# feuille d'exos 4 corrigé - fractions rationnelles



**exercice 1** Justification des résultats donnés dans le tableau ci-dessous .

| l'expression $E(x)$ donnée | calcul de $E(x)$ interdit lorsque | valeur(s) interdite(s) | fraction égale à $E(x)$ |
|---|---|---|---|
| $3x+5+\dfrac{15}{2x-3}$ | $2x-3=0$ | $\dfrac{3}{2}$ | $\dfrac{x\,(6x+1)}{2x-3}$ |
| $\dfrac{4x-1}{2x+1}-\dfrac{2x}{x-3}$ | $2x+1=0$ ou $x-3=0$ | $-\dfrac{1}{2}$ et $3$ | $\dfrac{-15x+3}{(2x+1)\,(x-3)}$ |
| $\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{5x+2}{3x-2}$ | $x-1=0$ ou $3x-2=0$ | $1$ et $\dfrac{2}{3}$ | $\dfrac{4x^2}{(3x-2)\,(x-1)}$ |
| $\dfrac{5}{3x}-\dfrac{2x-1}{x+1}+2$ | $3x=0$ ou $x+1=0$ | $0$ et $-1$ | $\dfrac{14x+5}{3x\,(x+1)}$ |
| $\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{8}{2x+1}+1$ | $2x-1=0$ ou $2x+1=0$ | $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{(2x-3)^2}{(2x-1)\,(2x+1)}$ |
| $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}$ | $x=0$ ou $x+2=0$ ou $x-2=0$ | $0, -2$ et $2$ | $\dfrac{-2x-20}{x\,(x+2)\,(x-2)}$ |
| $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5-2x}{x^2+x}$ | $x+1=0$ ou $x=0$ ou $x^2+x=0$<br>$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$ | $-1$ et $0$ | $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x\,(x+1)}$ |
| $\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{21}{8x+1}-\dfrac{5}{16x^2+2x}$ | $x=0$ ou $8x+1=0$ ou $16x^2+2x=0$<br>$16x^2+2x=0 \Leftrightarrow 2x\,(8x+1)=0$ | $-\dfrac{1}{8}$ et $0$ | $\dfrac{(4x+1)^2}{2x\,(8x+1)}$ |

1) $E(x)=3x+5+\dfrac{15}{2x-3}$ **1-1** ensemble $D$ de définition : $3x+5$ est défini pour tout réel $x$ et $\dfrac{15}{2x-3}$ est défini si et seulement si $2x-3$ est non nul . Donc : pour tout réel $x$ , $x\notin D \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ .

Une seule valeur de $x$ est interdite pour le calcul de $E(x)$ : $\dfrac{3}{2}$ . Par conséquent : $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ .

**1-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$ $E(x)=3x+5+\dfrac{15}{2x-3}=\dfrac{(3x+5)\,(2x-3)}{2x-3}+\dfrac{15}{2x-3}$

$$E(x)=\frac{(3x+5)\,(2x-3)+15}{2x-3}=\frac{6x^2-9x+10x-15+15}{2x-3}=\frac{6x^2+x}{2x-3}=\frac{x\,(6x+1)}{2x-3}$$

2) $E(x)=\dfrac{4x-1}{2x+1}-\dfrac{2x}{x-3}$ **2-1** ensemble $D$ de définition : $\dfrac{4x-1}{2x+1}$ est défini si et seulement si $2x+1$ est non nul ; $\dfrac{2x}{x-3}$ est défini si et seulement si $x-3$ est non nul . Le calcul de $\dfrac{4x-1}{2x+1}-\dfrac{2x}{x-3}$ est interdit lorsque l'un au moins des deux quotients $\dfrac{4x-1}{2x+1}$ et $\dfrac{2x}{x-3}$ n'est pas défini . Donc : pour tout réel $x$ , $x\notin D \Leftrightarrow 2x+1=0$ ou $x-3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=3$ .

Deux valeurs de $x$ sont interdites pour le calcul de $E(x)$ : $-\dfrac{1}{2}$ et $3$ . Par conséquent : $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},3\right\}$ .

**2-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{4x-1}{2x+1}-\frac{2x}{x-3}=\frac{(4x-1)\,(x-3)-2x\,(2x+1)}{(2x+1)\,(x-3)}=\frac{4x^2-12x-x+3-4x^2-2x}{(2x+1)\,(x-3)}=\frac{-15x+3}{(2x+1)\,(x-3)}$$

3) $E(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{5x+2}{3x-2}$ **3-1** ensemble $D$ de définition : $\dfrac{3x+1}{x-1}$ est défini si et seulement si $x-1$ est non nul ; $\dfrac{5x+2}{3x-2}$ est défini si et seulement si $3x-2$ est non nul . $\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{5x+2}{3x-2}$ est calculable si et seulement si $\dfrac{3x+1}{x-1}$ et $\dfrac{5x+2}{3x-2}$ le sont .

Donc : pour tout réel $x$ , $x\notin D \Leftrightarrow x-1=0$ ou $3x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\dfrac{2}{3}$ .

Deux valeurs de $x$ sont interdites pour le calcul de $E(x)$ : $1$ et $\dfrac{2}{3}$ . Par conséquent : $D=\mathbb{R}-\left\{1,\dfrac{2}{3}\right\}$ .

**3-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{3x+1}{x-1}-\frac{5x+2}{3x-2}=\frac{(3x+1)\,(3x-2)-(5x+2)\,(x-1)}{(x-1)\,(3x-2)}=\frac{9x^2-6x+3x-2-\left(5x^2-5x+2x-2\right)}{(x-1)\,(3x-2)}=\frac{4x^2}{(3x-2)\,(x-1)}$$

4) $E(x)=\dfrac{5}{3x}-\dfrac{2x-1}{x+1}+2$ **4-1** ensemble $D$ de définition : $\dfrac{5}{3x}$ n'est pas défini si et seulement si $3x$ est nul ; $\dfrac{2x-1}{x+1}$ n'est pas défini si et seulement si $x+1$ est nul . Donc : pour tout réel $x$ , $x\notin D \Leftrightarrow 3x=0$ ou $x+1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$ .

Deux valeurs de $x$ sont interdites pour le calcul de $E(x)$ : $0$ et $-1$ . Et : $D=\mathbb{R}-\{0,-1\}$ .

**4-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{5}{3x}-\frac{2x-1}{x+1}+2=\frac{5\,(x+1)}{3x\,(x+1)}-\frac{3x\,(2x-1)}{3x\,(x+1)}+\frac{2\times 3x\,(x+1)}{3x\,(x+1)}=\frac{5\,(x+1)-3x\,(2x-1)+6x(x+1)}{3x\,(x+1)}$$

$$E(x)=\frac{5x+5-6x^2+3x+6x^2+6x}{3x\,(x+1)}=\frac{14x+5}{3x\,(x+1)}$$

5) $E(x)=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{8}{2x+1}+1$ **5-1** ensemble $D$ de définition :

$\dfrac{2}{2x-1}$ n'est pas défini si et seulement si $2x-1$ est nul ; $\dfrac{8}{2x+1}$ n'est pas défini si et seulement si $2x+1$ est nul . Donc : pour tout réel $x$ , $x\notin D \Leftrightarrow 2x-1=0$ ou $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=1$ ou $2x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$ .

Deux valeurs de $x$ sont interdites pour le calcul de $E(x)$ : $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$ . Ainsi : $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right\}$ .

**5-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{2}{2x-1}-\frac{8}{2x+1}+1=\frac{2(2x+1)-8(2x-1)+(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4x+2-16x+8+4x^2-1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$E(x)=\frac{4x^2-12x+9}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{(2x)^2-2(6x)+(3)^2}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{(2x-3)^2}{(2x-1)(2x+1)}$$

6) $E(x)=\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}$ **6-1** ensemble $D$ de définition :

$E(x)$ utilise trois quotients de dénominateurs respectifs : $x$ , $x+2$ et $x-2$ . Donc : pour tout réel $x$ ,

$x\notin D \Leftrightarrow x=0$ ou $x+2=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$ ou $x=2$ .

Trois valeurs de $x$ sont interdites pour le calcul de $E(x)$ : $0,-2$ et $2$ . Et : $D=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ .

**6-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{5}{x}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{5(x+2)(x-2)-2x(x-2)-3x(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\frac{5(x^2-4)-2x^2+4x-3x^2-6x}{x(x+2)(x-2)}$$

$$E(x)=\frac{5x^2-20-5x^2-2x}{x(x+2)(x-2)}=\frac{-2x-20}{x(x+2)(x-2)}$$

7) $E(x)=\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5-2x}{x^2+x}$ **7-1** ensemble $D$ de définition : $D=\mathbb{R}-\{-1,0\}$ .

$E(x)$ utilise trois quotients de dénominateurs respectifs : $x+1$ , $x$ et $x^2+x$ . Donc : pour tout réel $x$ ,

$x\notin D \Leftrightarrow x+1=0$ ou $x=0$ ou $x^2+x=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$ ou $x\,(x+1)=0$ .

D'autre part : $x\,(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x+1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$ . Donc :

$x\notin D \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$ ou ( $x=0$ ou $x=-1$ ) $\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$ . Deux valeurs interdites : $-1$ et $0$

**7-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{x-3}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{5-2x}{x^2+x}=\frac{x-3}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{5-2x}{x\,(x+1)}=\frac{x(x-3)+(x+1)-(5-2x)}{x\,(x+1)}=\frac{x^2-3x+x+1-5+2x}{x\,(x+1)}$$

$$E(x)=\frac{x^2-4}{x\,(x+1)}=\frac{x^2-2^2}{x\,(x+1)}=\frac{(x-2)\,(x+2)}{x\,(x+1)}$$

8) $E(x)=\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{21}{8x+1}-\dfrac{5}{16x^2+2x}$ **8-1** ensemble $D$ de définition : $D=\mathbb{R}-\left\{0,-\dfrac{1}{8}\right\}$ .

$E(x)$ utilise trois quotients de dénominateurs respectifs : $x$ , $8x+1$ et $16x^2+2x$ . Donc : pour tout réel $x$ ,

$x\notin D \Leftrightarrow x=0$ ou $8x+1=0$ ou $16x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\dfrac{1}{8}$ ou $16x^2+2x=0$ .

D'autre part : $16x^2+2x=2x(8x+1)$ et $16x^2+2x=0 \Leftrightarrow 2x=0$ ou $8x+1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\dfrac{1}{8}$ . Donc :

$x\notin D \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\dfrac{1}{8}$ ou ( $x=0$ ou $x=-\dfrac{1}{8}$ ) $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\dfrac{1}{8}$ . Deux valeurs interdites : $0$ et $-\dfrac{1}{8}$ .

**8-2** autre expression pour $E(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$E(x)=\frac{x+3}{x}-\frac{21}{8x+1}-\frac{5}{16x^2+2x}=\frac{2(8x+1)\,(x+3)}{2x\,(8x+1)}-\frac{21\,(2x)}{2x\,(8x+1)}-\frac{5}{2x\,(8x+1)}$$

$$E(x)=\frac{2(8x+1)\,(x+3)-42x-5}{2x\,(8x+1)}=\frac{2(8x^2+24x+x+3)-42x-5}{2x\,(8x+1)}=\frac{16x^2+48x+2x+6-42x-5}{2x\,(8x+1)}$$

$$E(x)=\frac{16x^2+8x+1}{2x\,(8x+1)}=\frac{(4x)^2+2\,(4x)+1^2}{2x\,(8x+1)}=\frac{(4x+1)^2}{2x\,(8x+1)}$$

**exercice 2** • $-7x-9=0 \Leftrightarrow -7x=9 \Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{7}$

• Pour tout réel $x$ , $(-8-5x)^2\geq 0$ et :

$(-8-5x)^2=0 \Leftrightarrow -8-5x=0 \Leftrightarrow -5x=8 \Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{5}$

$\dfrac{8}{5}=\dfrac{56}{35}$; $\dfrac{9}{7}=\dfrac{45}{35}$ . $\dfrac{8}{5}>\dfrac{9}{7}$ et $-\dfrac{8}{5}<-\dfrac{9}{7}$ ( $-1<0$ )

• Pour tout réel $x$ , $x^2\geq 0$ et $5>0$ entraîne $5x^2\geq 0$ .

Donc pour tout réel $x$ ,

$5x^2+6\geq 0+6$ soit : $5x^2+6\geq 6$ .

Or : $6>0$ . Donc pour tout réel $x$ , $5x^2+6>0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{8}{5}$ | | $-\frac{9}{7}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-7x-9$ | $+$ | signe de -a | $+$ | $0$ | signe de a , a $=-7$ $-$ |
| $(-8-5x)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $5x^2+6$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\dfrac{(-7x-9)(-8-5x)^2}{5x^2+6}$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**Déduction** : $P(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\dfrac{8}{5}\right\}\cup\left[-\dfrac{9}{7},+\infty\right[$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2$ | | $-$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $15-5x$ | | $+$ | | signe de -a $+$ | | $+$ | $0$ | signe de a , a = – 5 $-$ | |
| $9x-6$ | | signe $-$ | | de -a $-$ | $0$ | signe de $+$ | | a , a = 9 $+$ | |
| $\frac{-2x^2(15-5x)}{9x-6}$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• Pour tout réel $x$ , $x^2 \geq 0$ et $-2 < 0$ .
Donc pour tout réel $x$ , $-2x^2 \leq 0$ .
D'autre part :
$-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
• $15 - 5x = 0 \Leftrightarrow 15 = 5x \Leftrightarrow 3 = x$
• $9x - 6 = 0 \Leftrightarrow 9x = 6 \Leftrightarrow 3x = 2$
et $9x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

déduction : $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{0\} \cup \left]\dfrac{2}{3}, 3\right]$

**exercice 3** Pour chacune des fractions rationnelles proposées , préciser son ensemble $D$ de définition puis obtenir une autre expression permettant ensuite de dresser son tableau de signe .

1) $A(x) = \dfrac{25(x+2)^2 - 16x^2}{5x+6}$ **1-1** ensemble $D$ de définition : $A(x)$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $5x + 6 \neq 0$ .

Donc : pour tout réel $x$ , $x \notin D \Leftrightarrow 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x = -6 \Leftrightarrow x = -\dfrac{6}{5}$ . Par conséquent : $D = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{6}{5}\right\}$ .

**1-2** autre expression pour $A(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$A(x) = \frac{25(x+2)^2 - 16x^2}{5x+6} = \frac{[5(x+2)]^2 - (4x)^2}{5x+6} = \frac{[5(x+2) - 4x]\,[5(x+2) + 4x]}{5x+6} = \frac{[5x+10-4x]\,[5x+10+4x]}{5x+6}$$

$$A(x) = \frac{(x+10)\,(9x+10)}{5x+6}$$

**1-3** signe de $A(x)$

• $x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -10$
• $9x + 10 = 0 \Leftrightarrow 9x = -10 \Leftrightarrow x = -\dfrac{10}{9}$
• $5x + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x = -6 \Leftrightarrow x = -\dfrac{6}{5}$
On a : $-\dfrac{10}{9} = -1.11$ ; $-\dfrac{6}{5} = -1.2$
donc : $-10 < -\dfrac{6}{5} < -\dfrac{10}{9}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-10$ | | $-\frac{6}{5}$ | | $-\frac{10}{9}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+10$ | | signe de −a $-$ | $0$ | signe de $+$ | | a , a = 1 $+$ | | $+$ | |
| $9x+10$ | | $-$ | | signe de -a $-$ | | $-$ | $0$ | signe de a , a = 9 $+$ | |
| $5x+6$ | | signe $-$ | | de -a $-$ | $0$ | signe de a $+$ | | , a = 5 $+$ | |
| $\frac{(x+10)(9x+10)}{5x+6}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2) $B(x) = \dfrac{4x-12}{x+1} + \dfrac{9}{x^2+x}$ **2-1** ensemble $D$ de définition : $B(x)$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $x + 1 \neq 0$ et $x^2 + x \neq 0$ .

Donc : pour tout réel $x$ , $x \notin D \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $(x = 0$ ou $x + 1 = 0)$

Ainsi : $x \notin D \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 0$ . Par conséquent : $D = \mathbb{R} - \{0, -1\}$ .

**2-2** autre expression pour $B(x)$ avec $x$ élément de $D$

$$B(x) = \frac{4x-12}{x+1} + \frac{9}{x^2+x} = \frac{4x-12}{x+1} + \frac{9}{x(x+1)} = \frac{x(4x-12)}{x(x+1)} + \frac{9}{x(x+1)} = \frac{x(4x-12)+9}{x(x+1)} = \frac{4x^2-12x+9}{x(x+1)}$$

$$B(x) = \frac{(2x)^2 - 2(2x)(3) + (3)^2}{x(x+1)} = \frac{(2x-3)^2}{x\,(x+1)}$$

**2-3** signe de $B(x)$

• Pour tout réel $x$ , $(2x-3)^2 \geq 0$ et
$(2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$
• $x = 0$
• $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$-1 < 0 < \dfrac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(2x-3)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | | signe de -a $-$ | $0$ | $+$ | | signe de a $+$ | | , a = 1 $+$ | |
| $\frac{(2x-3)^2}{x(x+1)}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

3) $C(x) = \dfrac{-18x^4 - 48x^3 - 32x^2}{25x^3 - 30x^2 + 9x}$ **3-1** ensemble $D$ de définition : $C(x)$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $25x^3 - 30x^2 + 9x \neq 0$

Donc : pour tout réel $x$ , $x \notin D \Leftrightarrow 25x^3 - 30x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(25x^2 - 30x + 9) = 0 \Leftrightarrow x\left[(5x)^2 - 2(5x)(3) + (3)^2\right] = 0$

$x \notin D \Leftrightarrow x\,(5x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $(5x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{5}$ . Et : $D = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{3}{5}\right\}$ .

**3-2** autre expression pour $C(x)$ avec $x$ élément de $D$

D'après ce qui précède : $25x^3 - 30x^2 + 9x = x\,(5x-3)^2$ . Donc :

$$C(x) = \frac{-18x^4 - 48x^3 - 32x^2}{25x^3 - 30x^2 + 9x} = \frac{-2x^2(9x^2 + 24x + 16)}{x\,(5x-3)^2} = \frac{-2x^2\left[(3x)^2 + 2\,(3x)\,(4) + (4)^2\right]}{x\,(5x-3)^2}$$

$$C(x) = \frac{-2x^2\,(3x+4)^2}{x\,(5x-3)^2} = \frac{-2x\,(3x+4)^2}{(5x-3)^2} .$$

remarque : l'expression simplifiée obtenue n'a pas le même ensemble de définition que $C(x)$ car $\dfrac{-2x\,(3x+4)^2}{(5x-3)^2}$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant $(5x-3)^2 \neq 0$ soit pour tout réel $x$ distinct de $\dfrac{3}{5}$ .

Avec cette forme simplifiée "on a perdu comme contrainte : 0 est une valeur interdite pour le calcul de $C(x)$ ".

**3-3** signe de $C(x)$ avec $x$ élément de $D$ . J'utilise $C(x) = \dfrac{-2x\,(3x+4)^2}{(5x-3)^2}$ avec $x \in D$ soit : $x$ distinct de $\dfrac{3}{5}$ et de 0 .

On doit donc indiquer sur la dernière ligne du tableau une double barre à la verticale du réel 0 bien que le réel 0 ne serve pas de valeur d'annulation pour le dénominateur de la fraction rationnelle trouvée pour la forme simplifiée de $C(x)$ .

- $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Pour tout réel $x$ , $(3x+4)^2 \geq 0$ et $(3x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$
- Pour tout réel $x$ , $(5x-3)^2 \geq 0$ et $(5x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 5x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$
- deux valeurs interdites : $\dfrac{3}{5}$ et 0

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{4}{3}$ | | $0$ | | $\frac{3}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x$ | | signe de $-$a $+$ | | $+$ | 0 | signe de a , a $= -2$ $-$ | | $-$ | |
| $(3x+4)^2$ | | $+$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(5x-3)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $+$ | |
| $C(x) = \frac{-2x(3x+4)^2}{(5x-3)^2}$ avec $x \in D$ | | $+$ | 0 | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |

exercice 4 — inéquations avec fractions rationnelles

- $(I_1) : x \in \mathbb{R}$ , $\dfrac{2x+1}{2x-3} + \dfrac{3-x}{x} \geqslant 0$

**1)** Ensemble $D_1$ de définition

$\dfrac{2x+1}{2x-3} + \dfrac{3-x}{x}$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $2x-3 \neq 0$ et $x \neq 0$ . Donc : pour tout réel $x$ ,

$x \notin D_1 \Leftrightarrow 2x-3 = 0$ ou $x = 0 \Leftrightarrow 2x = 3$ ou $x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = 0$. Par conséquent : $D_1 = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{3}{2}\right\}$ .

**2)** Transformation de l'inégalité avec $x$ élément de $D_1$ . $S_1$ désigne l'ensemble solution de $(I_1)$ . On a :

$$x \in S_1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2x-3} + \frac{3-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x\,(2x+1)}{x\,(2x-3)} + \frac{(3-x)\,(2x-3)}{x\,(2x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x\,(2x+1) + (3-x)\,(2x-3)}{x\,(2x-3)} \geq 0$$

$$x \in S_1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x + 6x - 9 - 2x^2 + 3x}{x\,(2x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10x-9}{x\,(2x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow F_1(x) \geq 0 \text{ en posant : } F_1(x) = \frac{10x-9}{x\,(2x-3)}$$

**3)** Tableau de signe de $F_1(x)$

- $10x - 9 = 0 \Leftrightarrow 10x = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{10}$
- $x = 0$
- $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$0 < \dfrac{9}{10} < 1 < \dfrac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{9}{10}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10x-9$ | | signe de $-$a $-$ | | $-$ | 0 | signe de a , a $=10$ $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x-3$ | | $-$ | | signe de $-$a $-$ | | $-$ | 0 | signe de a , a $=2$ $+$ | |
| $F_1(x) = \frac{10x-9}{x(2x-3)}$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | 0 | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

**4)** Déduction de $S_1$ . En utilisant ce qui précède on obtient :

Pour tout réel $x$ , $x \in S_1 \Leftrightarrow x \in D_1$ et $F_1(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{3}{2}\right\}$ et $x \in \left]0, \dfrac{9}{10}\right] \cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ .

Tout réel $x$ de $\left]0, \dfrac{9}{10}\right] \cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ est bien distinct de 0 et de $\dfrac{3}{2}$ et convient comme solution pour $(I_1)$ .

Conclusion : $S_1 = \left]0, \dfrac{9}{10}\right] \cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ .

• $(I_2) : x \in \mathbb{R}\ ,\ \dfrac{4x^2}{(x-3)^2} \geqslant 1$

**1)** Ensemble $D_2$ de définition

$\dfrac{4x^2}{(x-3)^2}$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $(x-3)^2 \neq 0$ . Donc : pour tout réel $x$ ,

$x \notin D_2 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ . Ainsi : $D_2 = \mathbb{R} - \{3\}$ .

**2)** Transformation de l'inégalité avec $x$ élément de $D_2$ . $S_2$ désigne l'ensemble solution de $(I_2)$ . On a :

$$x \in S_2 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{(x-3)^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{(x-3)^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{(x-3)^2} - \frac{(x-3)^2}{(x-3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-(x-3)^2}{(x-3)^2} \geq 0$$

$$x \in S_2 \Leftrightarrow \frac{(2x)^2-(x-3)^2}{(x-3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{[2x-(x-3)]\,[2x+(x-3)]}{(x-3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{[2x-x+3]\,[2x+x-3]}{(x-3)^2} \geq 0$$

$$x \in S_2 \Leftrightarrow \frac{[x+3]\,[3x-3]}{(x-3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow F_2(x) \geq 0 \text{ en posant : } F_2(x) = \frac{(x+3)\,(3x-3)}{(x-3)^2}$$

**3)** Tableau de signe de $F_2(x)$

- $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
- $3x-3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$
- Pour tout réel $x$ , $(x-3)^2 \geq 0$ et $(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- $-3 < 1 < 3$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | signe de $-$a <br> $-$ | 0 | signe de <br> $+$ | | a , a = 1 <br> $+$ | | $+$ |
| $3x-3$ | signe de <br> $-$ | | - a <br> $-$ | 0 | signe de <br> $+$ | | a , a = 3 <br> $+$ |
| $(x-3)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $+$ |
| $F_2(x) = \dfrac{(x+3)(3x-3)}{(x-3)^2}$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | \|\| | $+$ |

**4)** Déduction de $S_2$ . En utilisant ce qui précède on obtient :

Pour tout réel $x$ , $x \in S_2 \Leftrightarrow x \in D_2$ et $F_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$ et $x \in ]-\infty, -3] \cup [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ .

Tout réel $x$ de $]-\infty, -3] \cup [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ est bien distinct de 3 , appartient donc à $D_2$ et convient comme solution pour $(I_2)$ .

Conclusion : $S_2 = ]-\infty, -3] \cup [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ .

• $(I_3) : x \in \mathbb{R}\ ,\ \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{3x+1}{x+3} < \dfrac{5x^2+1}{x^2-9}$

**1)** Ensemble $D_3$ de définition

Les deux membres de l'inégalité $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{3x+1}{x+3} < \dfrac{5x^2+1}{x^2-9}$ sont définis pour tout réel $x$ vérifiant les trois contraintes :

$x-3 \neq 0$ , $x+3 \neq 0$ et $x^2-9 \neq 0$ . Donc : pour tout réel $x$ ,

$x \notin D_3 \Leftrightarrow x-3 = 0$ ou $x+3 = 0$ ou $x^2-9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ ou $(x-3)\,(x+3) = 0$

$x \notin D_3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3 = 0$ ou ( $x-3 = 0$ ou $x+3 = 0$ ) $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ . Ainsi : $D_3 = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ .

**2)** Transformation de l'inégalité avec $x$ élément de $D_3$ . $S_3$ désigne l'ensemble solution de $(I_3)$ . On a :

$$x \in S_3 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-3} + \frac{3x+1}{x+3} < \frac{5x^2+1}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{2x(x+3)}{(x-3)\,(x+3)} + \frac{(x-3)(3x+1)}{(x-3)\,(x+3)} - \frac{5x^2+1}{(x-3)\,(x+3)} < 0$$

$$x \in S_3 \Leftrightarrow \frac{2x(x+3)+(x-3)(3x+1)-(5x^2+1)}{(x-3)\,(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+6x+3x^2+x-9x-3-5x^2-1}{(x-3)\,(x+3)} < 0$$

$$x \in S_3 \Leftrightarrow \frac{-2x-4}{(x-3)\,(x+3)} < 0 \Leftrightarrow F_3(x) < 0 \text{ en posant : } F_3(x) = \frac{-2x-4}{(x-3)\,(x+3)}$$

**3)** Tableau de signe de $F_3(x)$

- $-2x-4 = 0 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$
- $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
- $-3 < -2 < 3$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $-2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x-4$ | signe de <br> $+$ | | $-$a <br> $+$ | 0 | signe de a <br> $-$ | | , a = -2 <br> $-$ |
| $x-3$ | signe de <br> $-$ | | - a <br> $-$ | | $-$ | 0 | signe de a , a = 1 <br> $+$ |
| $x+3$ | signe de - a <br> $-$ | 0 | signe <br> $+$ | | de a , a = 1 <br> $+$ | | $+$ |
| $F_3(x) = \dfrac{-2x-4}{(x-3)(x+3)}$ | $+$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | \|\| | $-$ |

**4)** Déduction de $S_3$ . En utilisant ce qui précède on obtient :

Pour tout réel $x$ , $x \in S_3 \Leftrightarrow x \in D_3$ et $F_3(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ et $x \in ]-3, -2[ \cup ]3, +\infty[$ .

Tout réel $x$ de $]-3, -2[ \cup ]3, +\infty[$ , étant distinct de $-3$ et de 3 , appartient à $D_3$ et convient comme solution pour $(I_3)$ .

Conclusion : $S_3 = ]-3, -2[ \cup ]3, +\infty[$ .

• $(I_4) : x \in \mathbb{R}\ ,\ \dfrac{4x}{2x-1} - \dfrac{2x}{x-2} \leqslant \dfrac{-5x^2}{(2x-1)(x-2)}$

**1)** Ensemble $D_4$ de définition $D_4 = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$ . En effet :

Les deux membres de l'inégalité $\dfrac{4x}{2x-1} - \dfrac{2x}{x-2} \leq \dfrac{-5x^2}{(2x-1)(x-2)}$ sont définis pour tout réel $x$ vérifiant à la fois :

$2x-1 \neq 0$ , $x-2 \neq 0$ et $(2x-1)(x-2) \neq 0$ . Donc pour tout réel $x$ , $x \notin D_4 \Leftrightarrow 2x-1=0$ ou $x-2=0$ ou $(2x-1)(x-2)=0$

$x \notin D_4 \Leftrightarrow 2x-1=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow 2x=1$ ou $x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=2$

**2)** Transformation de l'inégalité avec $x$ élément de $D_4$ . $S_4$ désigne l'ensemble solution de $(I_4)$ . On a :

$x \in S_4 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{2x-1} - \dfrac{2x}{x-2} \leq \dfrac{-5x^2}{(2x-1)(x-2)} \Leftrightarrow \dfrac{4x(x-2)}{(2x-1)(x-2)} - \dfrac{2x(2x-1)}{(2x-1)(x-2)} - \dfrac{-5x^2}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$

$x \in S_4 \Leftrightarrow \dfrac{4x(x-2)-2x(2x-1)+5x^2}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2-8x-4x^2+2x+5x^2}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x^2-6x}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$

$x \in S_4 \Leftrightarrow \dfrac{x(5x-6)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow F_4(x) \leq 0$ en posant : $F_4(x) = \dfrac{x(5x-6)}{(2x-1)(x-2)}$ .

**3)** Tableau de signe de $F_4(x)$

- $x = 0$
- $5x-6=0 \Leftrightarrow 5x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{5}$
- $2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$
- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $0 < \dfrac{1}{2} < 1 < \dfrac{6}{5} < 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{6}{5}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $5x-6$ | | $-$ | | signe de $-$a $-$ | | $-$ | 0 | signe de a , a = 5 $+$ | | $+$ | |
| $2x-1$ | | signe $-$ | | de - a $-$ | 0 | signe $+$ | | de a , a = 2 $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | signe $-$ | | de - a $-$ | | $-$ | 0 | signe de a = 1 $+$ | |
| $F_4(x) = \dfrac{x(5x-6)}{(2x-1)(x-2)}$ | | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $+$ | |

**4)** Déduction de $S_4$ . En utilisant ce qui précède on obtient :

Pour tout réel $x$ ,

$x \in S_4 \Leftrightarrow x \in D_4$ et $F_4(x) \leq 0$

$x \in S_4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$ et $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[ \cup \left[\dfrac{6}{5}, 2\right[$ . Tout réel $x$ de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[ \cup \left[\dfrac{6}{5}, 2\right[$ , distinct de $\dfrac{1}{2}$ et de $2$ , appartient à $D_4$ et convient comme solution pour $(I_4)$ . Conclusion : $S_4 = \left[0, \dfrac{1}{2}\right[ \cup \left[\dfrac{6}{5}, 2\right[$ .

• $(I_5) : x \in \mathbb{R}\ ,\ \dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} \geqslant \dfrac{-5x+3}{x^2-9}$ **1)** Ensemble $D_5$ de définition $D_5 = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ . En effet :

Les deux membres de l'inégalité $\dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} \geq \dfrac{-5x+3}{x^2-9}$ sont définis pour tout réel $x$ vérifiant à la fois :

$x-3 \neq 0$ , $x+3 \neq 0$ et $x^2-9 \neq 0$ . Donc : pour tout réel $x$ , $x \notin D_5 \Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+3=0$ ou $x^2-9=0$

$x \notin D_5 \Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+3=0$ ou $(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+3=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$ .

**2)** Transformation de l'inégalité avec $x$ élément de $D_5$ . $S_5$ désigne l'ensemble solution de $(I_5)$ . On a :

$x \in S_5 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} \geq \dfrac{-5x+3}{x^2-9} \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \dfrac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} - \dfrac{-5x+3}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

$x \in S_5 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x+3)+x(x-3)-(-5x+3)}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3x+x+3+x^2-3x+5x-3}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+6x}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

$x \in S_5 \Leftrightarrow \dfrac{2x(x+3)}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow F_5(x) \geq 0$ en posant : $F_5(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

**3)** Tableau de signe de $F_5(x)$

- $2x=0 \Leftrightarrow x=0$ • $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | signe de - a $-$ | 0 | signe de $+$ | | a , a = 2 $+$ | |
| $x-3$ | | signe $-$ | | de - a $-$ | 0 | signe de a , a = 1 $+$ | |
| $\dfrac{2x}{x-3}$ | | $+$ | 0 | $-$ | ‖ | $+$ | |

**4)** Déduction de $S_5$ . En utilisant ce qui précède on obtient : Pour tout réel $x$ ,

$x \in S_5 \Leftrightarrow x \in D_5$ et $F_5(x) \geq 0$

$x \in S_5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \text{ et } x \neq -3 \\ x \in ]-\infty, 0] \cup ]3, +\infty[ \end{cases}$

D'autre part : tout réel $x$ de $]-\infty, 0] \cup ]3, +\infty[$ respecte la contrainte : $x \neq 3$ ; le réel $-3$ , qui appartient à l'intervalle $]-\infty, 0]$ , n'appartient pas à $D_5$ et n'est donc pas acceptable comme solution pour $(I_5)$ .

Par conséquent : $S_5 = (]-\infty, 0] \cup ]3, +\infty[) - \{-3\}$ soit encore : $S_5 = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, 0] \cup ]3, +\infty[$

**1-1** tableau n°1 : $f(x)$ est égal à ? :

| | |
|---|---|
| $2x(8-3x)^2$ | $2x^2(8-3x)$ |
| $\dfrac{2x^2}{8-3x}$ | $\dfrac{8-3x}{2x^2}$ |

le tableau n°1 donne le signe de $f(x) = \dfrac{8-3x}{2x^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{8}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ..................... | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| ..................... | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | | $\Vert$ | | $0$ | | |

justifications : ce tableau indique une seule valeur interdite pour $f(x)$ : le réel $0$ . D'autre part :

• $2x(8-3x)^2$ et $2x^2(8-3x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et donc en $0$ .

• Le quotient $\dfrac{2x^2}{8-3x}$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $8-3x \neq 0$ et : $8-3x = 0 \Leftrightarrow 8 = 3x \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} = x$ .

Par conséquent $\dfrac{2x^2}{8-3x}$ est défini en tout réel distinct de $\dfrac{8}{3}$ et $0$ n'est pas une valeur interdite pour le quotient $\dfrac{2x^2}{8-3x}$.

• Le quotient $\dfrac{8-3x}{2x^2}$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $2x^2 \neq 0$ et : $2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

$\dfrac{8-3x}{2x^2}$ n'étant pas défini en $0$ , $\dfrac{8-3x}{2x^2}$ est la seule expression parmi les quatre proposées à avoir $0$ comme valeur interdite .

Il reste à justifier que le tableau de signe incomplet proposé pour $f(x)$ est bien compatible avec $f(x) = \dfrac{8-3x}{2x^2}$ .

tableau de signe de $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{8}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $8-3x$ | | signe de $-a$ $+$ | | $+$ | $0$ | signe de a , $a = -3$ $-$ | |
| $f(x) = \dfrac{8-3x}{2x^2}$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ligne 1 : signe de $2x^2$

Pour tout réel $x$ , $x^2 \geq 0$ et $2 > 0$ .

Donc pour tout réel $x$ , $2x^2 \geq 0$ .

Et : $2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ligne 2 : signe de $8-3x$ $\quad 8-3x = 0 \Leftrightarrow 8 = 3x \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} = x$

1) **1-2** tableau n°2 : $g(x)$ est égal à ? :

| | |
|---|---|
| $(-x-4)(-6x-1)$ | $(x+4)(6x+1)$ |
| $\dfrac{x-4}{12x-2}$ | $(-2x-8)(12x+2)$ |

le tableau n°2 donne le signe de $g(x) = (-2x-8)(12x+2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ..................... | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| ..................... | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | | | $0$ | | $0$ | | |

justifications : ce tableau indique pour $g(x)$ une expression définie sur $\mathbb{R}$ et ayant deux valeurs d'annulation égales à $-4$ et $-\dfrac{1}{6}$ .

D'autre part :

• Le quotient $\dfrac{x-4}{12x-2}$ est défini pour tout réel $x$ vérifiant : $12x-2 \neq 0$ . Et : $12x-2 = 0 \Leftrightarrow 12x = 2 \Leftrightarrow 6x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$.

Par conséquent le quotient $\dfrac{x-4}{12x-2}$ a une valeur interdite ( le réel $\dfrac{1}{6}$ ) et ne peut donc être égal à $g(x)$ qui est défini sur $\mathbb{R}$.

• Les trois produits $(-x-4)(-6x-1)$ , $(x+4)(6x+1)$ , $(-2x-8)(12x+2)$ ont bien $-4$ et $-\dfrac{1}{6}$ comme valeurs d'annulation :

$\rightarrow (-x-4)(-6x-1) = 0 \Leftrightarrow -x-4 = 0$ ou $-6x-1 = 0 \Leftrightarrow -4 = x$ ou $-1 = 6x \Leftrightarrow x = -4$ ou $-\dfrac{1}{6} = x$

$\rightarrow (x+4)(6x+1) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0$ ou $6x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $6x = -1 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -\dfrac{1}{6}$

$\rightarrow (-2x-8)(12x+2) = 0 \Leftrightarrow -2x-8 = 0$ ou $12x+2 = 0 \Leftrightarrow -2x = 8$ ou $12x = -2 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -\dfrac{1}{6}$

Par conséquent : $g(x)$ est l'un de ces trois produits . D'autre part :

$\rightarrow$ la ligne 2 du tableau n°2 impose que le facteur du type $ax+b$ de degré un s'annulant en $-4$ doit être strictement négatif pour $x > -4$ . Par théorème un facteur de degré un du type $ax+b$ est du signe de son coefficient $a$ pour $x$ strictement supérieur à sa valeur d'annulation .

Pour les facteurs $-x-4$ et $-2x-8$ on a respectivement : $a = -1$ et $a = -2$ , pour le facteur $x+4$ : $a = 1$ .

Donc $-x-4$ et $-2x-8$ respectent la contrainte de signe fixée pour $x > -4$ ce qui n'est pas le cas de $x+4$ .

$(x+4)(6x+1)$ ne peut donc être égal à $g(x)$ et $g(x)$ est l'un des deux autres produits : $(-x-4)(-6x-1)$ , $(-2x-8)(12x+2)$ .

→ la ligne 1 du tableau n°2 impose que le facteur du type $ax+b$ de degré un s'annulant en $-\dfrac{1}{6}$ doit être strictement positif pour $x>-\dfrac{1}{6}$ . Pour $x>-\dfrac{1}{6}$ le facteur $12x+6$ est du signe de $a=12$ ( soit strictement positif ) . Pour $x>-\dfrac{1}{6}$ le facteur $-6x-1$ est du signe de $a=-6$ ( soit strictement négatif ) .

Donc : seul le facteur $12x+6$ respecte la contrainte de signe fixée pour $x>-\dfrac{1}{6}$ ce qui élimine le produit $(-x-4)(-6x-1)$ pour le choix du produit égal à $g(x)$ .

Avec ce qui précède on déduit : le seul des trois produits $(-x-4)(-6x-1)$ , $(x+4)(6x+1)$ , $(-2x-8)\,(12x+2)$ qui soit compatible avec les lignes 1 et 2 du tableau n°2 est $(-2x-8)\,(12x+2)$ .

Il reste à vérifier que le tableau de signe incomplet proposé pour $g(x)$ est compatible avec $g(x)=(-2x-8)\,(12x+2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12x+2$ | | signe de - a $-$ | | $-$ | $0$ | signe de a , a = 12 $+$ | |
| $-2x-8$ | | signe de - a $+$ | $0$ | signe de a $-$ | | , a = - 2 $-$ | |
| $g(x)=(12x+2)(-2x-8)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

tableau de signe de $g(x)$

ligne 1 : signe de $12x-2$

$12x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{6}$

ligne 2 : signe de $-2x-8$

$-2x-8=0 \Leftrightarrow x=-4$

**2) 2-1** Résolution de $(I_1)$ : $x\in\mathbb{R}\ ,(5x-3)^2-(7x+5)^2\geq 0$

On note $S_1$ l'ensemble solution de $(I_1)$ . Pour tout réel $x$ , $x\in S_1 \Leftrightarrow (5x-3)^2-(7x+5)^2\geq 0$ .

Le premier membre de l'inégalité à traiter est de la forme $a^2-b^2$ et pour tous réels $a$ et $b$ : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ .

Donc : $x\in S_1 \Leftrightarrow [(5x-3)+(7x+5)]\,[(5x-3)-(7x+5)]\geq 0 \Leftrightarrow [5x-3+7x+5]\,[5x-3-7x-5]\geq 0$

Et : $x\in S_1 \Leftrightarrow (12x+2)\,(-2x-8)\geq 0$ soit : $x\in S_1 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ ( d'après la question **1** : $(12x+2)\,(-2x-8)=g(x)$ )

Le tableau n°2 donnant le signe de $g(x)$ permet de déduire : $x\in S_1 \Leftrightarrow x\in\left[-4,-\dfrac{1}{6}\right]$ .

Ainsi : $S_1=\left[-4,-\dfrac{1}{6}\right]$

**2-2** Résolution de $(I_2)$ : $x\in\mathbb{R}\ ,\dfrac{4}{x^2}\geq\dfrac{3}{2x}$

→ Ensemble $D_2$ de définition   $D_2=\mathbb{R}-\{0\}$ . En effet :

Les deux membres de l'inégalité $\dfrac{4}{x^2}\geq\dfrac{3}{2x}$ sont définis pour tout réel $x$ vérifiant à la fois : $x^2\neq 0$ et $2x\neq 0$ .

Donc : pour tout réel $x$ , $x\notin D_2 \Leftrightarrow x^2=0$ ou $2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=0 \Leftrightarrow x=0$ et : $x\in D_2 \Leftrightarrow x\neq 0$

→ Transformation de l'inégalité .

$S_2$ désigne l'ensemble solution de $(I_2)$ et $x$ est un élément de $D_2$ . On a :

$x\in S_2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x^2}\geq\dfrac{3}{2x} \Leftrightarrow \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{2x}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{2x^2}-\dfrac{3x}{2x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{8-3x}{2x^2}\geq 0$

On a donc : $x\in S_2 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$ car $\dfrac{8-3x}{2x^2}=f(x)$ d'après la question **1 .**

→ Déduction de $S_2$ .

Pour tout réel $x$ , $x\in S_2 \Leftrightarrow x\in D_2$ et $f(x)\geq 0$

En utilisant $D_2$ et le tableau n°1 on obtient : $x\in S_2 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\left]0,\dfrac{8}{3}\right]$ .

Tout réel $x$ de $]-\infty,0[\,\cup\left]0,\dfrac{8}{3}\right]$ respecte la contrainte : $x\neq 0$ et convient comme solution pour $(I_2)$ .

Conclusion : $S_2=\,]-\infty,0[\,\cup\left]0,\dfrac{8}{3}\right]$

math - lycée

PB