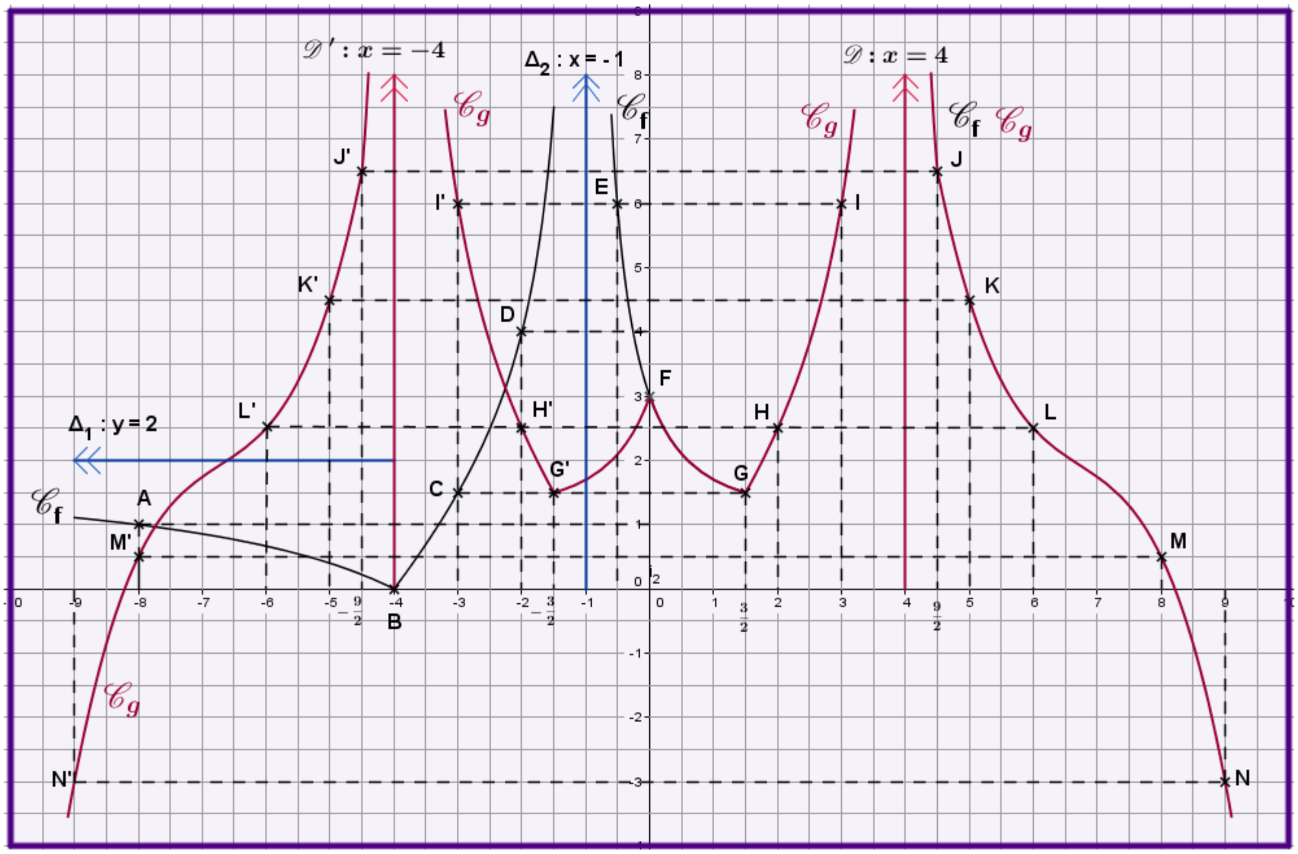
Fonctions Début - Corrigés feuille 3

Première Partie : Tableaux de variations - Représentations graphiques

exercice 1 Le plan est muni d'un repère orthonormal . La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. **1)** Indiquer sur le graphique les équations des droites asymptotes à C_f .



2) Dresser le tableau de variation de f puis le tableau de valeurs prises par f(x)

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
f(x)	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

x	-8	-4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{9}{2}$	5	6	8	9
$f(x)$	1	0	$\frac{3}{2}$	4	6	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3

3) condition 1 : Pour tout réel x positif , $g(x) = f(x)$. Par conséquent C_f et C_g coïncident sur $\mathbb{R}^+$

condition 2 : C_g est une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère .

Pour compléter le tableau de valeurs prises par g(x) sur $\mathbb{R}^-$ on peut utiliser pour la condition 2 : Deux points M et M' sont symétriques par rapport à (Ox) si et seulement si ils ont des abscisses opposées et la même ordonnée .

x	-9	-8	-6	-5	$-\frac{9}{2}$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{9}{2}$	5	6	8	9
$g(x)$	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3

tableau de variation de g

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	3	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

exercice 2

1) le tableau des variations de f

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
f(x)	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

$\rightarrow$ C_f contient A$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Donc : $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

f présente un maximum relatif en 0 égal à $-\frac{1}{2}$ et un minimum relatif en $\frac{5}{2}$ égal à $-\frac{3}{2}$

$\rightarrow$ Les droites asymptotes à C_f sont : $D_1 : x = -3$ (avec f(x) tendant vers $-\infty$) $D_2 : x = 4$ (avec f(x) tendant vers $+\infty$) ; $\Delta : y = -1$ (au voisinage de $-\infty$)

2) C_f coupe l'axe (Ox) en deux points qui ont respectivement pour abscisse : 5 et $\frac{7}{2}$. Donc : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = \frac{7}{2}$ et C_f contient C$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. **3)** les antécédents de -2 par f sont les réels -6 , -2 et 7 . Donc :

$f(x) = -2 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = -2$ ou $x = 7$; C_f contient E$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, F$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$et G$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

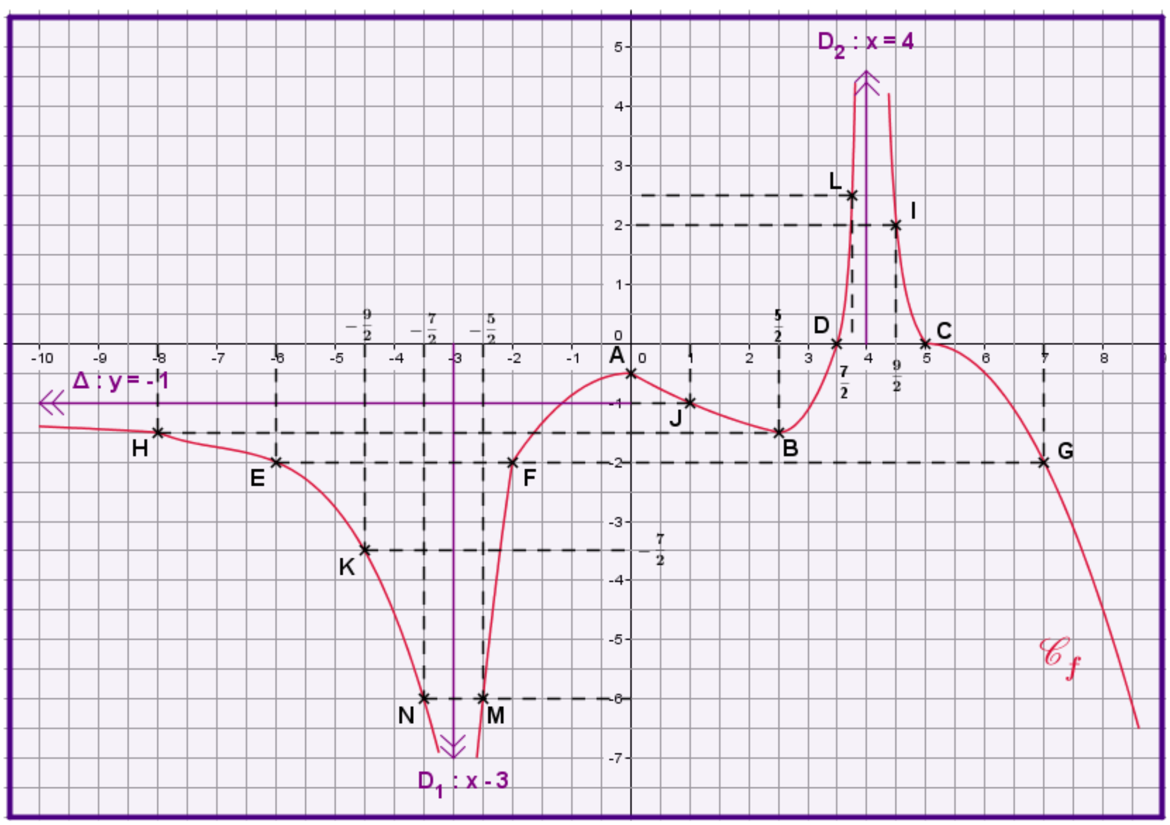
4) -8 a la même image par f que le réel $\frac{5}{2}$. Donc : $f(-8) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ (d'après **1)**) et C_f contient H$\begin{pmatrix} -8 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

5) les images par f de 7 et de $\frac{9}{2}$ sont opposées . Donc : $f(7) = -f\left(\frac{9}{2}\right)$ et $f(7) = -2$ d'après **3)** .

Par conséquent : $f\left(\frac{9}{2}\right) = 2$ et C_f contient I$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$. **6)** $f(1) = -1$; $f(-\frac{9}{2}) = -\frac{7}{2}$ donc C_f contient J$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, K$\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$f(3.75) = 2.5$; $f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{7}{2}) = -6$ donc C_f contient L$\begin{pmatrix} 3.75 \\ 2.5 \end{pmatrix}$, M$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$ et N$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$

x	-8	-6	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-2	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	3.75	$\frac{9}{2}$	5	7
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{7}{2}$	-6	-6	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	0	2.5	2	0	-2



exercice 3

1) le tableau des variations de f :

→ points de C_f :

$f(-\frac{13}{2}) = -4$; $f(-\frac{9}{2}) = -1$ et $f(\frac{13}{2}) = \frac{7}{2}$

C_f contient : $A\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -4 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

x	$-\infty$		$-\frac{13}{2}$		$-\frac{9}{2}$		-3		3		$\frac{13}{2}$		$+\infty$
f(x)	-2	↘	-4	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{7}{2}$	↗	$\frac{11}{2}$

→ Droites asymptotes à C_f ? $D_1 : x = -3$ (avec f(x) tendant vers $-\infty$) ; $D_2 : x = 3$ (avec f(x) tendant vers $+\infty$)

$\Delta_1 : y = -2$ (au voisinage de $-\infty$) ; $\Delta_2 : y = \frac{11}{2}$ (au voisinage de $+\infty$)

2) Les antécédents du réel $\frac{9}{2}$ pour f sont : 5 et 8 . Donc : $f(x) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 8$ et C_f contient D$\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix} 8 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

3) Les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{15}{2}$ sont : $-\frac{7}{2}$ et $\frac{5}{2}$. Donc : $f(x) = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$ et C_f contient F$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$et G$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$. **4)** $\frac{3}{2}$ et $-\frac{9}{2}$ ont la même image par f et les réels 2 et $\frac{13}{2}$ ont des images opposées par f .

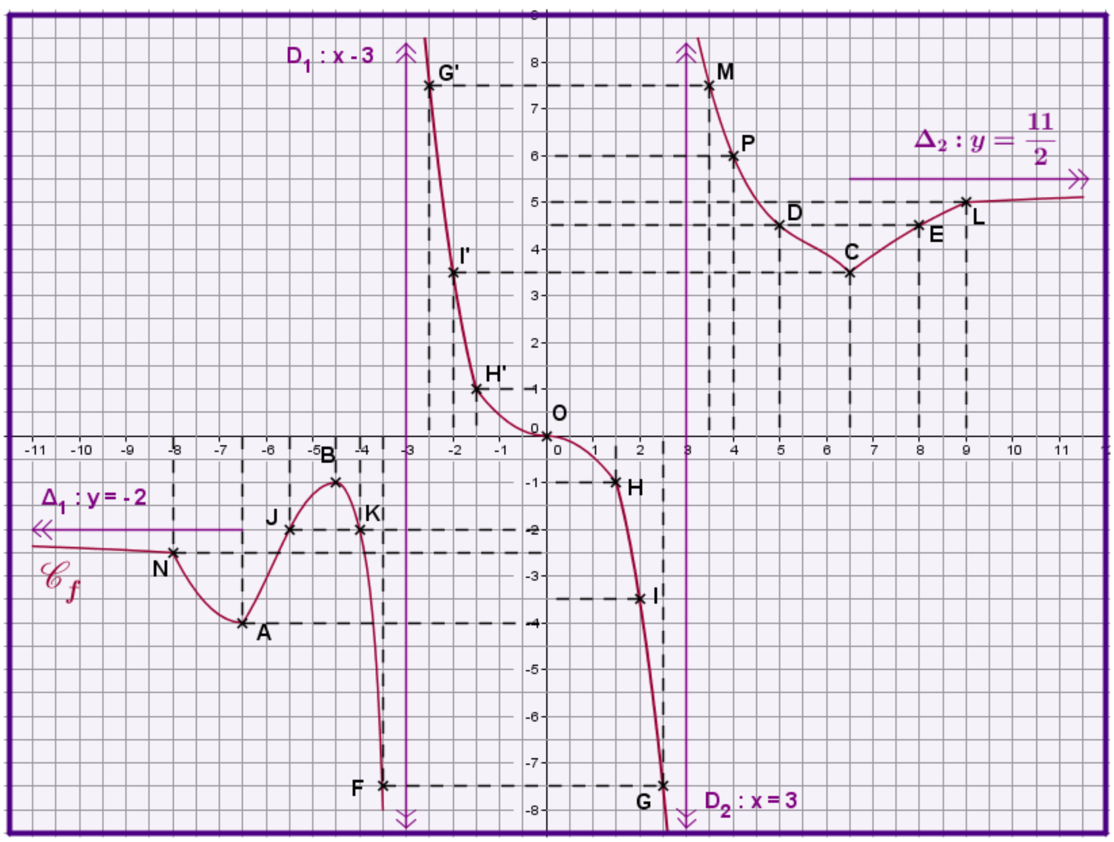
Donc : $f(\frac{3}{2}) = f\left(-\frac{9}{2}\right) = -1$ et : $f(2) = -f(\frac{13}{2}) = -\frac{7}{2}$ (d'après **1)**) . C_f contient H$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, I$\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

5) La partie de la courbe C_f , dont les points ont une abscisse strictement comprise entre -3 et 3 , est symétrique par rapport à l'origine du repère et le réel 0 est égal à son image par f . Donc : $f(0) = 0$ et avec x élément de $]-3, 3[$, la courbe C_f contient $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ et son symétrique $M'\begin{pmatrix} -x \\ -f(x) \end{pmatrix}$ par rapport à l'origine O . C_f contient O , $G'\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$, $I'\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$et $H'\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

6) $f(-\frac{11}{2}) = f(-4) = -2$; $f(9) = 5$; $f(\frac{7}{2}) = \frac{15}{2}$; $f(-8) = -\frac{5}{2}; f(4) = -3f(-4)$. Donc $f(4) = -3f(-4) = -3 \times -2 = 6$.

C_f contient J$\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$, K$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, L$\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, M$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$, N$\begin{pmatrix} -8 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, P$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

x	-8	$-\frac{13}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{9}{2}$	-4	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	4	5	$\frac{13}{2}$	8	9
f(x)	$-\frac{5}{2}$	-4	-2	-1	-2	$-\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	0	-1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	6	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	5



1) tableau de variations de f :

$\rightarrow f(-5) = -5$ donc C_f contient $A\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Droites asymptotes à C_f ?

$D_1 : x = -1$ (f(x) tendant vers $-\infty$)

$D_2 : x = 5$ (f(x) tendant vers $+\infty$)

$(Ox) : y = 0$ (au voisinage de $-\infty$)

$\Delta : y = -1$ (au voisinage de $+\infty$)

x	$-\infty$		-5		-1		5		$+\infty$
f(x)	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

2) $\frac{5}{2}$ possède 4 antécédents pour f : les réels 4 , 6 et leurs opposés . Donc : $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = -4$ ou $x = 4$ ou $x = 6$.

C_f contient B$\begin{pmatrix} -6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix} 6 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

3) C_f coupe la droite D : $y = 1$ en quatre points qui ont respectivement pour abscisse : -7 , -3 , 3 et $\frac{15}{2}$. Donc :

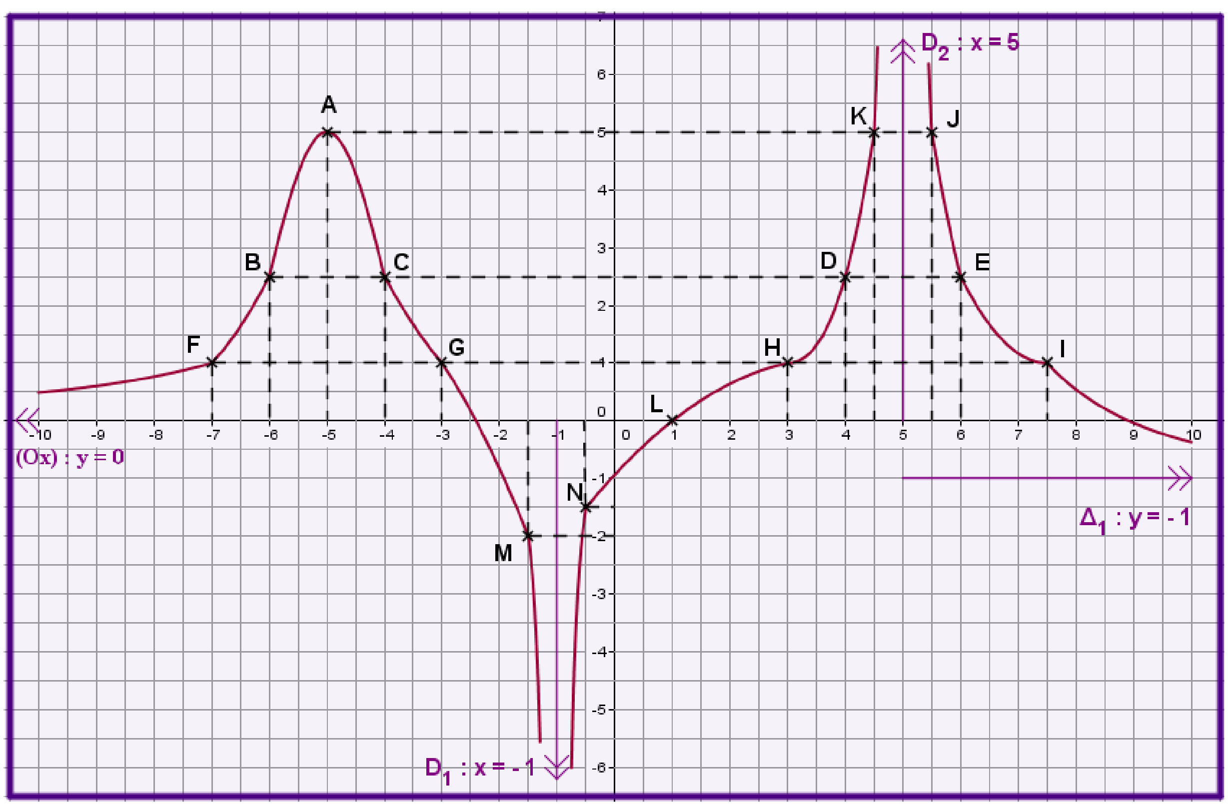
$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -7$ ou $x = -3$ ou $x = 3$ ou $x = \frac{15}{2}$. C_f contient F$\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, G$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, H$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\frac{11}{2}$ et $\frac{9}{2}$ ont la même image par f que le réel -5 . Donc : $f\left(\frac{11}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right) = f(-5) = 5$ (d'après **1)**) .

C_f contient J$\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$, K$\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$

5) $f(1) = 0$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2f(3) = -2 \times 1 = -2$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$. C_f contient L$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, M$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$, N$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

x	-7	-6	-5	-4	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{15}{2}$
f(x)	1	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	1	-2	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{5}{2}$	5	5	$\frac{5}{2}$	1



Deuxième Partie : A propos du sens de variation

exercice 5 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I .

1) 1-1

sens de variation de f sur I	sa définition
f est croissante sur I	Pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
f est décroissante sur I	Pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
f est strictement croissante sur I	Pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$
f est strictement décroissante sur I	Pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

1-2 sens de variation de $f : x \mapsto 2x + 5$

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$

Avec $x_1 < x_2$ et $2 > 0$ on construit : $2x_1 < 2x_2$

D'où : $2x_1 + 5 < 2x_2 + 5$ Soit : $f(x_1) < f(x_2)$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

sens de variation de $g : x \mapsto -3x + 1$

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$

Avec $x_1 < x_2$ et $-3 < 0$ on construit : $-3x_1 > -3x_2$

D'où : $-3x_1 + 1 > -3x_2 + 1$ Soit : $g(x_1) > g(x_2)$

g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

1-3 En utilisant les variations de la fonction carré étudier le sens de variation de $h : x \mapsto -4x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}^-$ puis sur $\mathbb{R}^+$

sens de variation de $h : x \mapsto -4x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}^-$

Soient x_1 et x_2 deux réels de $\mathbb{R}^-$ tels que $x_1 < x_2$

La fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Par conséquent : $x_1 < x_2$ entraîne : $x_1^2 > x_2^2$

Puis : $-4x_1^2 < -4x_2^2$ (car : $-4 < 0$)

D'où : $-4x_1^2 - 3 < -4x_2^2 - 3$ Soit : $h(x_1) < h(x_2)$

h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$.

sens de variation de $h : x \mapsto -4x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}^+$

Soient x_1 et x_2 deux réels de $\mathbb{R}^+$ tels que $x_1 < x_2$

La fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par conséquent : $x_1 < x_2$ entraîne : $x_1^2 < x_2^2$

Puis : $-4x_1^2 > -4x_2^2$ (car : $-4 < 0$)

D'où : $-4x_1^2 - 3 > -4x_2^2 - 3$ Soit : $h(x_1) > h(x_2)$

h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2)

Si on peut trouver dans I deux réels a et b tels que :	ALORS on peut déduire qu'il existe dans I deux réels a et b tels que :
$a < b$ et $f(a) > f(b)$ vrai	$a < b$ vrai et $f(a) \leq f(b)$ faux et donc f n'est pas croissante sur I
$a < b$ et $f(a) \geq f(b)$ vrai	$a < b$ vrai et $f(a) < f(b)$ faux et donc f n'est pas strictement croissante sur I
$a < b$ et $f(a) \leq f(b)$ vrai	$a < b$ vrai et $f(a) > f(b)$ faux et donc f n'est pas strictement décroissante sur I
$a < b$ et $f(a) < f(b)$ vrai	$a < b$ vrai et $f(a) \geq f(b)$ faux et donc f n'est pas décroissante sur I
$a < b$ et $f(a) = f(b)$ vrai	$a < b$ vrai , $f(a) > f(b)$ faux et $f(a) < f(b)$ faux et donc f n'est pas strictement monotone sur I

3) 3-1 la fonction carré n'est pas décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

contre exemple : Avec : $a = 2$, $b = 3$, on a : $a < b$ vrai . D'autre part : $a^2 = 4$, $b^2 = 9$ et $a^2 < b^2$.

On a donc pour $a = 2$ et $b = 3$: $a < b$ vrai et $a^2 \geq b^2$ faux . La fonction carré n'est donc pas décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3-2 la fonction inverse n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$.

contre exemple : Avec : $a = 1$, $b = 10$, on a : $a < b$ vrai . D'autre part : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{1} = 1$, $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{10} = 0,1$ et $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

On a donc pour $a = 1$ et $b = 10$: $a < b$ vrai et $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$ faux . La fonction inverse n'est donc pas croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$

3-3 la fonction carré n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Avec : $a = -3$, $b = 3$, on a : $a \neq b$ vrai . D'autre part : $a^2 = 9$, $b^2 = 9$ et $a^2 = b^2$.

Or : une fonction strictement monotone sur $\mathbb{R}$ attribue à deux réels distincts deux images distinctes .

Par conséquent : la fonction carré n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

exercice 6

Tableau à compléter

ce que l'on sait pour la fonction f	phrase ?	ce que l'on peut affirmer pour la fonction f
la courbe C_f ne coupe pas la droite d'équation : $x = -2$	phrase 1	C_f ne possède pas de point d'abscisse -2 et $-2 \notin D_f$. f n'est pas définie en -2 .
f est définie sur l'intervalle $[-4, 6]$ et vérifie : pour tous réels a et b distincts de $[-4, 6]$, on a : $f(a) - f(b)$ nul ou $f(a) - f(b)$ et $a - b$ de même signe	phrase 3	on a donc avec a et b réels distincts de $[-4, 6]$: $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \geq 0$. f est croissante sur $[-4, 6]$.
la courbe C_f coupe l'axe (Ox) au point B d'abscisse : -9	phrase 2	$B \in C_f$ donc : $y_B = f(x_B)$ soit : $0 = f(-9)$ L'image par f du réel -9 est égale à 0 .
f est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et $f(4) = f(6)$	phrase 8	4 et 6 sont deux réels distincts de $[0, +\infty[$ qui ont la même image par f . f n'est pas strictement monotone sur $[0, +\infty[$.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et les points de C_f qui ont une abscisse positive sont situés en dessous de la droite D' : $y = 4$	phrase 10	L'ordonnée d'un point de C_f d'abscisse x est f(x) . Donc $f(x) < 4$ pour x positif . L'image par f d'un réel positif est strictement inférieure à 4 .
f est définie sur l'intervalle $[-4, -2]$ et $f(-2) - f(-4) \leq 0$	phrase 5	$f(-2) - f(-4) \leq 0 \Leftrightarrow f(-4) \geq f(-2)$. On a donc : $-4 < -2$ vrai et $f(-4) < f(-2)$ faux . f n'est pas strictement croissante sur $[-4, -2]$.
f est définie et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et $f(0) = 1$	phrase 9	$f(0) = 1$ et $x > 0$ entraîne $f(x) < f(0)$ soit $f(x) < 1$ Donc : $f(x) \leq 1$ pour $x \geq 0$. L'image par f d'un réel positif est inférieure à 1 .
f est définie sur $[-5, 7]$ et : $f(-3) = 1$, $f(0) = 6$ et $f(4) = -2$	phrase 7	$-3 < 0$ et $f(-3) < f(0)$ soit $f(-3) \geq f(0)$ faux : f non décroissante sur $[-5, 7]$. $0 < 4$ et $f(0) > f(4)$ soit $f(0) \leq f(4)$ faux : f non croissante sur $[-5, 7]$. f n'est pas monotone sur $[-5, 7]$.
f est définie sur $[-9, -2]$ et vérifie : $f(-9) = 0$ et $\forall x \in [-9, -2]$, $f(x) \geq 0$	phrase 6	$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(x)$ et $f(-9) = 0$. Donc : $\forall x \in [-9, -2]$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in [-9, -2], f(-9) \leq f(x)$ En particulier , $-2 \in [-9, -2]$ et donc : $f(-9) \leq f(-2)$ Ainsi : $-9 < -2$ vrai et $f(-9) > f(2)$ faux . f n'est pas strictement décroissante sur $[-9, -2]$.
f est définie sur $[-6, 6]$ et vérifie ce qui suit : $\forall x \in [-6, 6]$,$\forall y \in [-6, 6]$, $x < y \Rightarrow -2f(x) \leq -2f(y)$	phrase 4	Avec x et y réels distincts de $[-6, 6]$ on a : $x < y \Rightarrow -2f(x) \leq -2f(y)$ vrai . Or : $-2 < 0$ Donc : $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ vrai . f est décroissante sur $[-6, 6]$.