L'outil vectoriel

A propos des vecteurs

$\boxed{\text{définition 1}}$ A et B sont deux points distincts du plan P . **<u>Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$</u>** est défini par les trois critères suivants : $\rightarrow$ sa direction : celle de la droite (AB) (deux droites de même direction sont deux droites parallèles)

$\rightarrow$ son sens : de A vers B

$\rightarrow$ sa norme : la longueur du segment [AB] (la norme de $\overrightarrow{AB}$ est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = d(A, B)$)

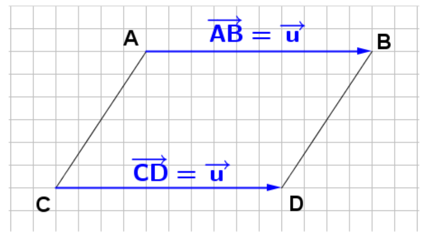
Pour justifier ou utiliser l'égalité de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

on peut avoir recours à l'un des critères suivants

1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même direction , même sens et de même norme

2) le quadrilatère ABDC est un parallélogramme

3) les segments [AD] et [BC] ont le même milieu I



<u>vocabulaires</u> : · lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit que les couples (A,B) et (C,D) sont des représentants d'un même vecteur non nul noté $\overrightarrow{u}$

· lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ on dit que le couple (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'origine A et d'extrémité B

$\boxed{\text{définition 2}}$ Tout couple (M, M) avec M point du plan est appelé un représentant du **<u>vecteur nul noté $\overrightarrow{o}$</u>**

<u>remarques</u> : 1) $\overrightarrow{o} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots = \overrightarrow{MM}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow A = B$

3) le vecteur nul noté $\overrightarrow{o}$ n'a pas de direction , n'a pas de sens mais possède une norme égale à zéro ($\|\overrightarrow{o}\| = 0$)

A propos de l'addition des vecteurs

<u>1) définitions</u>

$\boxed{\text{définition 3}}$ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques de l'ensemble V des vecteurs du plan

On appelle **vecteur somme du vecteur $\overrightarrow{u}$ et du vecteur $\overrightarrow{v}$** le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et défini par ce qui suit :

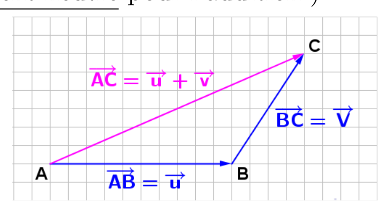
<u>1^{er} *cas* : l'un au moins des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul</u> : on pose $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{o} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$

Ainsi pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ on a : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{o} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ (<u>$\overrightarrow{o}$ est appelé élément neutre</u> pour l'addition)

<u>$2^{ème}$ *cas* : les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont distincts du vecteur nul</u>

En ayant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ on pose : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$

<u>Relation de Chasles</u> : Pour tous points A , B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



$\boxed{\text{définition 4}}$ L'**opération** , qui au couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ associe le vecteur somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est appelée l'**addition des vecteurs**

<u>2) propriétés</u> 2-1 L'addition des vecteurs est **commutative** : Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

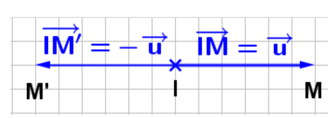
2-2 L'addition des vecteurs est **associative** : Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

2-3 Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ possède un **vecteur opposé** , noté $-\overrightarrow{u}$, caractérisé par : $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$

<u>remarques</u> : · le vecteur nul est égal à son vecteur opposé

· deux vecteurs non nuls opposés sont deux vecteurs de même direction , de même norme et de sens contraires ; autrement dit : avec $A \neq B$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$

· Lorsque deux vecteurs opposés ont des représentants de même origine I , les extrémités de ces représentants sont symétriques par rapport à I (I milieu de [M , M'])



A propos de la multiplication des vecteurs

1) définitions

définition 5 $\overrightarrow{u}$ est un vecteur quelconque de V et k est un réel quelconque

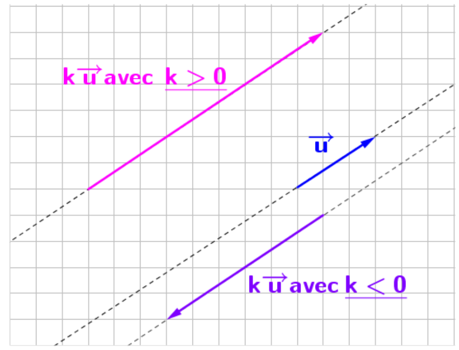
On appelle produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k , le vecteur noté k$\overrightarrow{u}$ et défini par ce qui suit :

$1^{er}cas$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$ ou $k = 0$. On pose $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}$

$2^{ème}cas$: $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o}$ et $k \neq 0$.

Alors $k\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul défini

par les trois critères suivants :



→ $k\overrightarrow{u}$ est de même direction que $\overrightarrow{u}$

→ $k\overrightarrow{u}$ est de même sens que $\overrightarrow{u}$ ssi : k > 0

$k\overrightarrow{u}$ est de sens contraire à celui de $\overrightarrow{u}$ ssi : k < 0

→ la norme de $k\overrightarrow{u}$ est définie par : $\|k\overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$

définition 6 L'opération , qui au couple $(k, \overrightarrow{u})$ associe $k\overrightarrow{u}$, est appelée la multiplication d'un vecteur par un réel

définition 7 Un vecteur $\overrightarrow{v}$ est dit colinéaire à $\overrightarrow{u}$ ssi : $\exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$

remarques :→ $\overrightarrow{o} = 0\overrightarrow{u}$ donc le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\overrightarrow{u}$

→ deux vecteurs non nuls colinéaires sont deux vecteurs de même direction

définition 8 Un vecteur $\overrightarrow{w}$ est dit combinaison linéaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si on peut trouver deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

2) propriétés

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent des vecteurs quelconques ; a ,b , k désignent des réels quelconques ; A et B désignent des points quelconque du plan P .

2-1 $\boxed{1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}}$; $\boxed{(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}}$ 2-2 $\boxed{k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{o}}$

2-3 $\boxed{(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}}$ 2-4 $\boxed{(a \times b)\overrightarrow{u} = a(b\overrightarrow{u}) = b(a\overrightarrow{u})}$ 2-5 $\boxed{k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}}$

2-5 $\boxed{-(k\overrightarrow{u}) = (-k)\overrightarrow{u} = k(-\overrightarrow{u}) \text{ et } -(k\overrightarrow{AB}) = (-k)\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{BA})}$ 2-6 $\boxed{k\overrightarrow{u} = (-k)(-\overrightarrow{u}) \text{ et } k\overrightarrow{AB} = (-k)(\overrightarrow{BA})}$

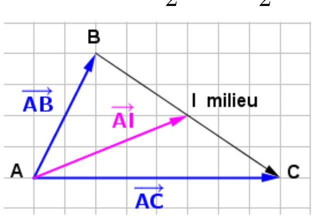
principe à retenir : les techniques opératoires utilisées pour le calcul vectoriel sont analogues aux techniques opératoires utilisées pour le calcul algébrique dans $\mathbb{R}$.

deux théorèmes utiles pour les exos utilisant des milieux

théorème de la médiane

Dans un triangle ABC avec I milieu de [BC]

on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



[AI] est la médiane

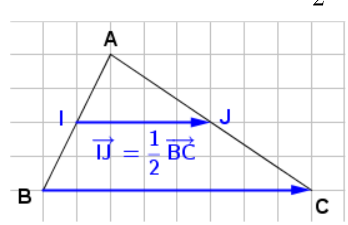
du triangle ABC

issue de A

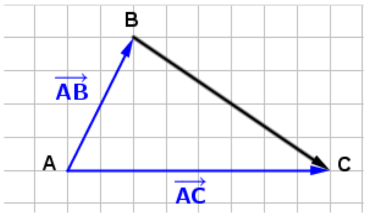
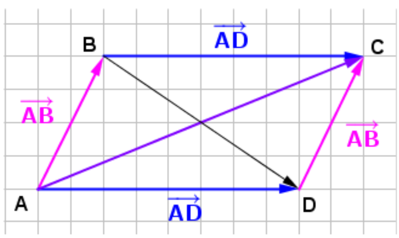
théorème des deux milieux

Dans un triangle ABC avec I milieu de [AB]

et J milieu de [AC] on a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



choisir une base avec une figure de référence

la **figure de référence** donnée **dans l'énoncé** de l'exercice	**bases possibles** avec **deux vecteurs non colinéaires** associés à cette figure et expressions des autres vecteurs en fonction des vecteurs de la base choisie	
un triangle ABC 	base choisie	expression d'autres vecteurs associés à la figure
	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$	vecteur associé au $3^{\text{ème}}$ côté du triangle $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ (Chasles) et $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
	$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$	vecteur associé au $3^{\text{ème}}$ côté du triangle $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (Chasles) et $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
un parallélogramme ABCD 	base choisie	expression d'autres vecteurs associés à la figure
	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$	· vecteurs associés aux deux autres côtés de ABCD ABCD parallélogramme donc : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ · vecteurs associés aux deux diagonales de ABCD $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ (Chasles) et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$ (Chasles) et $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

utile pour les exos : Dans un exercice de géométrie vectorielle , pour justifier la colinéarité de deux vecteurs , on peut :

1) exprimer chacun des deux vecteurs en fonction des deux vecteurs d'une base associée à la figure de référence

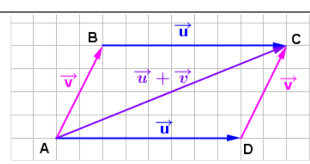
puis 2) créer la relation de colinéarité entre les deux expressions vectorielles trouvées en 1)

par exemple : la base choisie est $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et les hypothèses ont permis d'obtenir pour les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$:

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{8}\overrightarrow{AC}$. On déduit alors : $\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{8}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EF}$

L'égalité $\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{EF}$ prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$

Des outils pour démontrer avec des vecteurs

Pour justifier	**Il suffit**
qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme	 de prouver une seule des égalités suivantes : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
la colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$	de trouver un réel k tel que l'on ait : $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$
l'alignement de 3 points A , B ,C	de montrer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou celle des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ou celle des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$)
le parallélisme de deux droites D et D' dirigées respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$	de prouver la colinéarité des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
qu'un point I est le milieu d'un segment [AB]	de prouver une seule des égalités suivantes : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{o}$ ou $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$