+1)\left[4x+1-24x+24+4x^2\right] = (4x+1)\left[4x^2-20x+25\right]$ $K(x) = (4x+1)\left[(2x)^2 - 2(10x) + (5)^2\right] = (4x+1)(2x-5)^2$	• $16x^2+8x+1$ de la forme $a^2+2ab+b^2$ • $12x+3 = 3(4x+1)$ • $16x^3+4x^2$ factorisable par $4x^2$ facteur commun : $4x+1$ $4x^2-20x+25$ de la forme $a^2-2ab+b^2$
$\underline{L(x) = (16x^2-24x+9) - (8x-6)(3x-7) + 3 - 4x}$ $L(x) = \left[(4x)^2 - 2(12x) + (3)^2\right] - 2(4x-3)(3x-7) + (-4x+3)$ $L(x) = (4x-3)^2 - 2(4x-3)(3x-7) - (4x-3)$ $L(x) = (4x-3)\,(4x-3) - 2\,(4x-3)\,(3x-7) - \,(4x-3)\,\times 1$ $L(x) = (4x-3)\,[(4x-3) - 2(3x-7) - 1]$ $L(x) = (4x-3)\,[4x-3-6x+14-1]$ $L(x) = (4x-3)\,(-2x+10) = (4x-3)\times -2(x-5)$ $L(x) = -2(4x-3)(x-5)$	• $16x^2-24x+9$ de la forme $a^2-2ab+b^2$ • $8x-6 = 2(4x-3)$ • $3-4x = -4x+3 = -(4x-3)$ facteur commun : $4x-3$
$\underline{M(x) = 7x(3x-2)^2(4-2x) - (2-3x)(15-42x)(4-x^2)}$ $M(x) = 7x(3x-2)^2\times 2(2-x) - [-(3x-2)]\,(15-42x)\left[(2)^2-(x)^2\right]$ $M(x) = 14x(3x-2)^2(2-x) + (3x-2)(15-42x)(2-x)(2+x)$ $M(x) = 14x(3x-2)(3x-2)(2-x) + (3x-2)(15-42x)(2-x)(2+x)$ $M(x) = 14x(3x-2)\,(3x-2)(2-x)\, + \,(3x-2)(2-x)\,(15-42x)(2+x)$ $M(x) = (3x-2)(2-x)\,[14x(3x-2) + (15-42x)(2+x)]$ $M(x) = (3x-2)(2-x)\left[42x^2-28x+30+15x-84x-42x^2\right]$ $M(x) = (3x-2)(2-x)\,(-97x+30)$	M(x) est une différence de deux produits de plusieurs facteurs ayant en commun un produit de deux facteurs car : • $2-3x = -(3x-2)$ • $(4-2x) = 2(2-x)$ et $4-x^2 = a^2-b^2$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=x \end{cases}$ produit de facteurs commun : $(3x-2)(2-x)$
$\underline{N(x) = -4x^4 - 20x^3 + 25x^2 + 125x}$ $N(x) = \left(-4x^4-20x^3\right) + \left(25x^2+125x\right)$ $N(x) = -4x^3\,(x+5)\, + 25x\,(x+5)\, = \,(x+5)\,\left[-4x^3+25x\right]$ $N(x)$ est devenu un produit de facteurs et $-4x^3+25x$ factorisable par x $N(x) = (x+5)\left[x(25-4x^2)\right]$ $N(x) = x(x+5)\left[(5)^2-(2x)^2\right] = x(x+5)(5-2x)(5+2x)$	N(x) est une somme de quatre termes que l'on doit regrouper pour créer une somme de deux produits avec un facteur commun . D'autre part : $-4x^4-20x^3$ factorisable par $-4x^3$ $25x^2+125x$ factorisable par $25x$ Pour terminer : $25-4x^2$ de la forme a^2-b^2

$\underline{O(x) = (2x+5)^2 + (3x+7)^2 - (4x+1)^2 - (5x+3)^2}$

En changeant l'ordre des termes de O(x) , on met en évidence deux différences du type a^2-b^2

$O(x) = \left[(2x+5)^2 - (4x+1)^2\right] + \left[(3x+7)^2 - (5x+3)^2\right]$

$O(x) = [(2x+5)-(4x+1)]\,[(2x+5)+(4x+1)] + [(3x+7)-(5x+3)]\,[(3x+7)-(5x+3)]$

$O(x) = [2x+5-4x-1]\,[2x+5+4x+1] + [3x+7-5x-3]\,[3x+7+5x+3]$

$O(x) = [-2x+4]\,[6x+6] + [-2x+4]\,[8x+10]$

O(x) est maintenant une somme de deux produit de facteurs avec un facteur commun : $-2x+4$

$O(x) = \,(-2x+4)\,(6x+6) + \,(-2x+4)\,(8x+10) = \,(-2x+4)\,[(6x+6)+(8x+10)] = (-2x+4)(14x+16)$

Les coefficients de $-2x+4$ et $14x+16$ divisibles par 2 d'où la fin suivante :

$O(x) = (-2x+4)(14x+16) = -2(x-2)\times 2(7x+8) = -2\times 2\times (x-2)(7x+8) = -4(x-2)(7x+8)$

exercice 3 Factoriser au mieux en respectant la consigne suivante :

Toute utilisation des produits remarquables ou d'un facteur commun (distinct d'une constante réelle ou distinct d'un facteur du type x , x^2 , 2x , $-3x^4$, ax^n avec a non nul et n entier naturel) est à mettre en évidence

méthodologie : observer la forme de l'expression à factoriser avant de commencer et se dire que tout va bien s'enchaîner !

$A(x) = (-9x+12)(-7x+5) + (5x-6)(28-21x)$

On observe : • A(x) est une somme de deux produits de deux facteurs .

• $-9x+12 = -3(3x-4)$ et $28-21x = -21x+28 = -7(3x-4)$. Donc $3x-4$ est un facteur commun aux deux produits .

D'où : $A(x) = -3(3x-4)(-7x+5) + (5x-6)\times[-7(3x-4)] = -3\,(3x-4)\,(-7x+5) - 7(5x-6)\,(3x-4)$

$A(x) = (3x-4)\,[-3(-7x+5) - 7(5x-6)] = (3x-4)(21x-15-35x+42) = (3x-4)(-14x+27)$

$B(x) = -9x^2+25+(6x-10)(7x+3)$

On observe : • $-9x^2+25 = 25-9x^2$ et $25-9x^2$ de la forme a^2-b^2 *avec* $a=5$ et $b=3x$

• $(6x-10)(7x+3)$ est un produit de facteurs et $6x-10 = 2(3x-5)$

Le facteur commun n'est pas loin ! D'où la solution suivante :

$B(x) = -9x^2+25+(6x-10)(7x+3) = (5)^2-(3x)^2+2(3x-5)(7x+3) = (5-3x)(5+3x)+2(3x-5)(7x+3)$

$B(x) = (5-3x)\,(5+3x) - 2\,(5-3x)\,(7x+3) = (5-3x)\,[(5+3x)-2(7x+3)]$

$B(x) = (5-3x)(5+3x-14x-6) = (5-3x)(-11x-1)$

$C(x) = (49x^2-28x+4)(-6x+8) - (21x-6)(-9x^2+24x-16)$

On observe : • C(x) est une somme de deux produits .

• dans chacun des produits : un facteur est du second degré en étant de la forme $a^2+2ab+b^2$ *ou* $-(a^2+2ab+b^2)$; l'autre facteur de degré 1 est factorisable par une constante réelle .

D'où la solution qui suit :

$C(x) = (49x^2-28x+4)\times[-2(3x-4)] - 3(7x-2)\times\left[-(9x^2-24x+16)\right]$

$C(x) = -2\left[(7x)^2-2(14x)+(2)^2\right](3x-4) + 3(7x-2)\left[(3x)^2-2(12x)+(4)^2\right]$

$C(x) = -2(7x-2)^2(3x-4) + 3(7x-2)(3x-4)^2$

C(x) est donc une somme de deux produits ayant en commun le produit $(7x-2)(3x-4)$

$C(x) = -2(7x-2)\,(7x-2)(3x-4)\, + 3\,(7x-2)(3x-4)\,(3x-4) = (7x-2)(3x-4)\,[-2(7x-2)+3(3x-4)]$

$C(x) = (7x-2)(3x-4)\,[-14x+4+9x-12] = (7x-2)(3x-4)(-5x-8)$

$D(x) = (16x^2-5)^2 - 2(16x^2-5)(25x^2-21) + (25x^2-21)^2$

On observe : C(x) est de la forme $a^2-2ab+b^2$ avec $a = 16x^2-5$ et $b = 25x^2-21$. Par conséquent :

$D(x) = (16x^2-5)^2 - 2(16x^2-5)(25x^2-21) + (25x^2-21)^2 = \left[(16x^2-5)-(25x^2-21)\right]^2$

$D(x) = \left[16x^2-5-25x^2+21\right]^2 = \left[16-9x^2\right]^2$ et $16-9x^2$ de la forme a^2-b^2 . Donc :

$D(x) = \left[(4)^2-(3x)^2\right]^2 = [(4-3x)(4+3x)]^2 = (4-3x)^2(4+3x)^2$

$E(x) = (x+2)(4x^2+4x+1) - 9x - 18$

On observe : • le premier terme est un produit de facteurs avec $4x^2+4x+1$ de la forme $a^2+2ab+b^2$

• la fin de l'expression est factorisable par -9 et : $-9x-18 = -9(x+2)$

$E(x)$ est donc factorisable par $x+2$. D'où la solution suivante :

$E(x) = (x+2)(4x^2+4x+1) - 9x - 18 = (x+2)\left[(2x)^2+2(2x)+(1)^2\right] - 9(x+2)$

$E(x) = (x+2)\,(2x+1)^2 - 9\,(x+2) = (x+2)\,\left[(2x+1)^2-9\right]$ et $(2x+1)^2-9$ de la forme a^2-b^2 . D'où :

$E(x) = (x+2)\left[(2x+1)^2-(3)^2\right] = (x+2)\,[(2x+1)-3]\,[(2x+1)+3] = (x+2)(2x-2)(2x+4)$

$E(x) = (x+2)\times 2(x-1)\times 2(x+2) = 2\times 2\times (x-1)\times(x+2)(x+2) = 4(x-1)(x+2)^2$

$\underline{F(x) = 9(x+3)^2 - 4(2x+1)^2 - (x+2)(14-2x)}$

On observe : • la différence des deux premiers termes est du type $9a^2 - 4b^2$ *soit* du type $(3a)^2 - (2b)^2$

• le dernier terme est un produit de facteurs et $14 - 2x = 2(7-x)$.

Le facteur commun n'est pas loin ! D'où la solution suivante :

$F(x) = 9(x+3)^2 - 4(2x+1)^2 - (x+2)(14-2x) = [3(x+3)]^2 - [2(2x+1)]^2 - (x+2) \times [2(7-x)]$

$F(x) = [3(x+3) - 2(2x+1)]\,[3(x+3) + 2(2x+1)] - 2(x+2)(7-x)$

$F(x) = (3x+9-4x-2)(3x+9+4x+2) - 2(x+2)(7-x)$

$F(x) = (-x+7)(7x+11) - 2(x+2)(7-x)$

A ce stade , $F(x)$ est une différence de deux produits avec un facteur commun $(7-x)$ car $7 - x = -x + 7$

$F(x) = (7-x)\,(7x+11) - 2(x+2)\,(7-x) = (7-x)\,[(7x+11) - 2(x+2)]$

$F(x) = (7-x)(7x+11-2x-4) = (7-x)(5x+7)$

$\underline{G(x) = 36x^2 - 45x^3 + 17x(4-5x) + (4-5x)^2}$

On observe : • en regroupant les deux premiers termes de G(x) , on crée une expression factorisable par $9x^2$

• les deux derniers termes de G(x) sont des produits faisant apparaître $(4-5x)$ comme facteur commun

D'où ce qui suit :

$G(x) = 36x^2 - 45x^3 + 17x(4-5x) + (4-5x)^2 = 9x^2(4-5x) + 17x(4-5x) + (4-5x)^2$; $4-5x$ est un facteur commun pour $D(x)$

$G(x) = 9x^2\,(4-5x) + 17x\,(4-5x) + (4-5x)\,(4-5x) = (4-5x)\,\left[9x^2 + 17x + (4-5x)\right]$

$G(x) = (4-5x)(9x^2+12x+4)$ et $9x^2+12x+4$ de la forme $a^2 + 2ab + b^2$. Donc :

$G(x) = (4-5x)\left[(3x)^2 + 2(6x) + (2)^2\right] = (4-5x)(3x+2)^2$

$\underline{H(x) = 9x^2(2+7x) - 8(7x+2)(3x-2) + \left(45x^2 - 120x + 80\right)}$

On observe : • les deux premiers termes de H(x) sont des produits faisant apparaître $(7x+2)$ comme facteur commun

• le troisième terme de H(x) est du second degré et est factorisable par 5

D'où ce qui suit :

$H(x) = 9x^2(2+7x) - 8(7x+2)(3x-2) + \left(45x^2 - 120x + 80\right) = 9x^2\,(7x+2) - 8\,(7x+2)\,(3x-2) + 5\left(9x^2 - 24x + 16\right)$

$9x^2 - 24x + 36$ n'ayant pas de rapport avec $7x+2$ on continue par une factorisation partielle par $7x+2$

$H(x) = (7x+2)\,\left[9x^2 - 8(3x-2)\right] + 5\left(9x^2 - 24x + 16\right) = (7x+2)\,(9x^2 - 24x + 16) + 5\,(9x^2 - 24x + 16)$

H(x) est maintenant égal à une somme de deux produits ayant comme facteur commun $\left(9x^2 - 24x + 16\right)$ qui est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$. D'où :

$H(x) = (9x^2 - 24x + 16)\,[(7x+2) + 5] = \left[(3x)^2 - 2(12x) + (4)^2\right][7x+7] = (3x-4)^2 \times 7(x+1) = 7(x+1)(3x-4)^2$

$\underline{I(x) = (10x^2 - 4x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 2)^2 + \left(9x^2 - 4\right)\left(-10x^2 + 2x + 9\right)}$

On observe : • les deux premiers termes de I(x) font apparaître une différence de deux carrés

D'où la solution :

$I(x) = \left[(10x^2 - 4x - 2) - (x^2 - 4x + 2)\right]\left[(10x^2 - 4x - 2) + (x^2 - 4x + 2)\right] + \left(9x^2 - 4\right)\left(-10x^2 + 2x + 9\right)$

$I(x) = \left[10x^2 - 4x - 2 - x^2 + 4x - 2)\right]\left[10x^2 - 4x - 2 + x^2 - 4x + 2\right] + \left(9x^2 - 4\right)\left(-10x^2 + 2x + 9\right)$

$I(x) = (9x^2 - 4)\,\left(11x^2 - 8x\right) + (9x^2 - 4)\,\left(-10x^2 + 2x + 9\right)$

I(x) est une somme de deux produits de facteurs ayant en commun $(9x^2 - 4)$. Donc :

$I(x) = (9x^2 - 4)\,\left[(11x^2 - 8x) + (-10x^2 + 2x + 9)\right] = (9x^2 - 4)(x^2 - 6x + 9)$ et $\begin{cases} 9x^2 - 4 \text{ de la forme } a^2 - b^2 \\ x^2 - 6x + 9 \text{ de le forme } a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$

$I(x) = \left[(3x)^2 - (2)^2\right]\left[(x)^2 - 2(3x) + (3)^2\right] = (3x-2)(3x+2)(x-3)^2$

$J(x)=(2x-3)^2(6x^2-12x)+(-12x+2)(2x-3)(x^2-4)$

On observe : • J(x) est une somme de deux produits de plusieurs facteurs avec $2x-3$ comme facteur commun évident .

• $6x^2-12x$ est factorisable par 6x et x^2-4 est de la forme a^2-b^2

D'où la solution qui suit :

$J(x)=(2x-3)^2(6x^2-12x)+(-12x+2)(2x-3)(x^2-4)=(2x-3)^2\times 6x(x-2)+(-12x+2)(2x-3)\left[(x)^2-(2)^2\right]$

$J(x)=6x(2x-3)^2(x-2)+(-12x+2)(2x-3)(x-2)(x+2)$

$(2x-3)(x-2)$ est donc un produit commun à chacun des deux produits dont la somme est $J(x)$. D'où :

$J(x)=6x(2x-3)\ (2x-3)(x-2)\ +(-12x+2)\ (2x-3)(x-2)\ (x+2)$

$J(x)=\ (2x-3)(x-2)\ [6x(2x-3)+(-12x+2)(x+2)]=(2x-3)(x-2)\left[12x^2-18x-12x^2-24x+2x+4\right]$

$J(x)=(2x-3)(x-2)\left[-40x+4\right]=(2x-3)(x-2)\times -4(10x-1)=-4(2x-3)(x-2)(10x-1)$

$K(x)=36x^2-28x^3+19x(9-7x)+(9-7x)^2$

On observe : • la somme des deux premiers termes de K(x) est factorisable par $4x^2$ et $36x^2-28x^3=4x^2(9-7x)$

• K(x) peut se mettre sous la forme d'une somme de trois produits ayant en commun le facteur $9-7x$

Donc : $K(x)=36x^2-28x^3+19x(9-7x)+(9-7x)^2=4x^2\,(9-7x)+19x(9-7x)+(9-7x)^2$

$K(x)=4x^2\ (9-7x)\ +19x\ (9-7x)\ +\ (9-7x)\ (9-7x)=\ (9-7x)\ \left[4x^2+19x+9-7x\right]$

$K(x)=(9-7x)(4x^2+12x+9)$ et $4x^2+12x+9$ de la forme $a^2+2ab+b^2$. D'où :

$K(x)=(9-7x)\left[(2x)^2+2(6x)+3^2\right]=(9-7x)(2x+3)^2$

$L(x)=(2x-5)^2(4x^2+12x)+(-8x+3)(2x-5)(x^2-9)$

On observe : • $L(x)$ est une somme de deux produits avec un facteur commun évident : $(2x-5)$

• $4x^2+12x$ est factorisable par 4x ; x^2-9 est du type a^2-b^2 . un deuxième facteur commun y est caché

D'où la solution :

$L(x)=(2x-5)^2\times 4x(x+3)+(-8x+3)(2x-5)\left[(x)^2-(3)^2\right]=4x(2x-5)^2(x+3)+(-8x+3)(2x-5)(x-3)(x+3)$

$L(x)$ est donc une somme de deux produits avec en commun le produit : $(2x-5)(x+3)$. D'où :

$L(x)=4x(2x-5)\ (2x-5)(x+3)\ +(-8x+3)(x-3)\ (2x-5)(x+3)\ =\ (2x-5)(x+3)\ [4x(2x-5)+(-8x+3)(x-3)]$

$L(x)=(2x-5)(x+3)(8x^2-20x-8x^2+24x+3x-9)=(2x-5)(x+3)(7x-9)$

$M(x)=-(3x+11)^2-4\,(3x+5)^2+(7x+8)^2+(4x+9)^2$

On observe : • quatre carrés interviennent dans M(x) .

• en changeant l'ordre des termes de M(x) et en les regroupant deux par deux on peut créer deux fois la forme a^2-b^2

D'où la solution :

$M(x)=-(3x+11)^2-4\,(3x+5)^2+(7x+8)^2+(4x+9)^2$

$M(x)=\left[(7x+8)^2-(3x+11)^2\right]+\left[(4x+9)^2-4\,(3x+5)^2\right]$

D'autre part : $4\,(3x+5)^2=2^2(3x+5)^2=\left[2(3x+5)^2\right]=(6x+10)^2$

Donc : $M(x)=\left[(7x+8)^2-(3x+11)^2\right]\ +\ \left[(4x+9)^2-(6x+10)^2\right]$

$M(x)=[(7x+8)-(3x+11)]\,[(7x+8)+(3x+11)]\ +\ [(4x+9)-(6x+10)]\,[(4x+9)+(6x+10)]$

$M(x)=[7x+8-3x-11]\,[7x+8+3x+11]\ +\ [4x+9-6x-10]\,[4x+9+6x+10]$

$M(x)=(4x-3)\ (10x+19)\ \ +\ (-2x-1)\ (10x+19)\ \ .$

$M(x)$ est maintenant sous la forme d'une somme de deux produits ayant en commun le facteur $(10x+19)$. Donc :

$M(x)=\ (10x+19)\ [(4x-3)+(-2x-1)]=(10x+19)(2x-4)=(10x+19)\times 2(x-2)$

$M(x)=2(10x+19)(x-2)$