feuille d'exos 4 énoncé - fractions rationnelles

exercice 1 Justifier les résultats donnés dans le tableau ci-dessous : pour chacune des expressions rationnelles $E(x)$ du tableau on demande :

1) de rechercher la (ou les) valeur(s) interdite(s) puis d'en déduire l'ensemble de définition D de $E(x)$

2) d'utiliser ensuite avec x élément de D une réduction au même dénominateur pour écrire $E(x)$ sous la forme d'une seule fraction rationnelle dont les numérateur et dénominateur se présentent sous une forme factorisée

l'expression $E(x)$ donnée	calcul de $E(x)$ interdit lorsque	valeur(s) interdite(s)	fraction égale à $E(x)$
$3x+5+\dfrac{15}{2x-3}$	$2x-3=0$	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{x\,(6x+1)}{2x-3}$
$\dfrac{4x-1}{2x+1}-\dfrac{2x}{x-3}$	$2x+1=0$ ou $x-3=0$	$-\dfrac{1}{2}$ et 3	$\dfrac{-15x+3}{(2x+1)\,(x-3)}$
$\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{5x+2}{3x-2}$	$x-1=0$ ou $3x-2=0$	1 et $\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{4x^2}{(3x-2)\,(x-1)}$
$\dfrac{5}{3x}-\dfrac{2x-1}{x+1}+2$	$3x=0$ ou $x+1=0$	0 et -1	$\dfrac{14x+5}{3x\,(x+1)}$
$\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{8}{2x+1}+1$	$2x-1=0$ ou $2x+1=0$	$\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{(2x-3)^2}{(2x-1)\,(2x+1)}$
$\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}$	$x=0$ ou $x+2=0$ ou $x-2=0$	$0, -2$ et 2	$\dfrac{-2x-20}{x\,(x+2)\,(x-2)}$
$\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5-2x}{x^2+x}$	$x+1=0$ ou $x=0$ ou $x^2+x=0$ $x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0$	-1 et 0	$\dfrac{(x-2)(x+2)}{x\,(x+1)}$
$\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{21}{8x+1}-\dfrac{5}{16x^2+2x}$	$x=0$ ou $8x+1=0$ ou $16x^2+2x=0$ $16x^2+2x=0 \Leftrightarrow 2x\,(8x+1)=0$	$-\dfrac{1}{8}$ et 0	$\dfrac{(4x+1)^2}{2x\,(8x+1)}$

exercice 2 Compléter (en justifiant) les tableaux de signe suivants puis les déductions demandées :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-7x-9$	
$(-8-5x)^2$	
$5x^2+6$	
$P(x)=\dfrac{(-7x-9)(-8-5x)^2}{5x^2+6}$	

déduction : $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-2x^2$	
$15-5x$	
$9x-6$	
$Q(x)=\dfrac{-2x^2\,(15-5x)}{9x-6}$	

déduction : $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow$

exercice 3 On considère les fractions rationnelles suivantes :

$$A(x)=\frac{25(x+2)^2-16x^2}{5x+6} \qquad B(x)=\frac{4x-12}{x+1}+\frac{9}{x^2+x} \qquad C(x)=\frac{-18x^4-48x^3-32x^2}{25x^3-30x^2+9x}$$

Pour chacune de ces fractions rationnelles :

→ préciser son ensemble D de définition

→ puis la transformer pour obtenir une autre forme permettant d'étudier son signe à l'aide d'un tableau

→ puis dresser le tableau de signe pour la forme obtenue précédemment .

exercice 4 Résoudre les inéquations intervenant dans le tableau ci-dessous en se ramenant à l'utilisation d'un tableau donnant le signe d'une fraction rationnelle $F(x)$ dont les numérateur et dénominateur ont une forme factorisée .
On note D l'ensemble de définition des deux membres de l'inégalité (I) proposée : D est l'ensemble $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites .
L'ensemble solution de l'inéquation à résoudre est noté S ($S \subset D$)

Plan à suivre pour chaque résolution

1) Ensemble D de définition (en recherchant les valeurs interdites)

2) Transformation de l'inégalité avec x élément de D

S désignant l'ensemble solution de (I) , construire une équivalence de l'un des quatre types suivants :

$x \in S \Leftrightarrow F(x) \geq 0$ ou bien $x \in S \Leftrightarrow F(x) \leq 0$ ou bien $x \in S \Leftrightarrow F(x) > 0$ ou bien $x \in S \Leftrightarrow F(x) < 0$

3) Tableau de signe de $F(x)$

4) Déduction de S . Par exemple : en ayant trouvé à la deuxième étape : $F(x) \geq 0$, le début de la rédaction de cette partie est :
Pour tout réel x , $x \in S \Leftrightarrow x \in D$ et $F(x) \geq 0$

L'inéquation à résoudre	ensemble D	$x \in S \Leftrightarrow ?$	ensemble solution S
$(I_1) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{2x+1}{2x-3} + \dfrac{3-x}{x} \geq 0$	$\mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{3}{2}\right\}$	$\dfrac{10x-9}{x\,(2x-3)} \geq 0$	$\left]0, \dfrac{9}{10}\right] \cup \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$
$(I_2) : x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\ , \dfrac{4x^2}{(x-3)^2} \geq 1$	$\mathbb{R} - \{3\}$	$\dfrac{(x+3)\,(3x-3)}{(x-3)^2} \geq 0$	$]-\infty, -3] \cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$
$(I_3) : x \in \mathbb{R}\ , \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{3x+1}{x+3} < \dfrac{5x^2+1}{x^2-9}$	$\mathbb{R} - \{-3, 3\}$	$\dfrac{-2x-4}{(x-3)(x+3)} < 0$	$]-3, -2[\cup]3, +\infty[$
$(I_4) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{4x}{2x-1} - \dfrac{2x}{x-2} \leq \dfrac{-5x^2}{(2x-1)(x-2)}$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$	$\dfrac{x(5x-6)}{(2x-1)\,(x-2)} \leq 0$	$\left[0, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{6}{5}, 2\right[$
$(I_5) : x \in \mathbb{R}, \dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} \geq \dfrac{-5x+3}{x^2-9}$	$\mathbb{R} - \{-3, 3\}$	$\dfrac{2x}{x-3} \geq 0$	$]-\infty, -3[\cup]-3, 0] \cup]3, +\infty[$

exercice 5 **1)** le tableau n°1 donne le signe d'une expression notée $f(x)$ et le tableau n°2 donne le signe d'une expression notée $g(x)$. On propose quatre formes possibles pour chacune des expressions $f(x)$ et $g(x)$. Entourer la seule forme qui est compatible avec le tableau de signe donné et justifier votre choix . Compléter ensuite le tableau de signe pour la forme choisie en justifiant chaque ligne de signe .

tableau n°1 : $f(x)$ est égal à ? :

$2x(8-3x)^2$	$2x^2(8-3x)$
$\dfrac{2x^2}{8-3x}$	$\dfrac{8-3x}{2x^2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
....		+	0	+		+	
....		+		+	0	−	
$f(x)$			‖		0		

tableau n°2 : $g(x)$ est égal à ? :

$(-x-4)(-6x-1)$	$(x+4)(6x+1)$
$\dfrac{x-4}{12x-2}$	$(-2x-8)\,(12x+2)$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
....		−		−	0	+	
....		+	0	−		−	
$g(x)$			0		0		

2) En déduire la résolution de chacune des deux inéquations suivantes :

(I_1) : $x \in \mathbb{R}$, $(5x-3)^2 - (7x+5)^2 \geq 0$ (I_2) : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{4}{x^2} \geq \dfrac{3}{2x}$