Fonctions Début - énoncés feuille 4

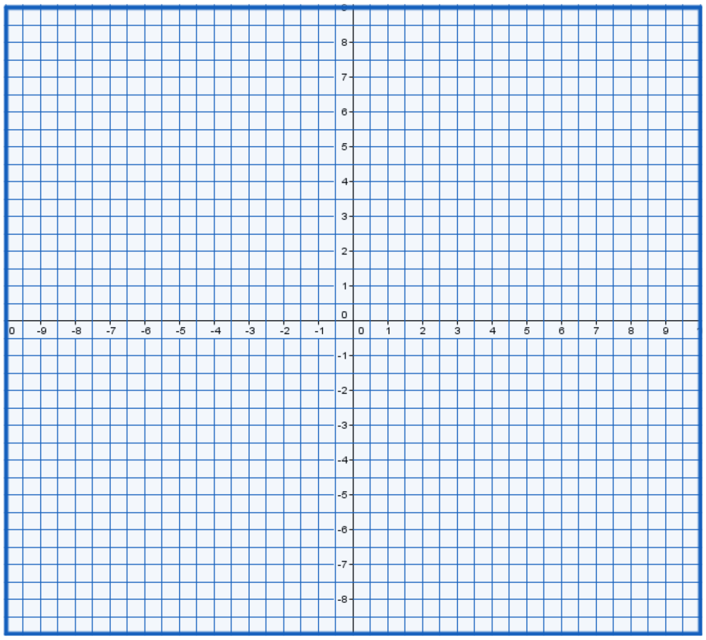
Première Partie : Travailler avec des fonctions affines

exercice 1 Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O .

1) Faire une seule figure et représenter les fonctions affines suivantes :

$f_1 : x \rightarrow f_1(x)$ avec $f_1(x) = \dfrac{3}{2}x$; $f_2 : x \rightarrow f_2(x)$ avec $f_2(x) = -2x$; $f_3 : x \rightarrow -4$

$f_4 : x \rightarrow f_4(x)$ avec $f_4(x) = -2x + 4$; $f_5 : x \rightarrow f_5(x)$ avec $f_5(x) = \dfrac{1}{2}x + 4$



x		
$y = f_1(x) = \dfrac{3}{2}x$		

x		
$y = f_2(x) = -2x$		

x		
$y = f_3(x) = -2$		

x		
$y = f_4(x) = -2x + 4$		

x		
$y = f_5(x) = \dfrac{1}{2}x + 4$		

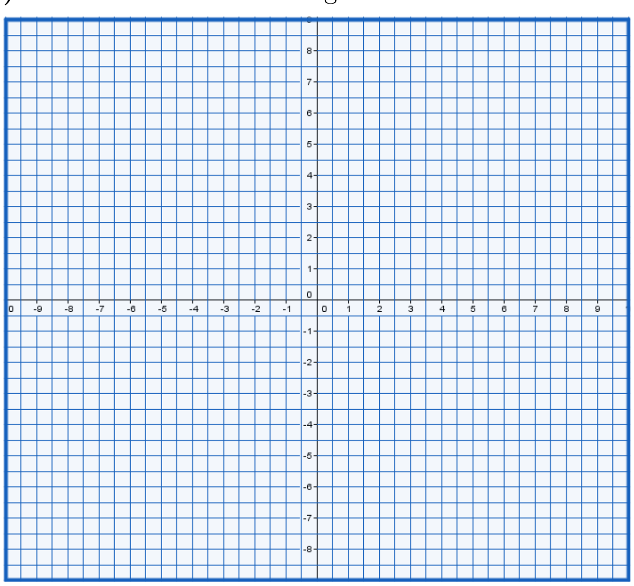
2) Justifier le sens de variation de f_4 sur $\mathbb{R}$ puis justifier le sens de variation de f_5 sur $\mathbb{R}$.

exercice 2 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 7 \Leftrightarrow x \leq -4 \\ f(x) = 1 \Leftrightarrow -4 < x \leq 2 \\ f(x) = 5 \Leftrightarrow x > 2 \end{cases}$ fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{3}{2}x + 12 \Leftrightarrow x \leq -4 \\ g(x) = -\dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow -4 < x \leq 2 \\ g(x) = \dfrac{2}{7}x - \dfrac{25}{7} \Leftrightarrow x > 2 \end{cases}$

1) Sur la figure ci-dessous , tracer la représentation graphique C_f de la fonction f

2) **2-1** Tracer sur la même figure les trois droites suivantes : $D_1 : y = \dfrac{3}{2}x + 12$; $D_2 : y = -\dfrac{3}{2}x$; $D_3 : y = \dfrac{2}{7}x - \dfrac{25}{7}$



x		
$y = \dfrac{3}{2}x + 12$		

x		
$y = -\dfrac{3}{2}x$		

x	2	9
$y = \dfrac{2}{7}x - \dfrac{25}{7}$		

2-2 En déduire la représentation graphique C_g de la fonction g (utiliser une couleur différente de celle de C_f)

exercice 3 caractériser une fonction affine

1) Justifier qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est affine si et seulement si f vérifie la propriété p suivante :

propriété p : Pour tous réels distincts a et b , le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant

2) On donne le tableau de valeurs pour une fonction g :

x	-1	2	5
$g(x)$	5	3	-2

. g est-elle affine ?

3) f est une fonction affine vérifiant : $f(4)=1$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{3}{2}$. Déterminer cette fonction f .

exercice 4 Fonctions affines et pourcentages

Préalable : On peut utiliser les fonctions affines linéaires pour traduire les situations données dans les exemples suivants :

→ pour calculer 20% d'une valeur notée x on multiplie x par $\dfrac{20}{100}$ soit par 0,2 . Autrement dit : au nombre x on associe le nombre $0,2x$. On applique donc la fonction linéaire $f : x \longmapsto 0,2x$

→ en faisant subir à une quantité x une augmentation de 20% , la nouvelle valeur obtenue à l'issue de cette augmentation est le réel y défini par : $y = x + 0,2x = 1,2x$. Autrement dit : augmenter une valeur de 20% c'est appliquer la fonction linéaire $g : x \longmapsto 1,2x$

→ en faisant subir à une quantité x une diminution de 20% , la nouvelle valeur obtenue à l'issue de cette diminution est le réel t défini par : $t = x - 0,2x = 0,8x$. Autrement dit : diminuer une valeur de 20% c'est appliquer la fonction linéaire $h : x \longmapsto 0,8x$

1) Utiliser une fonction linéaire pour traduire les situations suivantes :

la situation	Prendre 45%	augmenter de 30%	diminuer de 75%	augmenter de 100%	Prendre le quart
fonction linéaire à appliquer	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$

la situation	Prendre 5%	augmenter de la moitié	diminuer de moitié	augmenter de 24%	prendre les 2/5
fonction linéaire à appliquer	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$	$x \longmapsto$

2) Quelle fonction affine doit-on appliquer dans chacune des situations suivantes ? (à chaque situation correspond une fonction et une seule ; ne pas justifier le choix effectué pour la fonction affine à appliquer)

les cinq fonctions affines à associer

$f_1 : x \longmapsto f_1(x)$ avec $f_1(x) = 0,75x + 20$

$f_2 : x \longmapsto f_2(x)$ avec $f_2(x) = 0,9x + 25$

$f_3 : x \longmapsto f_3(x)$ avec $f_3(x) = 1,1x - 25$

$f_4 : x \longmapsto f_4(x)$; $f_4(x) = (0,75x) \times 1,3 = 0,975x$

$f_5 : x \longmapsto f_5(x)$; $f_5(x) = (1,2x) \times 0,8 = 0,96x$

la situation proposée	la fonction à appliquer
augmenter de 10% et diminuer de 25	
augmenter de 20% et diminuer de 20%	
prendre 75% puis augmenter de 30%	
diminuer de 10% et augmenter de 25	
prendre les 3/4 et augmenter de 20	

3) Deux magasins d'informatique vendaient au mois de janvier un ordinateur portable au même prix . Le premier magasin a décidé d'augmenter le prix de cet ordinateur de 5% en février puis de le baisser de 10% en mars . Le deuxième magasin a décidé d'augmenter le prix de cet ordinateur de 10% en février puis de le baisser de 5% en mars . A l'issue de ces trois mois , quel magasin offrait le meilleur prix ?

exercice 5 Lydie a acheté un téléphone portable . Trois opérateurs lui proposent les formules suivantes :

	abonnement mensuel fixe pour 2 heures de communication	supplément par minute au-delà des 2 heures du forfait (tout minute entamée est comptée comme dûe)
$1^{ère}$ formule	30 euros	0,25 euros
$2^{ème}$ formule	15 euros	0,75 euros
$3^{ème}$ formule	20 euros	0,5 euros

Pour trouver la formule la plus avantageuse , Lydie note x le nombres de minutes décomptées au-delà des deux heures du forfait , $f_1(x)$ la dépense relative à la $1^{ère}$ formule , $f_2(x)$ la dépense relative à la $2^{ème}$ formule et $f_3(x)$ la dépense relative à la $3^{ème}$ formule

1) Justifier : $f_1(x) = 0,25x + 30$ puis exprimer $f_2(x)$ en fonction de x puis exprimer $f_3(x)$ en fonction de x

(justifier les réponses données respectivement pour $f_2(x)$ et $f_3(x)$)

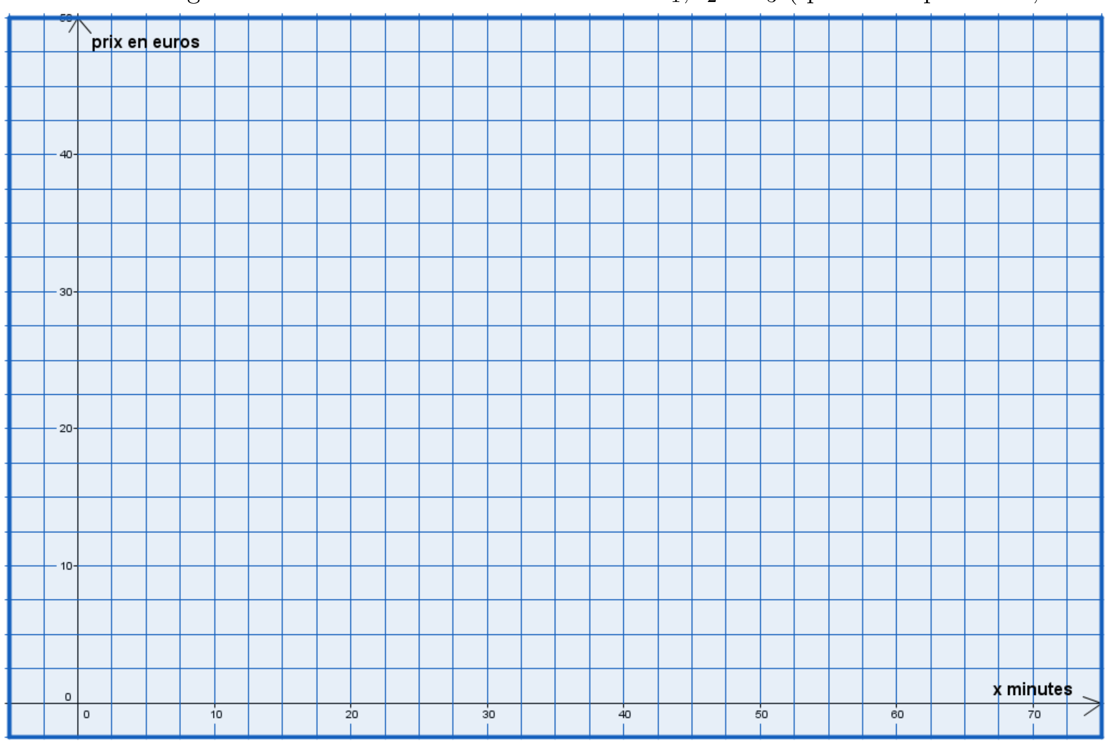
2) Résoudre algébriquement : $(E_1) : x \in \mathbb{R}, f_1(x) = f_2(x)$; $(E_2) : x \in \mathbb{R}, f_2(x) = f_3(x)$; $(E_3) : x \in \mathbb{R}, f_3(x) = f_1(x)$

3) On note D_1 , D_2 et D_3 les représentations graphiques des fonctions affines mises en évidence à la question 1

3-1 Déduire de la question 2) les coordonnées des trois points suivants :

A : point d'intersection de D_1 et D_2 ; B : point d'intersection de D_2 et D_3 ; C : point d'intersection de D_3 et D_1

3-2 Représenter sur la figure ci-dessous les trois fonctions affines f_1, f_2 et f_3 (placer les points A , B et C)



$\rightarrow f_1(x) = 0,25x + 30$

x		
$f_1(x)$		

$\rightarrow f_2(x) =$

x		
$f_2(x)$		

$\rightarrow f_3(x) =$

x		
$f_3(x)$		

4) Pour chaque valeur de x , on note g(x) le minimum des trois montants de dépense $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$

4-1 Déterminer graphiquement g(x) lorsque x est compris entre 0 et 20 . Que représente la fonction g ?

4-2 Sur la figure , tracer d'une couleur différente la représentation graphique de la fonction g

4-3 Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

→ Si Lydie pense dépasser le forfait de 35 minutes , quelle est la formule la moins chère ?

→ Si Lydie pense dépasser le forfait de plus 45 minutes , quelle est la formule la moins chère ?

Deuxième Partie : Travailler avec des fonctions polynômes du second degré

exercice 6 Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O .

1) Faire une seule figure et représenter les fonctions suivantes :

$f : x \to f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - 1$; $g : x \to g(x)$ avec $g(x) = -\dfrac{5}{2}(x+3)^2$

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$									

x	$-4,5$	-4	$-3,5$	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$
$g(x)$							

2) Dresser par lecture graphique le tableau de variation de f puis justifier ce tableau de variation

3) **3-1** Dresser par lecture graphique le tableau de variation de g

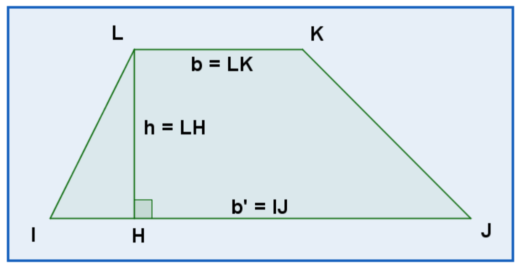
3-2 Préciser l'enchaînement des étapes successives de calcul permettant de calculer l'image g(x) puis justifier le tableau de variation de g

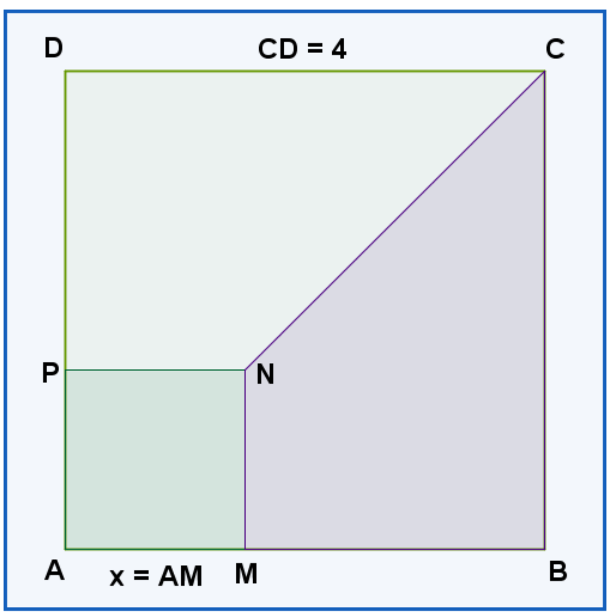
3-3 Utiliser les variations de g pour donner un encadrement de g(x) lorsque x est compris strictement entre -4 et -3 puis interpréter graphiquement les résultats .

exercice 7

un rappel : l'aire A d'un trapèze IJKL de bases $[IJ]$ et $[LK]$ et de hauteur $[LH]$ est définie par la formule suivante :

A $= \frac{1}{2} \times (b + b') \times h$ avec $\begin{cases} \text{b et b' longueurs des bases} \\ \text{h longueur de la hauteur} \end{cases}$





La figure met en évidence un carré ABCD de côté 4 ; un point variable M situé à l'intérieur du segment $[AB]$, un deuxième carré variable AMNP , le sommet P étant situé sur $[AD]$

On note :

→ x la longueur variable AM

→ f la fonction qui à x associe l'aire du carré AMNP

→ g la fonction qui à x associe l'aire du trapèze BCNM

1) Justifier : les aires f(x) et g(x) sont définies pour x élément de $I =]0,4[$ puis exprimer f(x) et g(x) en fonction de x

2) Faire une seule figure : en utilisant leurs points ayant une abscisse entière comprise entre -4 et 4 , tracer les deux paraboles suivantes : $\mathcal{P}_1 : y = x^2$ et $\mathcal{P}_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8$

3) Sur la figure précédente , mettre en évidence les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur l'intervalle I en utilisant une couleur par courbe .

4) Par lecture graphique , justifier qu'il existe une seule valeur de x (notée x_0) pour laquelle le carré AMNP a la même aire que le trapèze BCNM et donner un encadrement de x_0 entre deux entiers consécutifs

5) Déterminer algébriquement la valeur exacte de x_0

exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O . On note C_f la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{4}$

1) Justifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\right]$

vocabulaire : pour la suite on appelle forme canonique de f(x) l'expression $\frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\right]$ qui est égale à f(x))

2) En utilisant la forme canonique de f(x) , calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ puis justifier : pour tout réel x , $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$. Que peut-on en déduire ?

3) En utilisant la forme canonique de f(x) , construire la forme factorisée de f(x) puis déterminer les antécédents du réel 0 pour f . Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

4) En utilisant la calculatrice et en choisissant convenablement la table des valeurs de l'image f(x) , représenter la courbe C_f puis tracer les droites $D_1 : y = -\frac{5}{4}$ et $D_2 : y = \frac{5}{3}x - \frac{17}{4}$

5) En utilisant la forme canonique de f(x) , préciser l'enchaînement des étapes successives de calcul permettant d'obtenir la valeur de f(x) . Justifier ensuite le sens de variation de f sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ puis sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ puis dresser le tableau de variation de f .

6) Résoudre graphiquement puis algébriquement chacune des deux équations suivantes :

$(E_1) : x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{5}{4}$; $(E_2) : x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{17}{4}$

exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O . On considère la représentation graphique C_f de la fonction suivante : $f : x \to f(x)$ avec $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$; les droites $D_1 : y = x + 8$; $D_2 : y = -x + 2$

1)1-1 En utilisant la calculatrice , compléter le tableau suivant de valeurs prises par f(x)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	2	3
$f(x)$									

1-2 Tracer la droite d'équation $\Delta : x = -2$ puis la coube C_f puis dresser par lecture graphique le tableau de variation de f .

1-3 Justifier par le calcul : pour tout réel x : $f(-2 + x) = f(-2 - x)$. Que peut-on déduire comme propriété pour la courbe C_f ?

2) 2-1 Déterminer , par le calcul , les antécédents de $\frac{7}{2}$ pour f . Interpréter graphiquement les résultats .

2-2 Justifier que pour tout réel x : $-\frac{1}{2}\left[(x + 2)^2 - 11\right] = f(x)$; en déduire que les points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe (Ox) ont pour abscisses $-2 - \sqrt{11}$ et $-2 + \sqrt{11}$

3) 3-1 Tracer les droites $D_1 : y = x + 8$ et $D_2 : y = -x + 2$

3-2 Résoudre graphiquement l'inéquation $(I) : x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$

3-3 Justifier que pour tout réel x : $f(x) - (x + 8) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

exercice 10 Calcul d'un seuil de rentabilité

Une chaîne d'hôtels désire orienter ses investissements : elle réalise une analyse sur le bénéfice B(x) de chaque hôtel , en fonction du taux d'occupation des chambres . Ce taux , noté x , est exprimé en % .

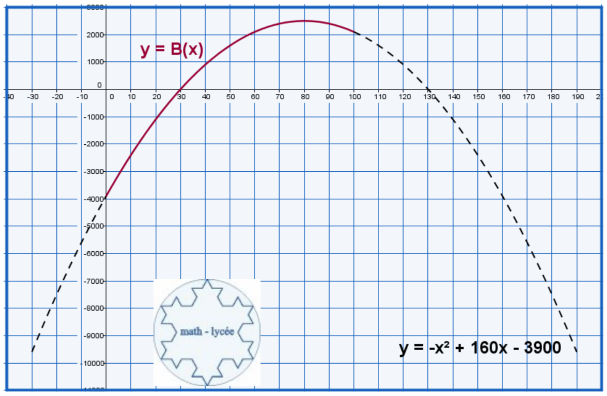
Pour x élément de $[0, 100]$ on a : $B(x) = -x^2 + 160x + c$

1) Calculer la valeur de c en sachant que pour un taux d'occupation de 40% le bénéfice est de 900€

2) 2-1 Justifier pour tout réel x : $B(x) = -\left[(x - 80)^2 - 2500\right]$ (forme canonique de B(x)) .

2-2 En utilisant la forme canonique de B(x) , donner l'organigramme des étapes de calculs permettant d'obtenir la valeur de B(x) . Justifier ensuite le sens de variation de B sur $[0, 80]$ puis sur $[80, 100]$ puis dresser le tableau de variation de B sur $[0, 100]$.

2-3 En déduire la valeur du taux pour laquelle le bénéfice est maximal et préciser le bénéfice maximal qui peut être réalisé par un hôtel de cette chaîne hôtelière .



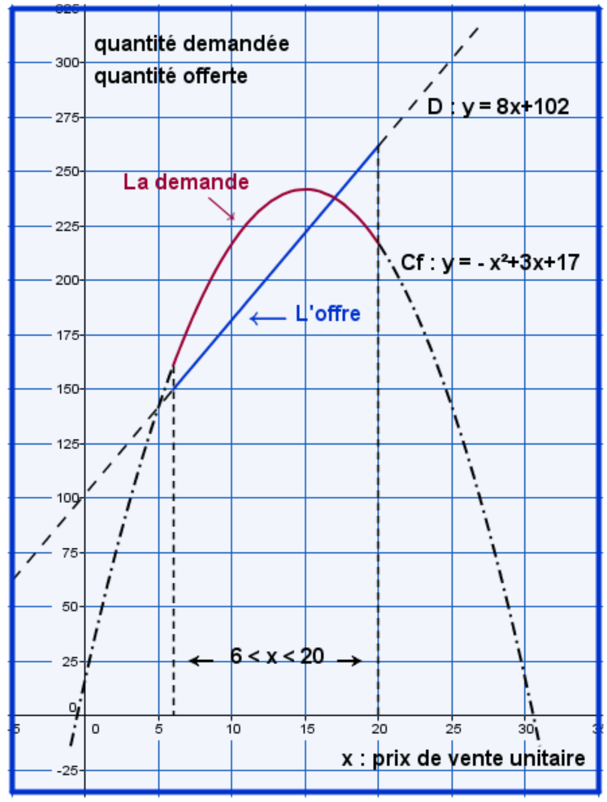
3) on appelle seuil de rentabilité le taux d'occupation des chambres pour laquel le bénéfice est nul .

3-1 La figure donne la représentation graphique de la fonction B Déterminer graphiquement le seuil de rentabilité pour un hôtel de cette chaîne hôtelière .

3-2 Ecrire la forme factorisée de B(x) puis déterminer algébriquement ce seuil de rentabilité .

exercice 11 **offre et demande**

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité de biens ou de services que les acteurs sur un marché sont prêts à vendre ou à acheter avec un prix donné . Une entreprise veut avant commercialisation , étudier et déterminer le prix en euros d'un nouveau produit . On note x le prix de vente unitaire de ce produit , x variant entre 6 et 20 euros . La demande pour ce produit est donnée en fonction du prix de vente par la fonction f définie sur $[6, 20]$ par : $f(x) = -x^2 + 30x + 17$. L'offre est donnée en fonction du prix de vente par la fonction g définie sur $[6, 20]$ par : $g(x) = 8x + 102$. La figure met en évidence la parabole représentant la fonction : $x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = -x^2 + 30x + 17$ et la droite d'équation $y = 8x + 102$.



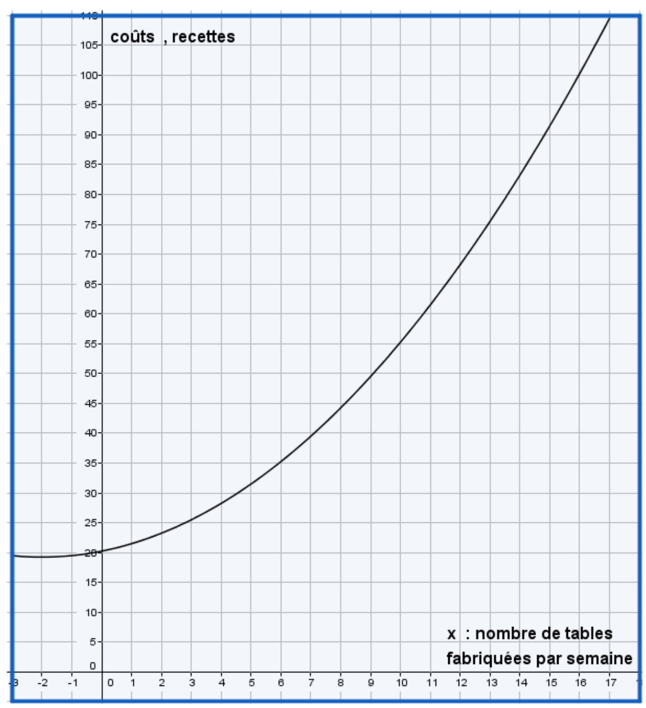
1) Développer $(x - 5)(x - 17)$ puis en déduire la résolution de l'équation : (E) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 8x + 102$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2) En déduire le prix d'équilibre , c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande

exercice 12

Une entreprise de menuiserie produit et vend des tables . L'objectif de cet exo est de comparer les recettes et les coûts provoqués par cette activité . On note x le nombre de tables fabriquées chaque semaine , x étant un nombre compris entre 3 et 12 .

1) La **figure** utilise un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 5 unités en ordonnée) . La figure donne la représentation graphique C_f la fonction f définie par : $f(x) = 0,25x^2 + x + 20,25$ sur $[-3, 16]$. Compléter le graphique en traçant en rouge la partie de C_f utilisée pour la représentation graphique de la fonction C_T puis tracer les droites d'équation réduites respectives : $y = 5,5x$ et $y = 6,3x$



2) Recherche d'un prix de vente . Toutes les tables fabriquées sont vendues et l'entreprise doit fixer le prix de son produit .

On note R(x) la recette , en centaines d'euros , occasionnée par la vente de x tables .

2-1 La première proposition est un prix de 550€ par table . Calculer R(10) dans ce cas puis exprimer R(x) en fonction de x . En utilisant la question 1 , expliquer pourquoi ce prix de vente ne peut pas convenir sur le plan commercial .

2-2 La deuxième proposition est un prix unitaire de 630€ .a) Exprimer R(x) en fonction en fonction de x dans ce cas .

b) En déduire graphiquement, en justifiant la réponse , les valeurs entières de x appartenant à [3,12] pour lesquelles la recette sera strictement supérieure au coût total .

exercice 13 Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O . On note C_f la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{2}\left[(x+3)^2 - 4\right] \leftarrow$ forme canonique de f(x)

1) Donner la forme factorisée de f(x) puis la forme developpée de f(x)

2) En utilisant la forme canonique de f(x) , calculer $f(-3)$ puis comparer pour tout réel x , $f(x)$ et $f(-3)$. Que peut-on en déduire ?

3) En utilisant la calculatrice dresser une table des valeurs de l'image f(x) avec x compris entre -7 et 1 et avec un pas de 1 .

En plaçant tous les points associés au tableau précédent de valeurs , représenter la courbe C_f puis tracer les deux droites suivantes : D_1 : $y = 3x + 7$ et D_2 : $y = -2x - 10$. Dresser ensuite le tableau de variation pour f à l'aide du graphique .

4) En utilisant la forme canonique de f(x) , donner l'organigramme des étapes de calculs permettant d'obtenir la valeur de f(x) puis justifier le tableau de variation conjecturé précédemment .

5) Déterminer graphiquement puis algébriquement les antécédents du réel $\frac{5}{2}$

6) Résoudre algébriquement (E_1) : $x \in \mathbb{R}\,, f(x) = 3x + 7$. Le point de vue graphique pouvait-il être concluant pour cette résolution ?

7) Résoudre algébriquement (E_2) : $x \in \mathbb{R}\,, f(x) + 2x + 10 = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

8) on note g la fonction associée à la fonction f de la manière suivante : f et g attribuent la même image à tout réel x négatif et deux réels opposés ont la même image par g . Représenter la courbe C_g sur la figure ci-dessus puis donner le tableau de variation pour g

Troisième Partie : Travailler avec des fonctions homographiques

exercice 14 Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O . On note C_f la représentation graphique de la fonction $f : x \rightarrow f(x)$ avec $f(x) = \frac{-3}{2x-1} =$ et on considère la droite Δ : $y = x + 3$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(a) - f(b)$ avec a et b éléments de D_f .

2) En déduire le sens de variation de f sur chacun des deux intervalles $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

3) Tracer la droite $D : x = \frac{1}{2}$ puis la courbe C_f et la droite Δ .

4) Résoudre graphiquement l'équation $(E) : x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ puis l'inéquation $(E) : x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x + 3$

5) Retrouver les résultats de la question **4)** de manière algébrique .

exercice 15 Une entreprise fabrique des parapluies en grande quantité . Le coût total de production pour une production inférieure à 10000 objets comporte un coût fixe de 3000€ et un coût variable de 15€ par objet .

1) On note C(x) le coût total de production pour la fabrication de x objets ($0 < x \leq 10000$). Exprimer C(x) en fonction de x .

2) Avec x vérifiant: $0 < x \leq 10000$, on note $f(x) = \frac{C(x)}{x}$. f(x) représente le coût moyen de production d'un objet .

Exprimer f(x) en fonction de x .

3) Etudier le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$ puis représenter f sur $]0, 10000]$.

4) Un objet fabriqué est vendu 25€ . Déterminer graphiquement une estimation de la quantité à partir de laquelle la production devient rentable . Déterminer ensuite cette quantité de manière algébrique .

exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O .

On note C_f la représentation graphique de la fonction f : $x \rightarrow f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{2x+9}{x+2}$ et on considère les deux droites suivantes : $D_1 : x = -2$ et $D_2 : y = 2$

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Que peut-on en déduire ?

2) Justier que la courbe C_f ne possède pas de point d'ordonnée 2 . Que peut-on en déduire ?

3) Compléter le tableau suivant

x	-7	-6	-4,5	-4	-3	-2.5	-1,5	-1	0	0.5	2	3	8
f(x)													

figure : axe (Ox) : de -10 à 10 ; axe (Oy) : de -8 à 8

Tracer D_1 et D_2 puis représenter la courbe C_f en plaçant tous les points associés au tableau précédent de valeurs de f(x) . Dresser ensuite le tableau de variation de f .

4) Justifier : pour tout réel x de D_f , $\dfrac{2x+9}{x+2} = 2 + \dfrac{5}{x+2}$. En déduire l'enchaînement des étapes successives de calcul permettant d'obtenir la valeur de f(x) puis justifier ensuite le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, -2[$ puis sur l'intervalle $]-2, +\infty, [$

5) Tracer sur la figure la droite $\Delta : y = 5x + 12$ puis déterminer graphiquement l'ensemble solution S de l'inéquation $(I) :\ x \in \mathbb{R} , f(x) \leq 5x + 12,$

6) Déterminer graphiquement le signe de f(x) puis justifier ces résultats en utilisant un tableau de signe .

exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O .

On note C_f la représentation graphique de la fonction f : x→ $f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$ et on considère les deux droites suivantes : $D : x = 1$ et $\Delta : y = -2$

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Que peut-on en déduire ?

2) Justifier que la courbe C_f ne possède pas de point d'ordonnée -2 . Que peut-on en déduire ?

3) Compléter le tableau suivant

x	-4	-3	-2	-1	0	$0,5$	$0,75$	$1,25$	$1,5$	2	3	4	5	6
$f(x)$														

En plaçant tous les points associés au tableau précédent de valeurs , représenter la courbe C_f puis tracer la droite passant par les points A $\begin{pmatrix} -4 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -4 \end{pmatrix}$. Dresser ensuite le tableau de variation pour f à l'aide du graphique

4) Justifier : pour tout réel x de D_f , $\dfrac{1-2x}{x-1} = -2 - \dfrac{1}{x-1}$. En déduire l'enchaînement des étapes successives de calcul permettant d'obtenir la valeur de f(x) puis justifier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, 1[$

5) Justifier que la droite (AB) a pour équation : $y = -x - \dfrac{5}{2}$.

6) **6-1** Justifier : pour tout réel de D_f : $f(x) + x + \dfrac{5}{2} = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{2(x-1)}$

6-2 Déterminer les abscisses des points communs à C_f et à la droite (AB) .

Déterminer graphiquement l'ensemble S des réels x vérifiant l'encadrement : $-x - \dfrac{5}{2} < f(x) \leq 0$.

7) α étant un réel non nul , on note M et M' les points de C_f ayant respectivement pour abscisse $1 - \alpha$ et $1 + \alpha$

7-1 Calculer les ordonnées de M et M'

7-2 Calculer les coordonnées du milieu I de [MM'] . Que peut-on en déduire ?

exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O .

La figure donne la représentation graphique de chacune des sept fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f_1 : x \to f_1(x)$ avec $f_1(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 2$

$f_2 : x \to f_2(x)$ avec $f_2(x) = \dfrac{-2}{x}$

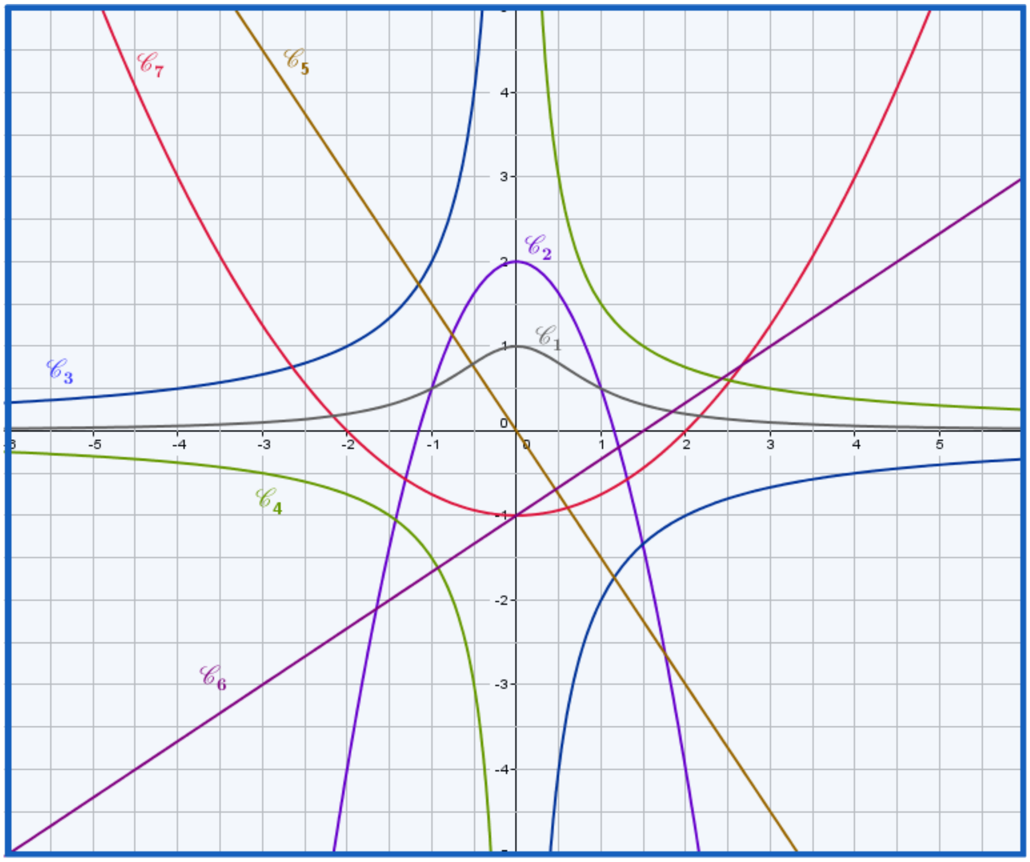
$f_3 : x \to f_3(x)$ avec $f_3(x) = -\dfrac{3}{2}x$

$f_4 : x \to f_4(x)$ avec $f_4(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$

$f_5 : x \to f_5(x)$ avec $f_5(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f_6 : x \to f_6(x)$ avec $f_6(x) = \dfrac{3}{2x}$

$f_7 : x \to f_7(x)$ avec $f_7(x) = \dfrac{2}{3}x - 1$



1) Associer à chacune des sept courbes de la figure l'une des sept fonctions définies précédemment et expliquer la méthode utilisée dans le tableau ci-dessous

la courbe C_i	représente ?	Justifications rapides du choix de la fonction représentée par la courbe C_i
courbe C_1		
courbe C_2		
courbe C_3		
courbe C_4		
courbe C_5		
courbe C_6		
courbe C_7		

2) Par lecture graphique , dresser le tableau de variation des fonctions f_2 , f_4 , f_5

3) Justifier le tableau de variation de f_5 (écrire en préalable le schéma des étapes successives de calcul permettant d'obtenir la valeur de $f_5(x)$)

exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |3 - 2x|$

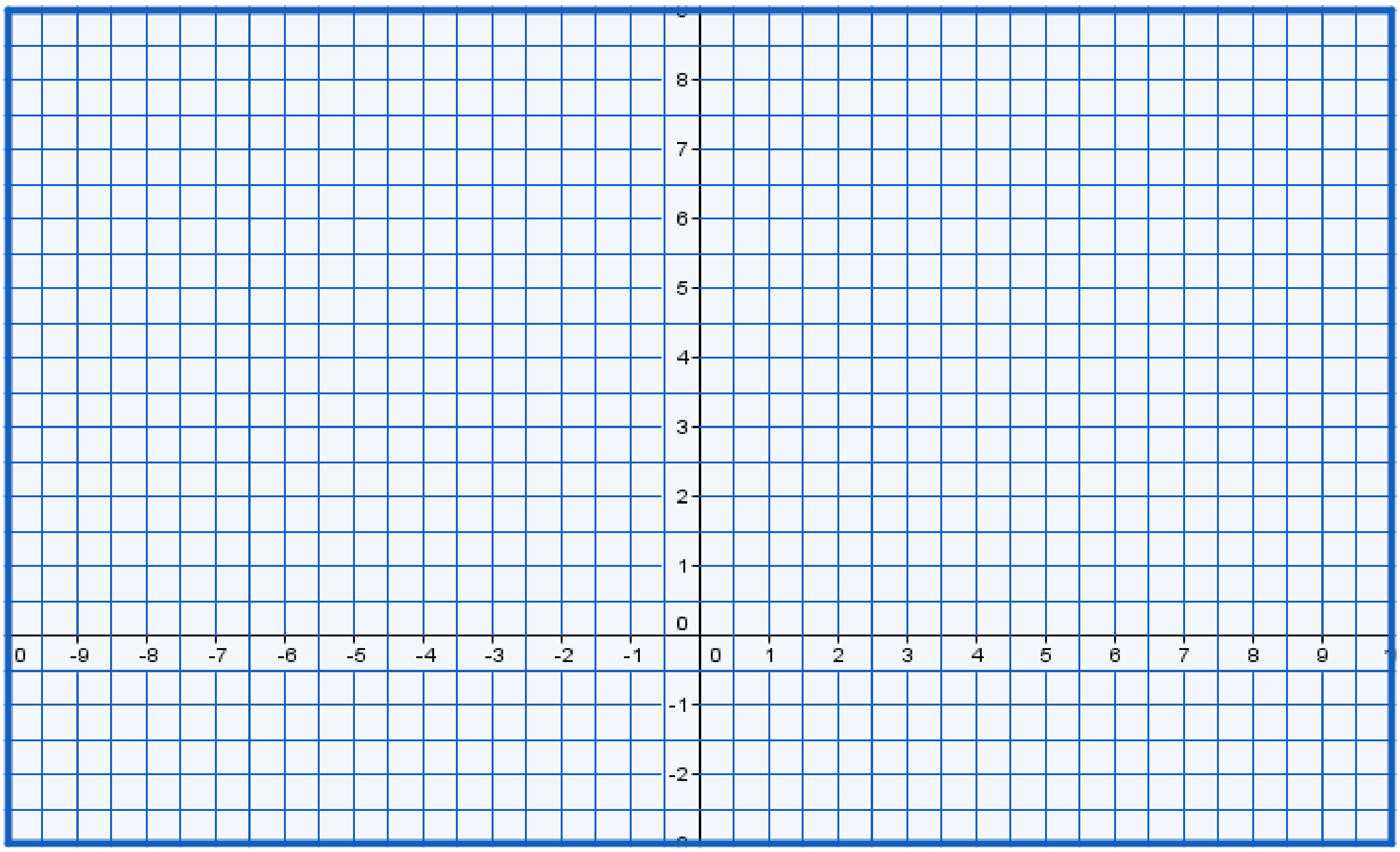
1) Calculer les images par f des réels -2 et 5 :

$f(-2) =$; $f(5) =$

2) Utiliser le tableau pour écrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue puis définir les deux types de points situés sur C_f

<table>
<tr><td>x</td><td colspan="2">$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>signe de $3 - 2x$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) = |3 - 2x|$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>point M $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ situé sur C_f</td><td>$M_1 \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$
M_1 est situé sur D_1 : $y =$
<table><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$y =$</td><td></td><td></td></tr></table></td><td>$M_2 \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$
M_2 est situé sur D_2 : $y =$
<table><tr><td>x</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$y =$</td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

3) Tracer la représentation graphique de la fonction f puis celle de la fonction valeur absolue



4) Déterminer graphiquement l'ensemble solution S de : $x \in \mathbb{R}$, $|3 - 2x| = 5$

5) Résoudre algébriquement puis graphiquement : $x \in \mathbb{R}$, $|3 - 2x| = |x|$

exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O . On note C_f la représentation graphique de la fonction $f : x \to f(x)$ avec $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis compléter la table de valeurs suivante

x	-9	-4,5	-1	1,5	2	3	3,25	3,5
f(x)								

2) Tracer la courbe C_f puis dresser par lecture graphique le tableau de variation de f .

3) Justifier le sens de variation de f .

exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O .

On note C_f la représentation graphique de la fonction $f : x \to f(x)$ avec $f(x) = |x+1| - |1-2x|$

1) Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue . En déduire que la courbe C_f possède trois catégories de points .

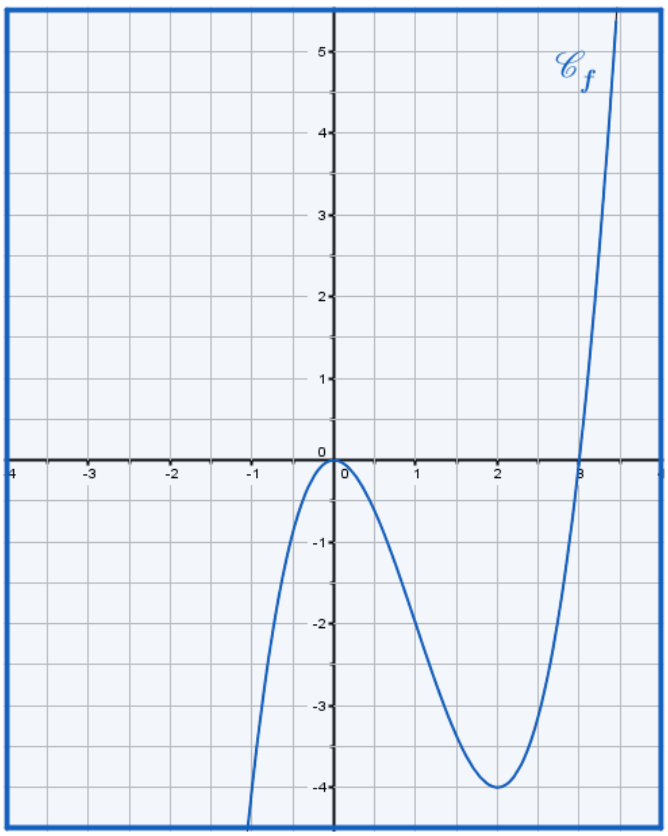
x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $x+1$	
signe de $1-2x$	
$\lvert x+1\rvert =?$	
$\lvert 1-2x\rvert =?$	
$f(x) = \lvert x+1\rvert - \lvert 1-2x\rvert =?$	

2) Tracer la courbe C_f .

exercice 22

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(|x|)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |f(x)|$. La figure donne la courbe C_f avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2$



	A	B	C	D
1	x	$x^3 - 3\,x^2$	$\lvert x\rvert^3 - 3\,\lvert x\rvert^2$	$\lvert x^3 - 3\,x^2\rvert$
2	-2	-20	-4	20
3	-1.5	-10.13		
4	-1	-4		
5	-0.5	-0.87		
6	0	0		
7	0.5	-0.63		
8	1	-2		2
9	1.5	-3.38		
10	2	-4	-4	
11	2.5	-3.12		
12	3	0		
13	3.5	6.13		
14	4	16		
15	4.5	30.38		
16	5	50		

Le but de cet exercice est de donner une méthode pour déduire chacune des représentations graphiques de g et h de celle de f

1) 1-1 Justifier : g est paire (avec f quelconque)

1-2 En déduire un procédé permettant de construire la courbe C_g en utilisant la courbe C_f

1-3 application : **avec** : $f(x) = x^3 - 3x^2$, que devient g(x) ? Compléter la figure : tracer la courbe représentant $g : x \longmapsto |x|^3 - 3x^2$

2) 2-1 cas général : avec f quelconque , écrire h(x) sans le symbole de la valeur absolue

2-2 En déduire un procédé permettant de construire la courbe C_h en utilisant la courbe C_f

2-3 application avec : $f(x) = x^3 - 3x^2$ et $h(x) = \left|x^3 - 3x^2\right|$

→ Etudier le signe de f(x) de manière graphique puis de manière algébrique

→ Ecrire h(x) sans le symbole de la valeur absolue puis tracer C_h (utiliser des couleurs différentes pour C_g et C_h)

exercice 23

Tout réel x peut être encadré par deux entiers relatifs consécutifs . Le plus grand des entiers relatifs inférieurs à un réel x donné est appelé la partie entière de x et est noté E(x) . D'où la définition suivante de E(x) :

$\boxed{\text{Avec } k \in \mathbb{Z} \text{ , } E(x) = k \Leftrightarrow x \in [k, k+1[}$ (1).

On appelle **fonction partie entière** la fonction qui à x associe E(x)

1) Calculer $E(-2,5)$, $E(2,5)$, $E(4)$, $E\left(\dfrac{4}{7}\right)$

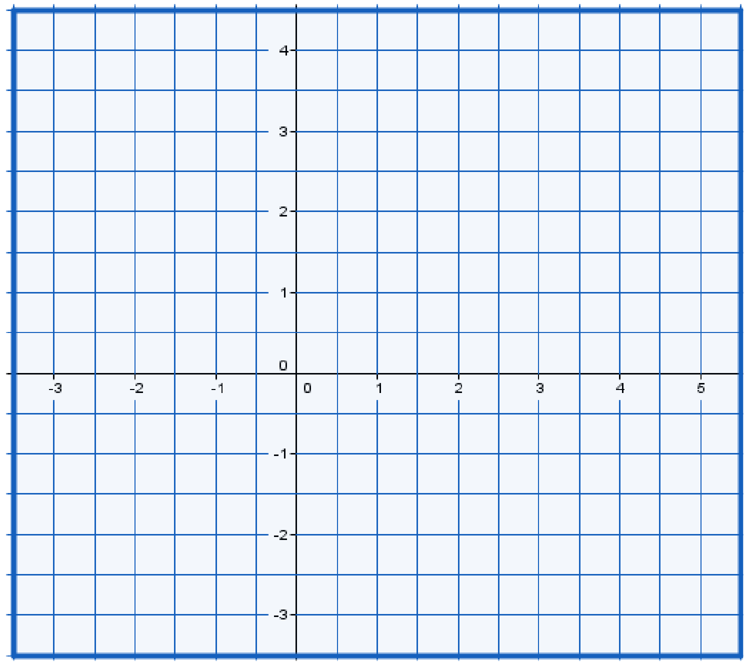
2) Déduire de (1) les propriétés suivantes :

→ Pour tout réel x : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

→ Pour tout réel x : $x - 1 < E(x) \leq x$

→ Pour tout réel x : $E(x + 1) = E(x) + 1$

3) Compléter le tableau suivant puis représenter la fonction partie entière sur l'intervalle $[-3, 5[$



x	$x \in [-3, -2[$	$x \in [-2, -1[$	$x \in [-1, 0[$	$x \in [0, 1[$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [4, 5[$
E(x)								

exercice 24

On considère les **quatre fonctions** suivantes **associées à la fonction partie entière**

$d : x \to d(x)$ avec $\underline{d(x) = x - E(x)}$ $s : x \to s(x)$ avec $\underline{s(x) = x + E(x)}$

$p : x \to p(x)$ avec $\underline{p(x) = x \times E(x)}$ $q : x \to q(x)$ avec $\underline{q(x) = \dfrac{E(x)}{x}}$

1) fonction d **1-1** Justifier : pour tout entier relatif k , $d(k) = 0$ et pour tout réel x : $0 \leq d(x) < 1$

1-2 Compléter le tableau suivant puis représenter la fonctions d sur $[-3, 5[$

x	$x \in [-3, -2[$	$x \in [-2, -1[$	$x \in [-1, 0[$	$x \in [0, 1[$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$	$x \in [3, 4[$	$x \in [4, 5[$
$d(x) = x - E(x)$								

2) fonction s **2-1** Justifier : pour tout entier relatif k , $s(k) = 2k$ et pour tout réel x de $[k, k+1[$: $2k \leq s(x) < 2k + 1$

2-2 Compléter le tableau suivant puis représenter la fonction s sur $[-2, 3[$

x	$x \in [-2, -1[$	$x \in [-1, 0[$	$x \in [0, 1[$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$
$s(x) = x + E(x)$					

3) fonction p **3-1** Justifier : pour tout entier relatif k , $p(k) = k^2$ et pour tout réel x de $[k, k+1[$, $p(x) = kx$

3-2 Compléter le tableau suivant puis représenter la fonction p sur $[-2, 3[$

x	$x \in [-2, -1[$	$x \in [-1, 0[$	$x \in [0, 1[$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$
$p(x) = x \times E(x)$					

4) fonction q . **4-1** Justifier $D_q = \mathbb{R} - \{0\}$. **4-2** Que peut-on dire des points de C_q ayant une abscisse élément de $]0, 1[$?

4-3 Que peut-on dire des points de C_q ayant une abscisse élément de $[-1, 0[$?

4-4 Justifier : pour tout entier relatif k non nul : $q(k) = 1$ et la fonction q est représentée sur $[k, k+1[$ par un arc d'hyperbole .

4-5 Compléter le tableau suivant puis représenter la fonction q sur $[-4, 4[$

x	$x \in [-4, -3[$	$x \in [-3, -2[$	$x \in [-2, -1[$	$x \in [1, 2[$	$x \in [2, 3[$	$x \in [3, 4[$
$q(x) = \dfrac{E(x)}{x}$						