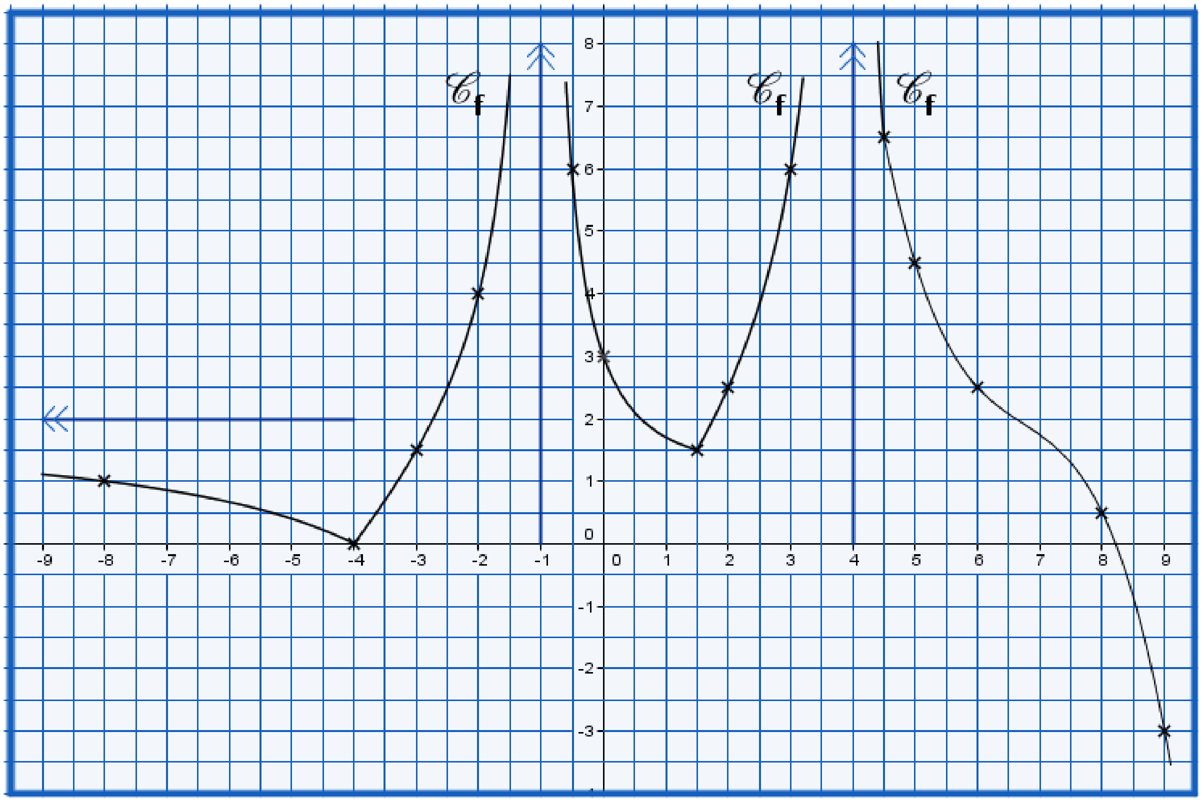
Fonctions Début - énoncés feuille 3

Première Partie : Tableaux de variations - Représentations graphiques

exercice 1 Le plan est muni d'un repère orthonormal . La figure donne la représentation graphique C_f d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. **1)** Indiquer sur le graphique les équations des droites asymptotes à C_f .



2) Dresser le tableau de variation de f puis le tableau de valeurs prises par f(x) .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

x	-8	-4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{9}{2}$	5	6	8	9
$f(x)$														

3) Proposer sur le graphique ci-dessus une allure de courbe C_g représentant une fonction g qui vérifie les deux conditions suivantes :

condition 1 : Pour tout réel x positif , $g(x) = f(x)$.

condition 2 : C_g est une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère .

Compléter ce qui suit :

x	-9	-8	-6	-5	$-\frac{9}{2}$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{9}{2}$	5	6	8	9
$g(x)$																	

tableau de variation de g

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	

exercice 2 Sur le **graphique ci-dessous** , proposer une allure de courbe C_f représentant une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui soit compatible avec tous les renseignements qui suivent :

1) le tableau des variations de f

$\rightarrow$ C_f contient $A\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

Donc :

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
f(x)	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$\rightarrow$ Les droites asymptotes à C_f sont :

2) C_f coupe l'axe (Ox) en deux points qui ont respectivement pour abscisse : 5 et $\frac{7}{2}$. Donc :

3) les antécédents de -2 pour f sont les réels -6 , -2 et 7 . Donc :

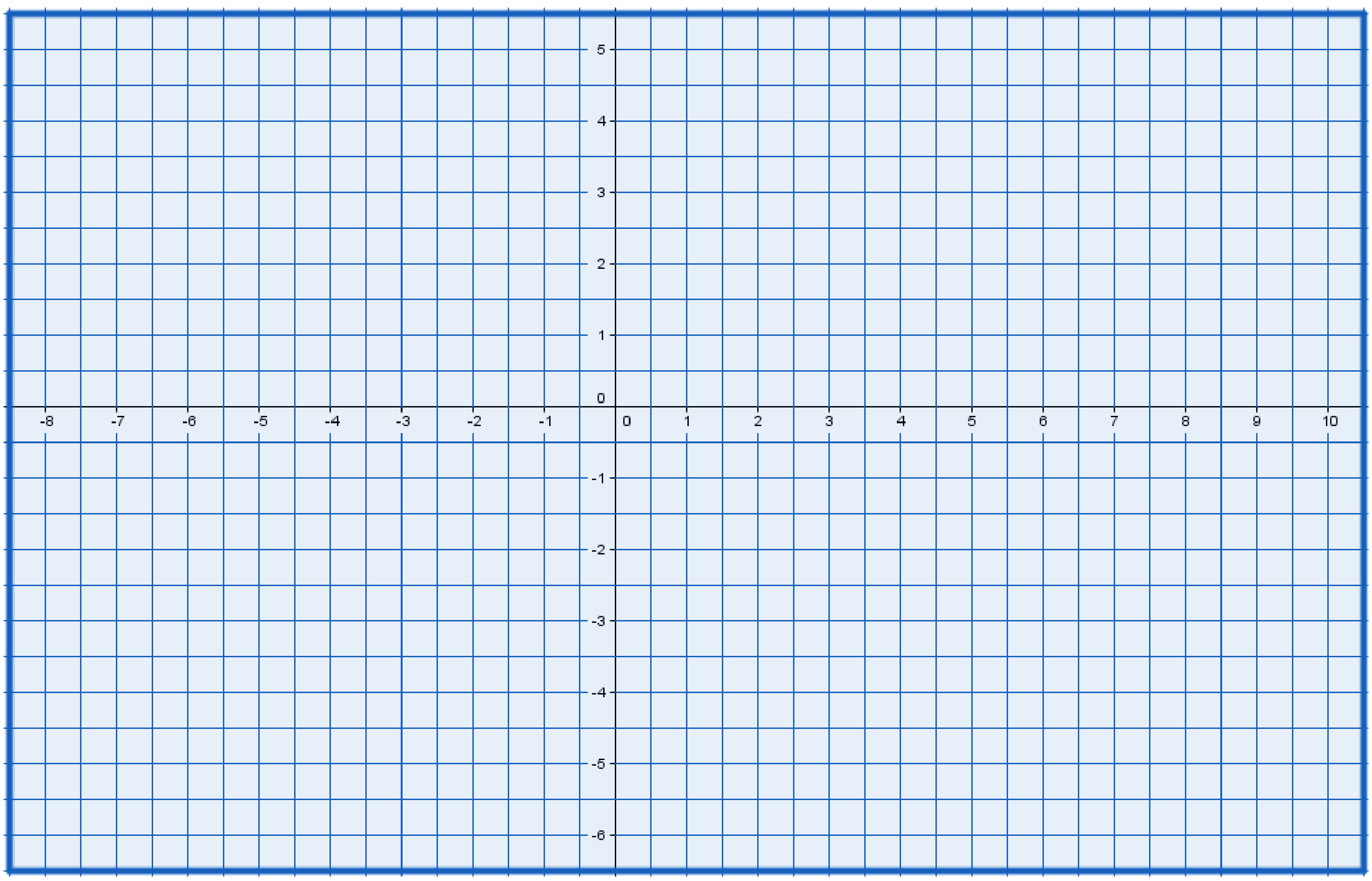
4) -8 a la même image par f que le réel $\frac{5}{2}$. Donc :

5) les images par f de 7 et de $\frac{9}{2}$ sont opposées . Donc :

6) $f(1) = -1$; $f(-\frac{9}{2}) = -\frac{7}{2}$; $f(3.75) = 2.5$; $f(-\frac{5}{2}) = f(-\frac{7}{2}) = -6$. Donc :

Placer les points de C_f associés aux contraintes précédentes puis donner l'allure de C_f en utilisant le tableau de variation de f , ces points , les droites asymptotes à C_f puis compléter le tableau ci-dessous .

x														
f(x)														



exercice 3 Proposer une allure de courbe C_f représentant une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui soit compatible avec tous les renseignements qui suivent :

1) le tableau des variations de f :

→ points de C_f :

→ Droites asymptotes à C_f ?

x	$-\infty$	$-\frac{13}{2}$	$-\frac{9}{2}$	-3	3	$\frac{13}{2}$	$+\infty$
f(x)		-2 ↘ -4 ↗ -1 ↘ $-\infty$		‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$ ‖		$+\infty$ ↘ $\frac{7}{2}$ ↗ $\frac{11}{2}$	

2) Les antécédents du réel $\frac{9}{2}$ pour f sont : 5 et 8 . Donc :

3) Les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{15}{2}$ sont : $-\dfrac{7}{2}$ et $\dfrac{5}{2}$. Donc :

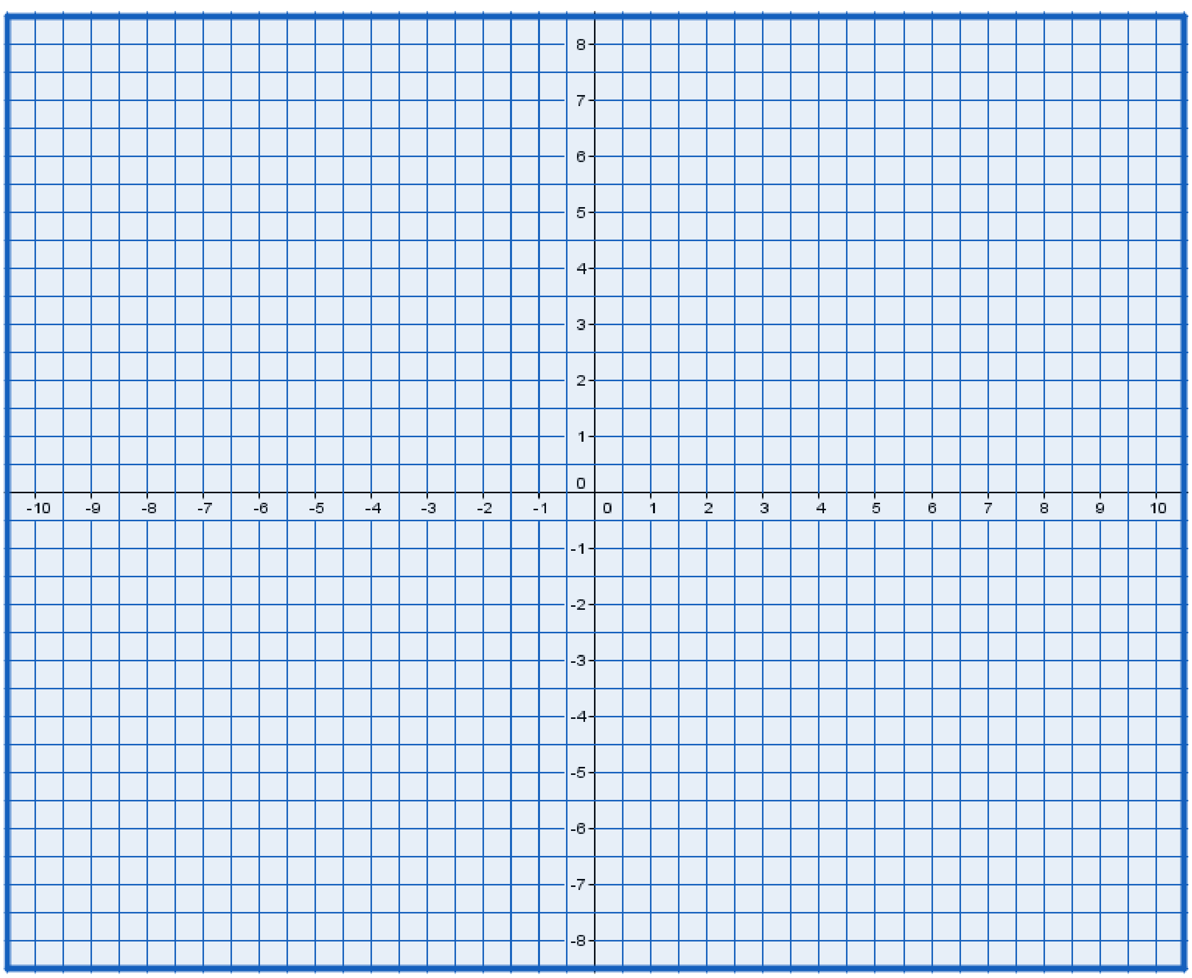
4) $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{9}{2}$ ont la même image par f et les réels 2 et $\dfrac{13}{2}$ ont des images opposées par f . Donc :

5) La partie de la courbe C_f , dont les points ont une abscisse strictement comprise entre -3 et 3 , est symétrique par rapport à l'origine du repère et le réel 0 est égal à son image par f . Donc :

6) $f(-\dfrac{11}{2}) = f(-4) = -2$; $f(9) = 5$; $f(\dfrac{7}{2}) = \dfrac{15}{2}$; $f(-8) = -\dfrac{5}{2}; f(4) = -3f(-4)$.

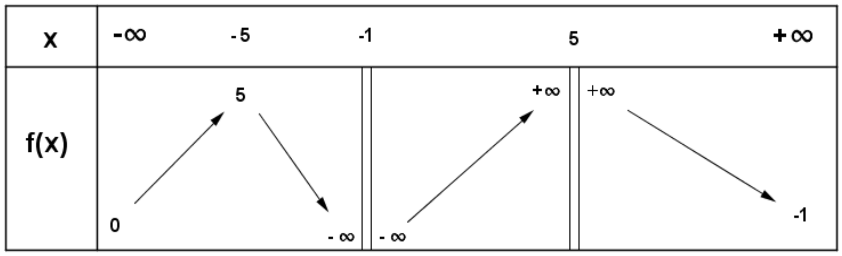
Placer les points de C_f associés aux contraintes précédentes puis donner l'allure de C_f en utilisant le tableau de variation de f , ces points , les droites asymptotes à C_f puis compléter le tableau ci-dessous .

x																			
f(x)																			



exercice 4

Proposer une allure de courbe C_f représentant une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui soit compatible avec tous les renseignements donnés



1) le tableau des variations de f

→ point situé sur C_f :

→ droites asymptotes à C_f :

2) $\dfrac{5}{2}$ possède quatre antécédents pour f : les réels 4 , 6 et leurs opposés . Donc :

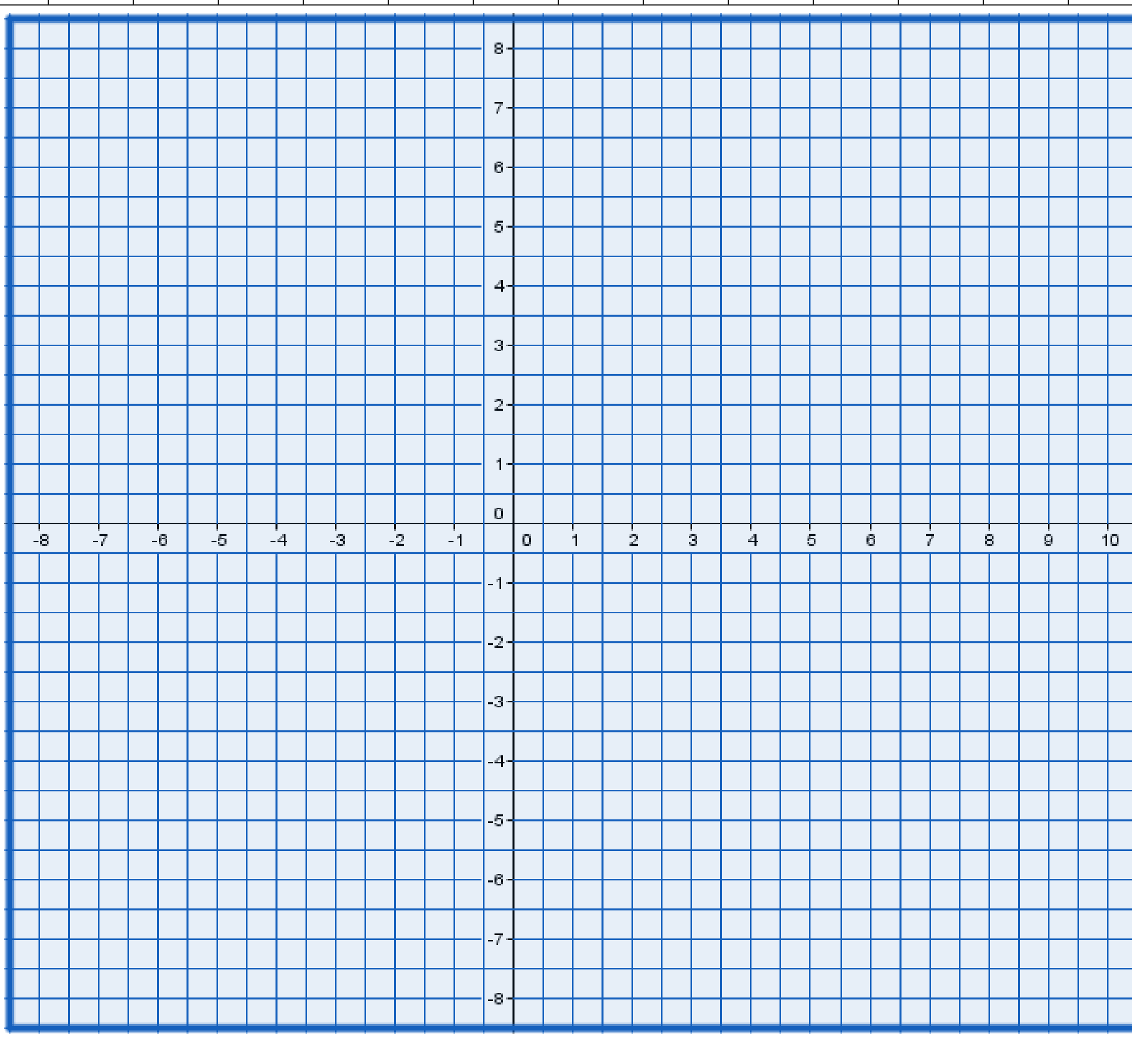
3) C_f coupe la droite D : $y = 1$ en quatre points qui ont respectivement pour abscisse : -7 , -3 , 3 et $\dfrac{15}{2}$. Donc :

4) $\dfrac{11}{2}$ et $\dfrac{9}{2}$ ont la même image par f que le réel -5 . Donc :

5) $f(1) = 0$; $f(-\dfrac{3}{2}) = -2f(3)$; $f(-\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{3}{2}$.

Placer les points de C_f associés aux contraintes précédentes puis donner l'allure de C_f en utilisant le tableau de variation de f , ces points , les droites asymptotes à C_f puis compléter le tableau ci-dessous .

x														
f(x)														



Deuxième Partie : A propos du sens de variation

exercice 5 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I .

1) 1-1 Compléter le tableau suivant

sens de variation de f sur I	sa définition
f est croissante sur I	Pour tous réels x_1 et x_2 de I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
f est décroissante sur I	
f est strictement croissante sur I	
f est strictement décroissante sur I	

1-2 Justifier le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des deux fonctions affines suivantes : $f : x \mapsto 2x + 5$ et $g : x \mapsto -3x + 1$

1-3 En utilisant les variations de la fonction carré étudier le sens de variation de $h : x \mapsto -4x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}^-$ puis sur $\mathbb{R}^+$

2) Compléter le tableau ci-dessous en s'inspirant de l'explication donnée pour justifier sa première ligne **.**

1ère ligne du tableau : justification

Si l'on peut donner un exemple de deux réels a et b tels que $a < b$ vrai et $f(a) > f(b)$ vrai , on a donc pour ces deux réels $a < b$ vrai et $f(a) \leq f(b)$ faux ; dans ce cas la fonction f n'est pas croissante sur I car elle ne vérifie pas la propriété suivante :

Pour tous réels x_1 et x_2 de l'intervalle I , si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

L'exemple de ces deux réels a et b permettant de nier que f est croissante sur I est appelé un **contre-exemple .**

SI on peut trouver dans I deux réels a et b tels que :	ALORS on peut déduire avec ce contre-exemple :
$a < b$ et $f(a) > f(b)$ vrai	$a < b$ vrai et $f(a) \leq f(b)$ faux et donc f n'est pas croissante sur I
$a < b$ et $f(a) \geq f(b)$ vrai	
$a < b$ et $f(a) \leq f(b)$ vrai	
$a < b$ et $f(a) < f(b)$ vrai	
$a < b$ et $f(a) = f(b)$ vrai	

3) Donner un contre-exemple permettant de justifier chacune des affirmations suivantes :

3-1 la fonction carré n'est pas décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3-2 la fonction inverse n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$.

3-3 la fonction carré n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

exercice 6 f est une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Chacune des 10 lignes du tableau de la page 6 donne une hypothèse (ou des hypothèses) sur f et permet (**en exploitant toutes les hypothèses données pour f**) de prouver que l'une des 10 phrases suivantes (ou son contraire) est vraie . Chaque phrase est associée à une seule des dix situations données pour la fonction f . Laquelle ? Ecrire la phrase complétée dans la deuxième colonne du tableau comme l'indique l'**exemple donné .** Un dessin peut être utile pour trouver la bonne phrase ! L'exercice 5 peut être utile !

phrase 1 : f est définie en . . . (ou n'est pas définie en . . .)

phrase 2 : l'image par f du réel . . . est égale à . . . (ou n'est pas égale à . . .)

phrase 3 : f est croissante sur . . . (ou n'est pas croissante sur . . .)

phrase 4 : f est décroissante sur . . . (ou n'est pas décroissante sur . . .)

phrase 5 : f est strictement croissante sur . . . (ou n'est pas strictement croissante sur . . .)

phrase 6 : f est strictement décroissante sur . . . (ou n'est pas strictement décroissante sur . . .)

phrase 7 : f est monotone sur . . . (ou n'est pas monotone sur . . .)

phrase 8 : f est strictement monotone sur . . . (ou n'est pas strictement monotone sur . . .)

phrase 9 : l'image par f d'un réel positif est inférieure à . . . (ou est strictement supérieure à . . .)

phrase 10 : l'image par f d'un réel positif est supérieure à . . . (ou est strictement inférieure à . . .)

par exemple : si ce que l'on sait sur f est : la courbe C_f ne contient pas le point $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, on peut alors affirmer pour f : l'image par f du réel 5 n'est pas égale à 2 (on utilise la phrase 2 dans sa forme négative)

Tableau à compléter

ce que l'on sait pour la fonction f	ce que l'on peut affirmer pour la fonction f
la courbe C_f ne coupe pas la droite d'équation : $x = -2$	
f est définie sur l'intervalle $[-4, 6]$ et vérifie : pour tous réels a et b distincts de $[-4, 6]$,on a : $f(a) - f(b)$ nul ou $f(a) - f(b)$ et $a - b$ de même signe	
la courbe C_f coupe l'axe (Ox) au point B d'abscisse : -9	
f est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et $f(4) = f(6)$	
f est définie sur $\mathbb{R}$ et les points de C_f qui ont une abscisse positive sont situés en dessous de la droite D' : $y = 4$	
f est définie sur l'intervalle $[-4, -2]$ et $f(-2) - f(-4) \leq 0$	
f est définie et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et $f(0) = 1$	
f est définie sur $[-5, 7]$, $f(-3) = 1$, $f(0) = 6$ et $f(4) = -2$	
f est définie sur $[-9, -2]$ et vérifie : $f(-9) = 0$ et $\forall x \in [-9, -2]$, $f(x) \geq 0$	
f est définie sur $[-6, 6]$ et vérifie ce qui suit : $\forall x \in [-6, 6]$,$\forall y \in [-6, 6]$ $x < y \Rightarrow -2f(x) \leq -2f(y)$	