Fonctions Début - corrigés feuille 2

Lectures graphiques : comment rédiger les réponses ?

Très souvent , la réponse se rédige en trois étapes :

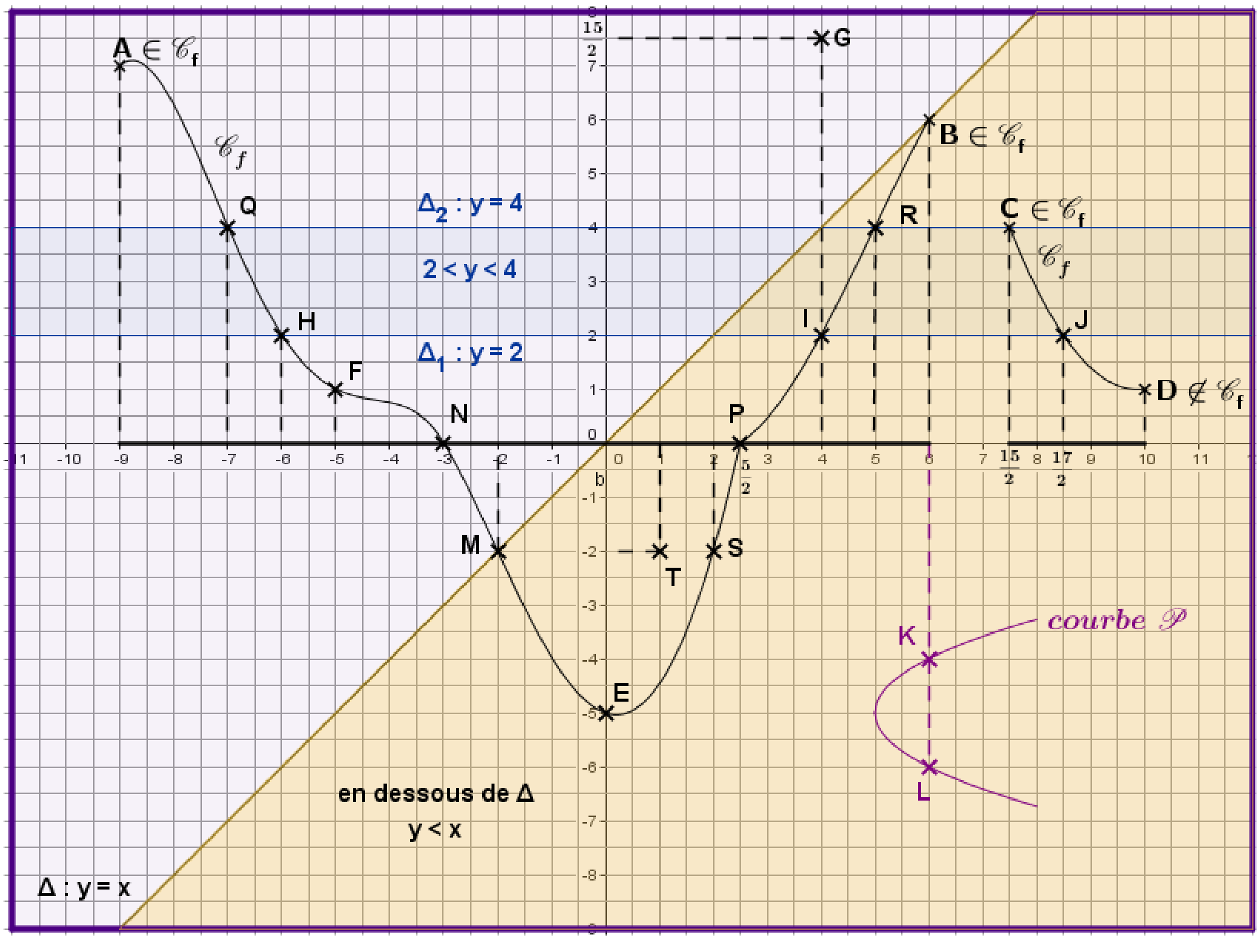
étape 1 : on explique ce que l'on doit observer sur la figure et on rajoute éventuellement sur cette figure les objets utiles pour la lecture graphique demandée (point , droite , ..) et on complète la légende de la figure (nom des points , nom des droites avec leurs équations , valeurs des coordonnées des points utilisés , etc..)

étape 2 : on effectue la lecture graphique après avoir rédigé : **Graphiquement on obtient :**

étape 3 : on donne la réponse en reprenant le langage de la question posée .

exercice 1 La figure met en évidence la droite $\Delta : y = x$, une courbe $\mathcal{P}$ et donne la représentation graphique C_f d'une fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal d'origine O . On note D_f l'ensemble de définition de f .

La courbe C_f contient les points A , B , C mais ne contient pas le point D .



Par lecture graphique , compléter le tableau suivant de valeurs prises par f :

Le point à observer sur C_f	A	Q	H	F	N	M	E	S	P	I	R	B	C	J
son abscisse x	-9	-7	-6	-5	-3	-2	0	2	$\frac{5}{2}$	4	5	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$
f(x) : son ordonnée	7	4	2	1	0	-2	-5	-2	0	2	4	6	4	2

1) Déterminer graphiquement l'ensemble D_f de définition de f .

La courbe C_f contient les points A , B , C mais ne contient pas le point D . L'ensemble D_f de définition de f est l'ensemble des abscisses de tous les points situés sur la courbe C_f .

Graphiquement on obtient : $D_f = [x_A, x_B] \cup [x_C, x_D[$ soit : $\boxed{D_f = [-9, 6] \cup \left[\frac{15}{2}, 10\right[}$

2) Que vaut l'image par f du réel 0 ?

L'image par f du réel 0 , notée f(0) , est l'ordonnée du point de C_f qui a pour abscisse 0 .

Graphiquement , on obtient : C_f contient le point $E\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Donc $f(x_E) = y_E$ soit : $f(0) = -5$

3) le réel 1 a-t-il pour image par f le nombre -2 ?

Le réel 1 a pour image par f le nombre -2 si et seulement si : $f(1) = -2$ soit si et seulement si la courbe C_f contient le point $T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Graphiquement , on obtient : $T \notin C_f$. Par conséquent : -2 n'est pas l'image du réel 1 par f .

4) $\dfrac{15}{2}$ a-t-il pour antécédent pour f le réel 4 ?

4 est un antécédent de $\dfrac{15}{2}$ pour f si et seulement si : $f(4) = \dfrac{15}{2}$ soit si et seulement si la courbe C_f contient le point $G\begin{pmatrix} 4 \\ \dfrac{15}{2} \end{pmatrix}$.

Graphiquement , on obtient : $G \notin C_f$. Par conséquent : 4 n'est pas un antécédent de $\dfrac{15}{2}$ pour f .

5) Déterminer les antécédents du réel 2 pour f .

Les antécédents du réel 2 pour sont , quand ils existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite $\Delta_1 : y = 2$ ($\Delta_1 // (Ox)$) . Graphiquement on obtient : C_f coupe Δ_1 en trois points : $H\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix} \dfrac{17}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent : les antécédents du réel 2 pour sont : $-6, 4$ et $\dfrac{17}{2}$.

6) Peut-on trouver un réel x qui soit égal à son image par f ?

On peut trouver un réel x égal à son image f(x) par f si et seulement si on peut trouver sur C_f un point ayant son abscisse x égale à son ordonnée f(x) ; un tel point est situé sur la droite $\Delta : y = x$. Graphiquement , on obtient : C_f contient le point $M\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $f(x_M) = y_M$ soit : $f(-2) = -2$. Ainsi : le réel -2 est égal à son image par f .

7) Résoudre graphiquement l'équation $(\boldsymbol{E})$: $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

Les solutions de $(\boldsymbol{E})$ sont , quand elles existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe $(Ox) : y = 0$.

Graphiquement , on obtient : C_f coupe (Ox) en deux points : $N\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi : les solutions de $(\boldsymbol{E})$ sont : -3 et $\dfrac{5}{2}$.

8) Résoudre graphiquement l'inéquation $(\boldsymbol{I})$: $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

Les solutions de $(\boldsymbol{I})$ sont , quand elles existent , les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de l'axe $(Ox) : y = 0$.

Graphiquement , on obtient pour l'ensemble solution S_8 de $(\boldsymbol{I})$:

$S_8 = [x_A, x_N[\cup]x_P, x_B] \cup [x_C, x_D[$ soit : $S_8 = [-9, -3[\cup \left]\dfrac{5}{2}, 6\right] \cup \left[\dfrac{15}{2}, 10\right[$

9) Déterminer graphiquement l'ensemble S_9 des réels x vérifiant : $x \in \mathbb{R}$, $2 < f(x) \leq 4$

Les réels x vérifiant l'encadrement $2 < f(x) \leq 4$ sont , quand ils existent , les abscisses des points de la courbe C_f situés à la fois au dessus de $\Delta_1 : y = 2$ et en dessous de $\Delta_2 : y = 4$ ou sur Δ_2 .

Graphiquement , on obtient : $S_9 = [x_Q, x_H[\cup]x_I, x_R] \cup [x_C, x_J[$ soit : $S_9 = [-7, -6[\cup]4, 5] \cup \left[\dfrac{15}{2}, \dfrac{17}{2}\right[$

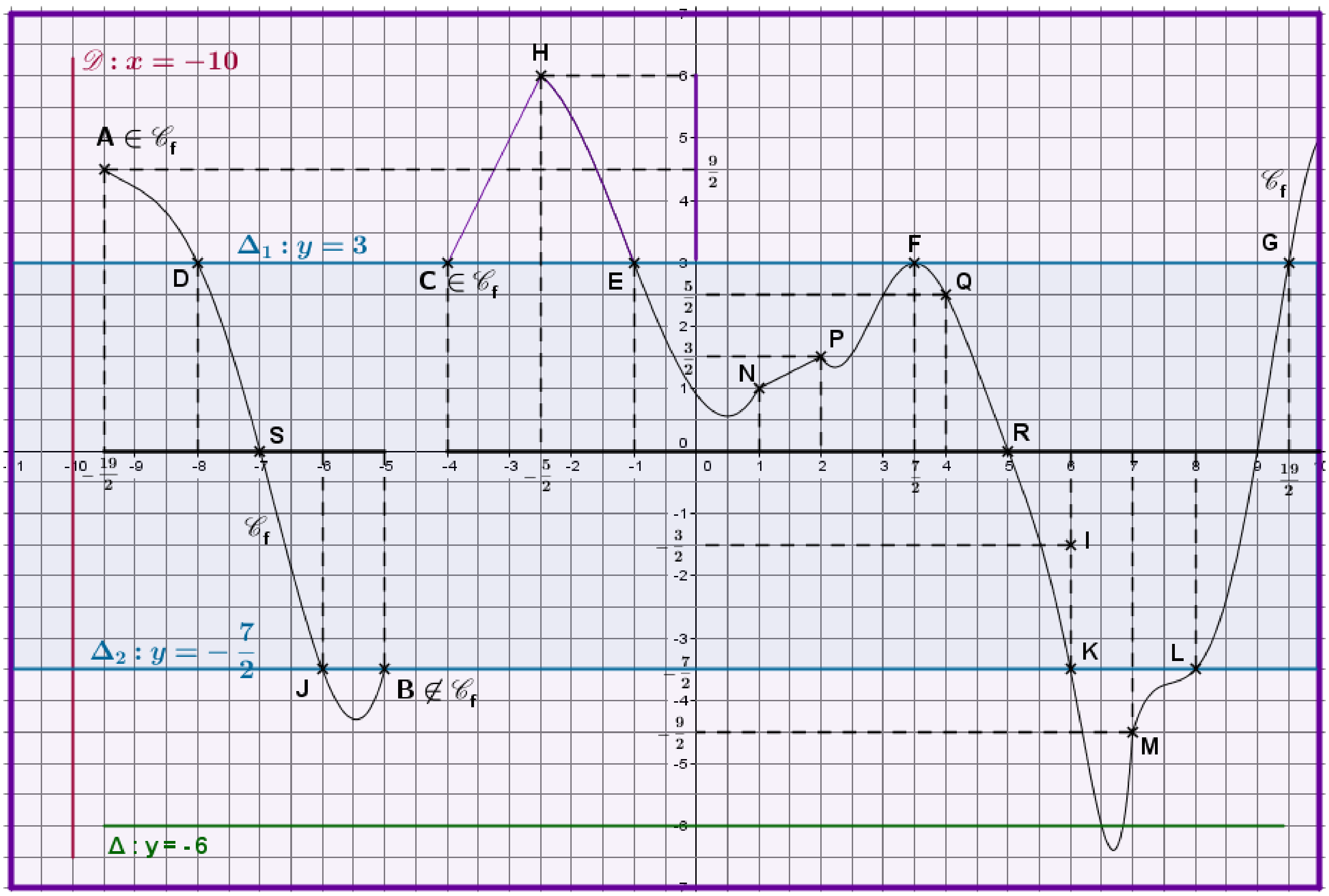
10) La courbe $\mathcal{P}$ peut-elle être considérée comme la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

La représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ contient au plus un point d'abscisse 6 . Cette contrainte n'est pas respectée par la courbe $\mathcal{P}$ qui contient deux points d'abscisse 6 : K et L . La courbe $\mathcal{P}$ ne peut donc être considérée comme la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

11) Déterminer graphiquement l'ensemble S_{11} des réels x vérifiant : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x$

L'ensemble S_{11} des réels x vérifiant l'inégalité $f(x) \leq x$ sont , quand ils existent , les abscisses des points de la courbe C_f situés sur $\Delta : y = x$ ou en dessous de Δ . Graphiquement , on obtient : $S_{11} = [x_M, x_B] \cup [x_C, x_D[$ soit : $S_{11} = [-2, 6] \cup \left[\dfrac{15}{2}, 10\right[$.

exercice 2 La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal d'origine O . **La courbe C_f contient les points A et C mais ne contient pas le point B**



Par lecture graphique , compléter la table suivante de valeurs prises par f :

Le point à observer sur C_f	A	D	B	C	H	E	N	P	F	Q	K	M	L	G
son abscisse x	$-\frac{19}{2}$	-8	-5	-4	$-\frac{5}{2}$	-1	1	2	$\frac{7}{2}$	4	6	7	8	$\frac{19}{2}$
son ordonnée f(x)	$\frac{9}{2}$	3	$-\frac{7}{2}$	3	6	3	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{7}{2}$	3

1) Le réel -10 est-il élément de l'ensemble de définition de f (noté D_f) ?

Le réel -10 est élément de l'ensemble D_f de définition de f si et seulement si la courbe C_f contient un point d'abscisse -10, soit un point situé sur la droite $\mathcal{D} : x = -10$. Graphiquement on obtient : $\mathcal{D} \cap C_f = \varnothing$. Donc : $-10 \notin D_f$.

2) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de f

La courbe C_f contient les points A et C mais ne contient pas le point B . L'ensemble D_f de définition de f est l'ensemble des abscisses de tous les points situés sur la courbe C_f et

Graphiquement on obtient : $D_f = [x_A, x_B[\cup [x_C, +\infty[$ soit $\boxed{D_f = \left[-\frac{19}{2}, -5\right[\cup [-4, +\infty[}$

3) Déterminer les antécédents du réel 3 pour f

Les antécédents du réel 3 pour sont , quand ils existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite $\Delta_1 : y = 3$. Graphiquement on obtient : C_f coupe Δ_1 en cinq points : $D\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\3\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}\frac{19}{2}\\3\end{pmatrix}$.

Par conséquent : les antécédents du réel 3 pour sont : $-8, -4, -1, \frac{7}{2}$ et $\frac{19}{2}$.

4) Quelle est l'image du réel $-\dfrac{5}{2}$ par f ?

L'image par f du réel $-\dfrac{5}{2}$, notée $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)$, est l'ordonnée du point de C_f qui a $-\dfrac{5}{2}$ pour abscisse .

Graphiquement , on obtient : C_f contient le point H$\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$. Donc $f(x_H) = y_H$ soit : $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 6$.

5) le réel $-\dfrac{3}{2}$ a-t-il pour antécédent pour f le réel 6 ?

6 est un antécédent de $-\dfrac{3}{2}$ pour f si et seulement si : $f(6) = -\dfrac{3}{2}$ soit si et seulement si la courbe C$_f$ contient le point I$\begin{pmatrix} 6 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Graphiquement , on obtient : $I \notin C_f$. Par conséquent : 6 n'est pas un antécédent de $-\dfrac{3}{2}$ pour f .

6) Résoudre graphiquement l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{7}{2}$

Les solutions de $(\boldsymbol{E})$: $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{7}{2}$ sont , quand elles existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C$_f$ et de la droite $\Delta_2 : y = -\dfrac{7}{2}$.

Graphiquement , on obtient (B non situé sur C$_f$) : C$_f$ coupe Δ_2 en trois points : $J\begin{pmatrix} -6 \\ -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} 6 \\ -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 8 \\ -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi : les solutions de $(\boldsymbol{E})$ sont : $-6, 6$ et 8 .

7) Lorsque x est élément de l'intervalle [-4,-1] , à quel ensemble appartient son image par f ?

L'image par f du réel x , notée $f(x)$, est l'ordonnée du point de C_f qui a pour abscisse x . Les points C et E ont respectivement -4 et -1 pour abscisse et ont la même ordonnée égale à 3 . En utilisant l'arc de courbe de C$_f$ ayant pour extrémités C et E on obtient graphiquement : avec x élément de l'intervalle [-4,-1] , f(x) est élément de l'intervalle $[x_C, x_H]$ soit : $f(x) \in [3, 6]$

9) Déterminer graphiquement l'ensemble S des réels x vérifiant : $-\dfrac{7}{2} < f(x) \leq 3$

Les réels x vérifiant l'encadrement $-\dfrac{7}{2} < f(x) \leq 3$ sont , quand ils existent , les abscisses des points de la courbe C$_f$ situés à la fois au dessus de $\Delta_2 : y = -\dfrac{7}{2}$ et en dessous de Δ_1 : $y = 3$ ou sur Δ_1 .

Graphiquement , on obtient : $S_9 = [x_D, x_J[\cup \{x_C\} \cup [x_E, x_K[\cup]x_L, x_G]$ soit : $S_9 = [-8, -6[\cup \{-4\} \cup [-1, 6[\cup \left]8, \dfrac{19}{2}\right]$

10) Peut-on trouver graphiquement deux réels dont les images par f sont opposées ?

L'image par f du réel x , notée $f(x)$, est l'ordonnée du point de C_f d'abscisse x . Par conséquent : on peut trouver deux réels dont les images par f , sont opposées si et seulement si on peut trouver sur C$_f$ deux points ayant des ordonnées opposées .

Graphiquement on obtient : C_f contient le point A$\begin{pmatrix} -\dfrac{19}{2} \\ \dfrac{9}{2} \end{pmatrix}$ et M$\begin{pmatrix} 7 \\ -\dfrac{9}{2} \end{pmatrix}$.

Donc $f(x_A) = y_A$ et $f(x_M) = y_M$ soit : $f\left(-\dfrac{19}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$ et $f(7) = -\dfrac{9}{2}$.

Les réels $-\dfrac{19}{2}$ et 7 ont bien des images opposées par f .

11) La droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -10$ peut-elle être la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

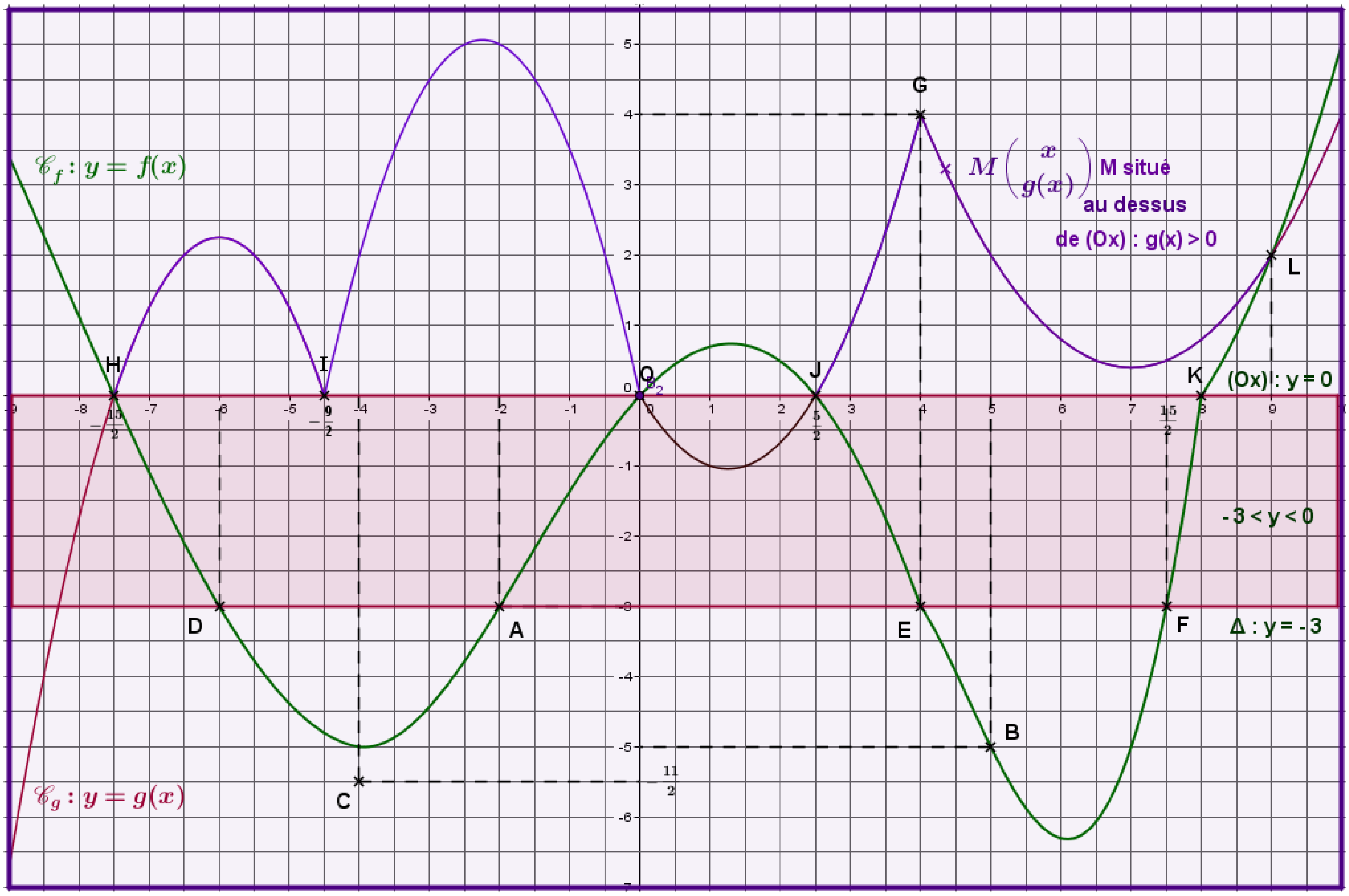
La représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ contient au plus un point d'abscisse -10 . Cette contrainte n'est pas respectée par la droite $\mathcal{D}$ qui contient une infinité de points d'abscisse -10 : tous ses points . La droite $\mathcal{D}$ ne peut donc être considérée comme la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

12) La droite Δ d'équation $y = -6$ peut-elle être la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

Toute droite parallèle à l'axe (Ox) et d'équation réduite : $y = k$ représente la fonction constante $F : x \mapsto k$. Par conséquent : $\Delta : y = -6$ est la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: la fonction constante $g : x \mapsto -6$.

exercice 3 Le plan est muni d'un repère orthonormal d'origine O .

La figure donne les représentations graphiques C_f et C_g de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.



1) Que vaut l'image par f du réel -2 ? L'image par f du réel -2 , notée $f(-2)$, est l'ordonnée du point de C_f qui a pour abscisse le réel -2 . Graphiquement , on obtient : C_f contient le point $A\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $f(x_A) = y_A$ soit : $f(-2) = -3$

2) Peut-on trouver un réel x qui soit égal à l'opposé de son image par f ?

L'image par f du réel x , notée $f(x)$, est l'ordonnée du point de C_f qui a pour abscisse x . On peut donc trouver un réel x égal à l'opposé de son image f(x) si et seulement si la courbe C_f contient un point ayant ses coordonnées opposées .

Graphiquement , on obtient : C_f contient le point $B\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Donc $f(x_B) = y_B$ soit : $f(5) = -5$. Le réel 5 est donc bien égal à l'opposé de son image par f .

3) -4 est-t-il un antécédent pour f du réel $-\dfrac{11}{2}$?

-4 est un antécédent de $-\dfrac{11}{2}$ pour f si et seulement si : $f(-4) = -\dfrac{11}{2}$ soit si et seulement si la courbe C_f contient le point $C\begin{pmatrix} -4 \\ -\dfrac{11}{2} \end{pmatrix}$. Graphiquement , on obtient : $C \notin C_f$. Par conséquent : -4 n'est pas un antécédent de $-\dfrac{11}{2}$ pour f .

4) Déterminer les antécédents du réel -3 pour f.

Les antécédents du réel -3 pour sont , quand ils existent , les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la droite $\Delta : y = -3$. Graphiquement on obtient : C_f coupe Δ en quatre points : $D\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} \dfrac{15}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$.

Les antécédents du réel -3 pour f sont donc : $-6, -2, 4$ et $\dfrac{15}{2}$.

5) Peut-on trouver un réel x qui soit égal à son image par g ?

L'image par g du réel x , notée $g\left(x\right)$, étant l'ordonnée du point de C_g qui a pour abscisse x , on peut trouver un réel x égal à son image si et seulement si la courbe C_g contient un point ayant ses coordonnées égales . Graphiquement , on obtient :
C_g contient le point $G\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$. Donc $g(x_G) = y_G$ soit : $g(4) = 4$. 4 est donc bien égal à son image par g .

6) Déterminer graphiquement le signe de f(x)

Etudier graphiquement le signe de f(x) revient à étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à l'axe $(Ox) : y = 0$
D'autre part : C_f coupe (Ox) en quatre points : H$\begin{pmatrix}-\dfrac{15}{2}\\0\end{pmatrix}$, O$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, J$\begin{pmatrix}\dfrac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$, K$\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$. Donc :
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{15}{2}$ ou $x = 0$ ou $x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = 8$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{15}{2}$		0		$\frac{5}{2}$		8		$+\infty$
signe de f(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (Ox)		au dessus de (Ox)		en dessous de (Ox)		au dessus de (Ox)		en dessous de (Ox)		au dessus de (Ox)	

7) Déterminer graphiquement l'ensemble S_7 des réels x vérifiant : $-3 < f(x) \leq 0$

Les réels x vérifiant l'encadrement $-3 < f(x) \leq 0$ sont , quand ils existent , les abscisses des points de la courbe C_f situés à la fois au dessus de Δ : $y = -3$ et en dessous de (Ox) : $y = 0$ ou sur (Ox) . Graphiquement , on obtient :
$S_9 = [x_H, x_D[\cup]x_A, x_O] \cup [x_J, x_E[\cup]x_F, x_K]$ soit : $S_9 = \left[-\dfrac{15}{2}, -6\right[\cup]-2, 0] \cup \left[\dfrac{5}{2}, 4\right[\cup \left]\dfrac{15}{2}, 8\right]$

8) Résoudre graphiquement l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$

Les solutions de (E) sont , quand elles existent , les abscisses de points d'intersection de $C_f : y = f(x)$ et de $C_g : y = g(x)$.
Graphiquement , on obtient : C_f et C_g se coupent en quatre points : H$\begin{pmatrix}-\dfrac{15}{2}\\0\end{pmatrix}$, O$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, J$\begin{pmatrix}\dfrac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$, L$\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$
Par conséquent : les solutions de (E) sont : $-\dfrac{15}{2}, 0, \dfrac{5}{2}$ et 9 .

9) Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$.

Les solutions de (I) sont , quand elles existent , les abscisses de points de $C_f : y = f(x)$ qui sont communs avec $C_g : y = g(x)$ ou situés en dessous de C_g . Graphiquement on obtient pour l'ensemble solution S_9 de (I) :
$S_9 = [x_H, x_O] \cup [x_J, x_L]$ soit : $S_9 = \left[-\dfrac{15}{2}, 0\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}, 9\right]$

10) Déterminer graphiquement l'ensemble S_{10} des réels x vérifiant : $g(x) > 0$

Les réels x vérifiant l'inégalité $g(x) > 0$ sont , quand ils existent , les abscisses des points de la courbe C_g situés au dessus de (Ox) : $y = 0$. Graphiquement on obtient :
$S_{10} =]x_H, x_I[\cup]x_I, x_O[\cup]x_J, +\infty[$ soit : $S_{10} = \left]-\dfrac{15}{2}, -\dfrac{9}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{9}{2}, 0\right[\cup \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

11) La réunion des deux courbes C_f et C_g peut-elle être considérée comme une représentation graphique de fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

La représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ contient au plus un point d'abscisse 4 . Cette contrainte n'est pas respectée par l'ensemble $C_f \cup C_g$ qui contient deux points d'abscisse 4 : E et G . $C_f \cup C_g$ ne peut donc être considérée comme la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$