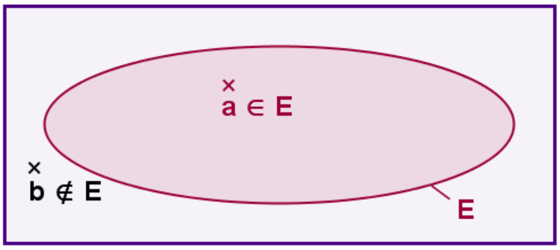
Langages des ensembles et des propriétés

A propos des ensembles

1) notion d'ensemble et notations

> **définition 1 :** On désigne par **le mot ensemble** toute collection d'objets parfaitement déterminée de telle sorte que , pour un objet donné , on puisse affirmer s'il appartient ou non à cette collection .

représenter un ensemble E



ensemble à connaître	sa notation
L'ensemble des nombres réels	$\mathbb{R}$
L'ensemble des nombres réels positifs	$\mathbb{R}^+$
L'ensemble des nombres réels négatifs	$\mathbb{R}^-$
L'ensemble vide	$\varnothing$

2) deux manières pour définir un ensemble S

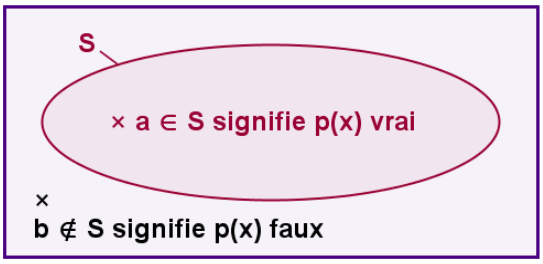
2-1 en donnant la liste complète des éléments de S : exemple : S ={-2,7,1,4,0}

2-2 en donnant une propriété vérifiée par tous les éléments de S et par eux seuls ; cette propriété est appelée propriété caractéristique des éléments de S

exemple : $S = \{x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 = 9\}$: la propriété qui caractérise les éléments de S est de rendre vraie l'égalité $x^2 = 9$.

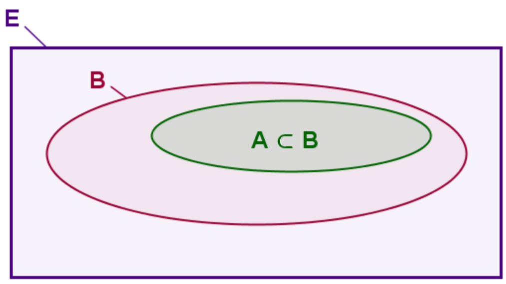
vocabulaires associés
→ $x^2 = 9$ est appelée la propriété caractéristique des éléments de S
→ La phrase $x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 = 9$ est appelée une équation de S
→ **S** est appelé l'ensemble solution de l'équation $x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 = 9$
→ Tout élément de **S** est appelé une solution de l'équation $x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 = 9$

cas général : en notant p(x) un énoncé concernant les éléments d'un ensemble de référence noté E , l'ensemble S des éléments de E rendant vrai cet énoncé p(x) se note $S = \{x \in E \ , \ p(x)\}$ et $a \in S$ signifie p(x) vrai **se note :** $a \in S \Leftrightarrow p(x)$.



3) comparer deux ensembles

> **définition 2 :** A et B sont deux ensembles . Lorsque tout élément de A appartient à l'ensemble B on dit indifféremment : A est une partie de B ou A est un sous-ensemble de B ou A est inclus dans B.
> Dans cette situation dite d'**inclusion de A dans B** on note : $A \subset B$.



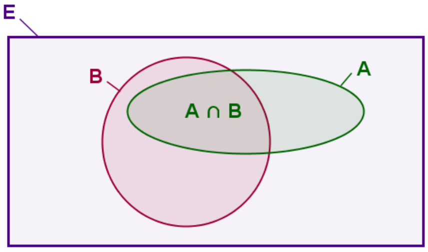
→ $A \subset B$ traduit la phrase : si $x \in A$ alors $x \in B$
→ Avec deux ensembles A et B définis par des propriétés caractéristiques
$A = \{x \in E \ , \ p(x)\}$ et $B = \{x \in E \ , \ q(x)\}$
L'inclusion de A dans B se traduit par : si p(x) est vrai alors q(x) est vrai
Autrement dit : La vérité de p(x) entraîne la vérité de q(x)
Dans ce cas , on note : $p(x) \Rightarrow q(x)$

> **définition 3 :** A et B sont deux ensembles .
> **A et B sont dits égaux** si et seulement si : A est inclus dans B et B est inclus dans A
> On note : $A = B$ si et seulement si : $A \subset B$ et $B \subset A$

remarque : Avec $A = \{x \in E \ , \ p(x)\}$ et $B = \{x \in E \ , \ q(x)\}$
Lorsque **A = B** on dit que les **propriétés caractéristiques** p(x) et q(x) sont **équivalentes** et on note : $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.
p(x) et q(x) sont vraies pour les mêmes éléments de E et fausses pour les mêmes éléments de E .

4) intersection de deux ensembles

définition 4 : A et B sont deux ensembles . L'ensemble des éléments communs à A et à B est appelé **l'intersection de A et B** et est noté $A \cap B$ (lu A inter B)



remarques : → on a pour tout x de E :

$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \textbf{ et } x \in B}$ $\boxed{x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \textbf{ ou } x \notin B}$

→ Avec $A = \{x \in E \ , \ p(x)\}$ et $B = \{x \in E \ , \ q(x)\}$:

$x \in A \cap B$ signifie $p(x)$ vraie et $q(x) vraie$

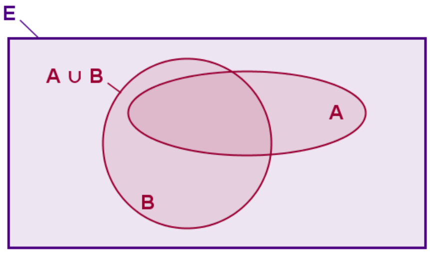
→ $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \{0\}$ traduit : 0 est le seul réel négatif et positif

définition 5 : Deux ensembles **A et B sont dits disjoints** si et seulement si $A \cap B$ est l'ensemble vide

remarque : A et B disjoints s'écrit symboliquement : $A \cap B \ = \ \varnothing$

5) réunion de deux ensembles

définition 6 : A et B sont deux ensembles . On appelle **réunion des ensembles A et B** l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des deux ensembles A et B . Cet ensemble est noté $A \cup B$ (lu A union B)



remarques : → pour tout x de E : $\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ ou \ x \in B}$ (ou non exclusif)

$\boxed{x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \ et \ x \notin B}$

→ Avec $A = \{x \in E \ , \ p(x)\}$ et $B = \{x \in E \ , \ q(x)\}$ on a :

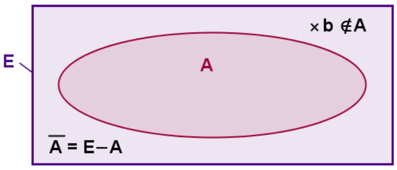
$x \in A \cup B \Leftrightarrow p(x)$ vraie ou $q(x)$ vraie

→ $A \cap B$ est une partie de $A \cup B$. Autrement dit : $A \cap B \subset A \cup B$

→ $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$ traduit : un réel est positif ou négatif

6) complémentaire d'un ensemble A

définition 7 : A est un sous-ensemble de E . L'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A est appelé le **complémentaire de A dans E** et est noté $\overline{A}$ (lu A barre) ou $E - A$.



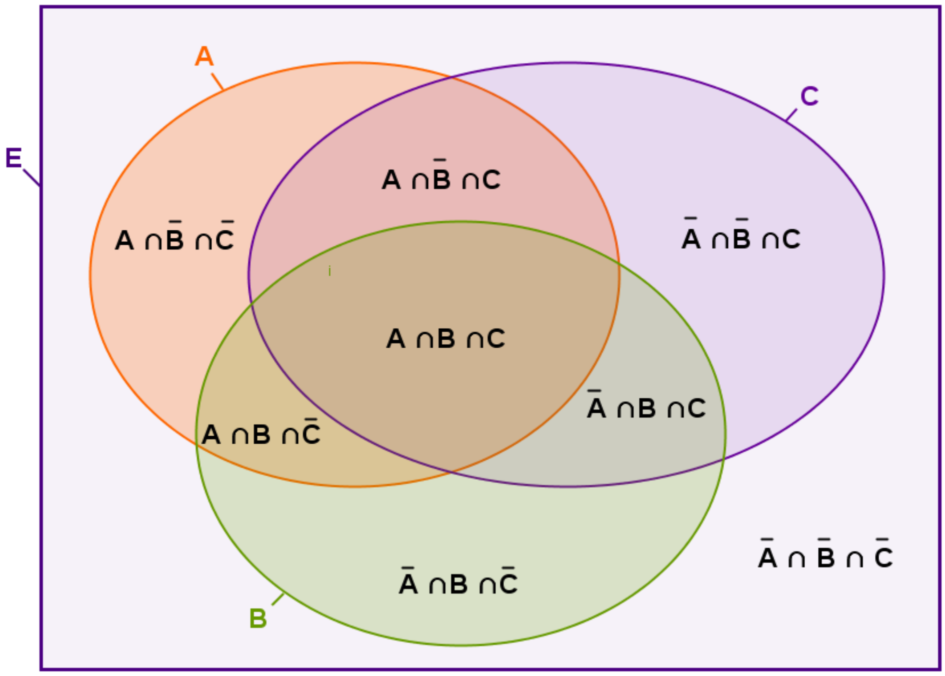
→ on a pour tout x de E : $\boxed{x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A}$

→ Avec $A = \{x \in E \ , \ p(x)\}$: $\begin{cases} \text{x} \in \text{A signifie p(x) vrai} \\ \text{x} \in \overline{A} \text{ signifie p(x) faux} \end{cases}$

→ les ensembles A et $\overline{A}$ sont disjoints : $A \cap \overline{A} = \varnothing$

→ un schéma utile pour dénombrer : **diagramme de Venn** .

Figure ci-dessous : un diagamme de Venn avec trois sous-ensembles A , B , C d'un ensemble E et les huit sous-ensembles de E disjoints deux à deux définis comme intersection de trois des ensembles suivants : A , B , C , $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$



A propos de l'ensemble des nombres réels

1) plusieurs catégories de nombres dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

ensemble inclus dans $\mathbb{R}$	nom d'un élément quelconque de cet ensemble	des exemples
$\mathbb{N}$	**entier naturel n** . On note : $n \in \mathbb{N}$	$0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ; \ldots etc \ldots$
$\mathbb{Z}$	**entier relatif k** . On note : $k \in \mathbb{Z}$. Un entier relatif positif est un entier naturel Un entier relatif négatif est l'opposé d'un entier naturel	$\ldots\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ; \ldots$
$\mathbb{D}$	**nombre décimal d :** tout nombre d pouvant se mettre sous la forme d'un quotient $\dfrac{k}{10^n}$ avec $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$	$0,4 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}\ ;\ 5 = \dfrac{5}{1} = \dfrac{5}{10^0}$ $1,6 \times 10^{-2} = \dfrac{1,6}{10^2} = 0,016$
$\mathbb{Q}$	**nombre rationnel q :** tout nombre q pouvant se mettre sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$	$4 = \dfrac{4}{1}\ ;\ \dfrac{9}{7}\ ;\ -\dfrac{6}{7}$
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	**nombre irrationnel :** tout nombre réel non rationnel	$\sqrt{7}\ ;\ \pi\ ;\ 1 - 2\sqrt{2}$

A connaître : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2) des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ à connaître : les intervalles

2-1) les intervalles dits bornés ; leur représentation graphique utilise un **segment de droite** .

a et b réels tels que $a < b$; **a et b** sont appelés les **bornes de l'intervalle**

type d'intervalle	intervalle **fermé**	intervalle **ouvert**	**semi-ouvert en a**	**semi- ouvert en b**
sa notation	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	$]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$	$]\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}[$
sa propriété caractéristique	$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$	$x \in]a, b[\Leftrightarrow a < x < b$	$x \in]a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$	$x \in [a, b[\Leftrightarrow a \leq x < b$
sa représentation graphique	a x ∈ [a , b] b	a x ∈]a , b[b	a x ∈]a , b] b	a x ∈ [a , b[b

2-2) les intervalles dits non bornés ; leur représentation graphique utilise une **demi-droite** .

a et b sont des réels quelconques

type d'intervalle	intervalle **fermé**	intervalle **fermé**	intervalle **ouvert**	intervalle **ouvert**
sa notation	[**a** , $+\infty$ [	] $-\infty$, **b**]	] **a** , $+\infty$ [	] $-\infty$, **b** [
sa propriété caractéristique	$x \in [a, +\infty[\Leftrightarrow x \geq a$ $x \in [a, +\infty[\Leftrightarrow a \leq x$	$x \in]-\infty, b] \Leftrightarrow x \leq b$ $x \in]-\infty, b] \Leftrightarrow b \geq x$	$x \in]a, +\infty[\Leftrightarrow x > a$ $x \in]a, +\infty[\Leftrightarrow a < x$	$x \in]-\infty, b[\Leftrightarrow x < b$ $x \in]-\infty, b[\Leftrightarrow b > x$
sa représentation graphique	a x ∈[a,+∞[	x ∈]-∞,b] b	a x ∈]a,+∞[	x ∈]-∞,b[b

A connaître : $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ $\quad \mathbb{R}^+ = [0, +\infty,[$ $\quad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$