Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: des vocabulaires à connaître

$\longrightarrow$ PREMIERS VOCABULAIRES

définition 1 On appelle **fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$** tout procédé formel f qui à un réel quelconque x associe au plus un réel y .

Lorsque ce réel y existe (en étant donc unique) , il est appelé **l'image du réel x par la fonction f** .

L'image du réel x par f est **notée f(x)** et la fonction f est notée $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\longmapsto f(x)\end{array}$

définition 2 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels x pour lesquels f(x) est calculable est appelé **l'ensemble de définition de f** et est noté **noté D_f** .

des exemples : (f(x) est calculable si et seulement si x est élément de D_f et x est élément de D_f se note : $x \in D_f$) .

$f(x) =$	$ax+b$	x^2	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	x^3	ax^2+bx+c
$x \in D_f$ *signifie*	$x\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$	$x \geq 0$ soit $x \in \mathbb{R}^+$	$x \neq 0$ soit $x \in \mathbb{R}-\{0\}$	$x\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$

remarque : avec un intervalle I inclus dans D_f , l'ensemble des images f(x) des réels x appartenant à l'intervalle I est noté f(I) .
On note : $f(I) = \{\, f(x)\,, x \in I\}$

définition 3 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et b est un réel quelconque .

Tout réel x de D_f vérifiant l'égalité $f(x) = b$ est appelé **UN antécédent de b pour f** .

point de vue algébrique : Rechercher les éventuels antécédents de b pour f revient à résoudre l'équation (E) suivante :

$$(E) : x \in D_f \ , \ f(x) = b$$

définition 4 Le plan est muni d'un repère R d'origine O et f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

L'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan vérifiant $x \in D_f$ et $y = f(x)$ est appelé la **la représentation graphique de f** relative au repère R . Cet ensemble , noté $\mathcal{C}_f$, est aussi appelé courbe représentative de f dans le plan muni du repère R .

On a : $\mathcal{C}_f = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \ / \ x \in D_f \text{ et } y = f(x) \right\} = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} \ / \ x \in D_f \right\}$.

Pour traduire l'appartenance d'un point A à une courbe $\mathcal{C}_f$ on utilise : $\boxed{A \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x_A \in D_f \text{ et } y_A = f(x_A)}$.

point de vue graphique

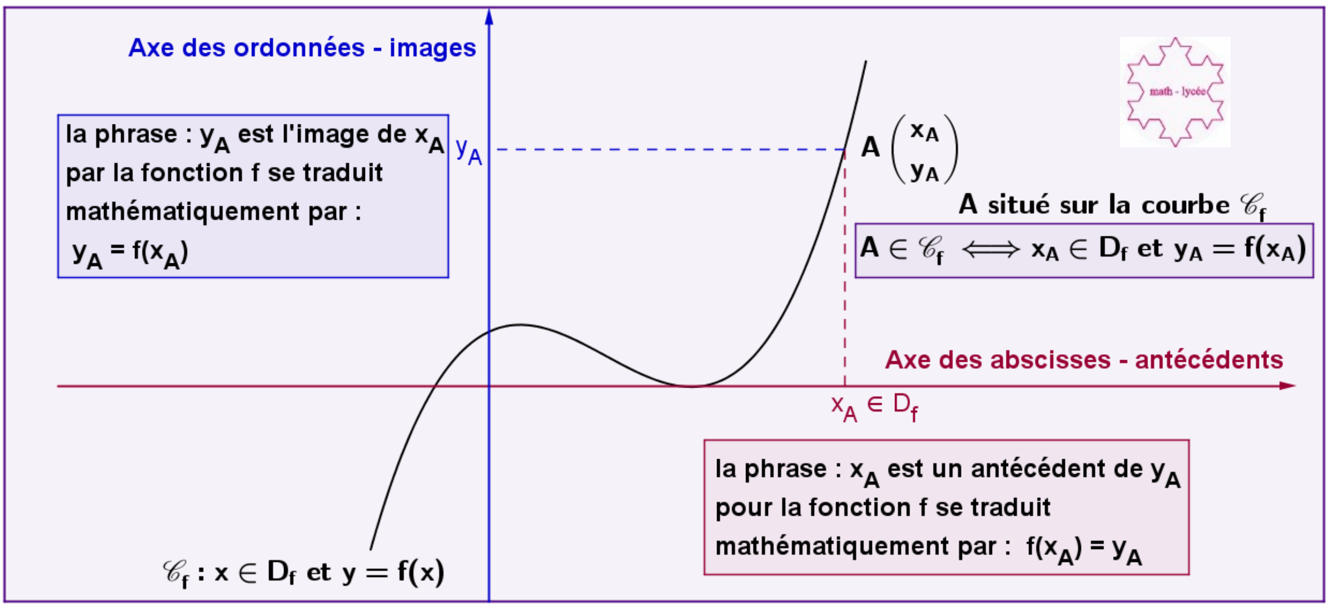
$\rightarrow$ D_f est l'ensemble des abscisses de tous les points situés sur la courbe $\mathcal{C}_f$.

$\rightarrow$ Toute représentation graphique de f contient au plus un point d'abscisse x_0 donnée et donc coupe une droite $D : x = x_0$ parallèle à l'axe des ordonnées en au plus un point . Avec $D \cap \mathcal{C}_f = \varnothing$ on déduit : $x_0 \notin D_f$.

$\rightarrow$ L'image d'un réel a de D_f est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ qui a pour abscisse a .

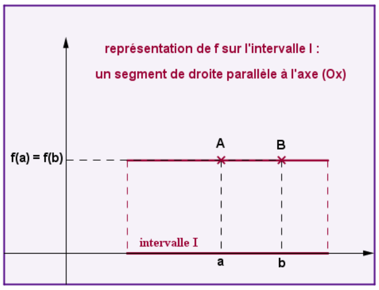
$\rightarrow$ Un antécédent d'un réel b est , quand il existe , l'abscisse d'un point de $\mathcal{C}_f$ qui a pour ordonnée b .

Par conséquent : déterminer les éventuels antécédents de b revient à déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\Delta : y = b$ ($\Delta//(Ox)$) .



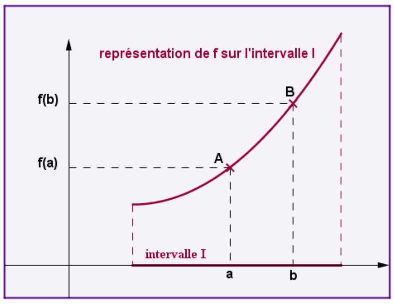
f est dite constante sur I ssi :

Pour tous réels a et b de I ,
$f(a) = f(b)$



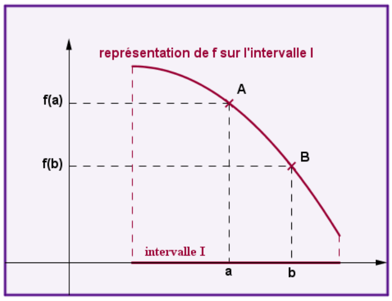
f strictement croissante sur I ssi :

Pour tous réels a et b de I ,
si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$



f strictement décroissante sur I ssi :

Pour tous réels a et b de I ,
si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$



→ <u>une **fonction strictement croissante sur I**</u> attribue à deux réels distincts a et b deux images distinctes f(a) et f(b) qui se comparent comme a et b : c'est le plus petit des deux réels a et b qui a la plus petite image par f .
Les différences $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de même signe et le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est strictement positif .
Lorsque x croît de la valeur a à la valeur b , l'image f(x) croît de la valeur f(a) à la valeur f(b) .

→ <u>une **fonction strictement décroissante sur I**</u> attribue à deux réels distincts a et b deux images distinctes f(a) et f(b) qui se comparent en sens contraire à celui de a et de b : c'est le plus petit des deux réels a et b qui a la plus grande image par f et lorsque x croît de la valeur a à la valeur b , l'image f(x) décroît de la valeur f(a) à la valeur f(b) .
Les différences $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de signes contraires et le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est strictement négatif .

autres vocabulaires → <u>une **fonction** est dite **strictement monotone sur I**</u> si et seulement si elle est soit strictement croissante sur I , soit strictement décroissante sur I (une telle fonction attribue à deux réels distincts a et b deux images distinctes f(a) et f(b)) .

→ **étudier le sens de variation d'une fonction** revient à déterminer les intervalles sur lesquels elle est strictement monotone puis de résumer cette étude dans un tableau dit **tableau de variation pour f .**

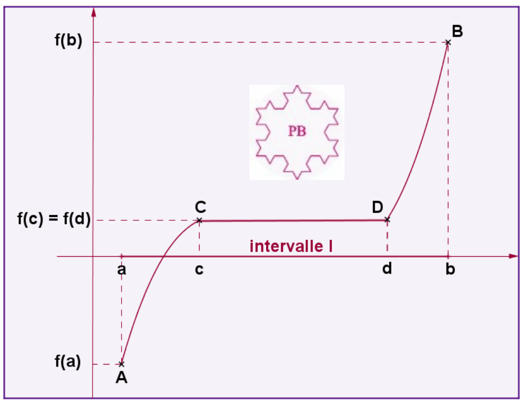
x	$-\infty$		-1		3		8		$+\infty$
f(x)	4	↘	2	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

<u>exemple</u> → ce tableau de variation codifie :
f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$
puis strictement croissante sur $[-1, 3]$
puis strictement décroissante sur $[3, 8]$
puis strictement croissante sur $[8, +\infty[$
→ ce tableau donne trois images par f :
$2 = f(-1)$, $5 = f(3)$ et $-3 = f(8)$

→ le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ qui représente graphiquement le **coefficient directeur de la droite (AB)** passant par les deux points distincts $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}_f$ est appelé le **taux de variation de f entre a et b** ou bien le taux d'accroissement de f entre a et b .

→ f est croissante sur I ssi f vérifie :

<u>Pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$</u>



remarque :
Contrairement à une fonction strictement croissante , une fonction croissante peut attibuer à deux réels distincts des images qui sont égales !

→ f est croissante sur I ssi f vérifie :

<u>Pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$</u>