A propos des limites et des droites asymptotes

situation : f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, d'ensemble de définition noté D_f ; C_f est la courbe représentant f dans un plan muni d'un repère d'origine notée O (orthogonal dans toutes les figures de ce document)

objet : étudier le comportement de f(x) dans l'une des trois situations suivantes :

→ **x tend vers $+\infty$** (ce qui suppose f définie sur un intervalle du type] a , $+\infty$ [avec $a > 0$)

→ **x tend vers $-\infty$** (ce qui suppose f définie sur un intervalle du type] $-\infty$, b [avec $b < 0$)

→ **x tend vers un réel x_0** n'appartenant pas nécessairement à D_f (ce qui suppose f définie sur un intervalle contenant x_0 < sauf peut être en x_0 >)

Pour localiser x on utilise le vocabulaire de voisinage avec les phrases suivantes :

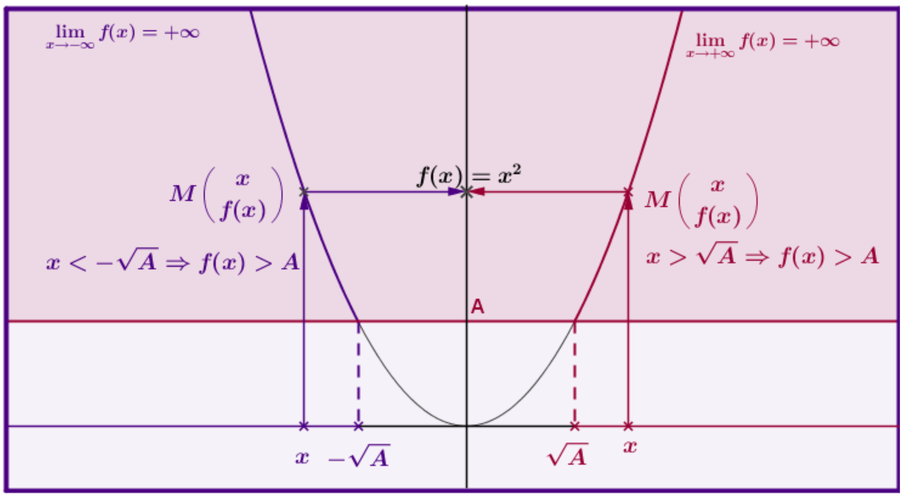
se placer au voisinage de $+\infty$ traduit : x *tend vers* $+\infty$; se placer au voisinage de $-\infty$ traduit : x *tend vers* $-\infty$

se placer au voisinage de x_0 traduit : x *tend vers* x_0

Le comportement de f(x) ainsi trouvé (fini ou infini) est qualifié de limite pour f(x) lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$ ou vers x_0) .

Un rappel : Avec M strictement positif : $\boxed{|f(x)| > M \Leftrightarrow (\ f(x) > 0 \text{ et } f(x) > M\ ) \text{ ou } (\ f(x) < 0 \text{ et } f(x) < -M\ )}$

⟶ Le comportement de f(x) est infini



exemple 1 : f est la fonction carré

→ f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a : pour tout réel A strictement positif :

$x > \sqrt{A} \Rightarrow f(x) > f(\sqrt{A})$

Or : $f(\sqrt{A}) = \left(\sqrt{A}\right)^2 = A$. Donc :

$\forall A \in]0, +\infty[$, $x > \sqrt{A} \Rightarrow f(x) > A$

Donc pour rendre f(x) aussi grand que l'on veut (soit plus grand qu'un nombre A choisi arbitrairement en étant très grand) , il suffit de prendre x plus grand que $\sqrt{A}$. **On écrit alors :**

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

→ f étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, en utilisant pour tout réel A strictement positif :

$f(-\sqrt{A}) = \left(-\sqrt{A}\right)^2 = A$ on peut construire : $x < -\sqrt{A} \Rightarrow f(x) > f(-\sqrt{A})$ soit : $x < -\sqrt{A} \Rightarrow f(x) > A$

Donc pour rendre f(x) aussi grand que l'on veut (soit plus grand qu'un nombre A choisi arbitrairement en étant très grand) , il suffit de prendre x plus petit que $-\sqrt{A}$. **On écrit alors :** $\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

De même on a : $\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$

définition 1 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$ (avec $a > 0$)

> Si tout intervalle du type $]A, +\infty[$ $(A > 0)$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand (autrement dit : si on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez grand) **on dit indifféremment :**
>
> → **f(x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** en notant : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
>
> → **f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$** en notant : $\lim_{+\infty} f = +\infty$

définition 2 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle du type] $-\infty$, b [(avec $b < 0$)

> Si tout intervalle du type $]A, +\infty[$ $(A > 0)$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x négatif et $|x|$ assez grand (autrement dit : Si on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à condition de prendre x négatif et $|x|$ assez grand)
>
> **on dit indifféremment :**
>
> → **f(x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers -∞** en notant : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
>
> → **f admet $+\infty$ comme limite en -∞** en notant : $\lim_{-\infty} f = +\infty$

exemple 2 : On considère la fonction $g = -f$ soit $g : x \mapsto -x^2$ En utilisant l'exemple 1 on construit pour tout réel A strictement positif

$\rightarrow$ au voisinage de $+\infty$: $x > \sqrt{A} \Rightarrow f(x) > A$

donc : $x > \sqrt{A} \Rightarrow -f(x) < -A$ (car : $-1 < 0$)

soit : $x > \sqrt{A} \Rightarrow g(x) < -A$

Donc pour tout réel A strictement positif

$x > \sqrt{A} \Rightarrow g(x) \in]-\infty, -A[$ et $|g(x)| > A$

Autrement dit : $]-\infty, -A[$ contient toutes les valeurs de g(x) pour $x > \sqrt{A}$ et g(x) est négatif avec sa valeur absolue aussi grande que l'on veut , à condition de choisir x assez grand .

Ainsi : $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$

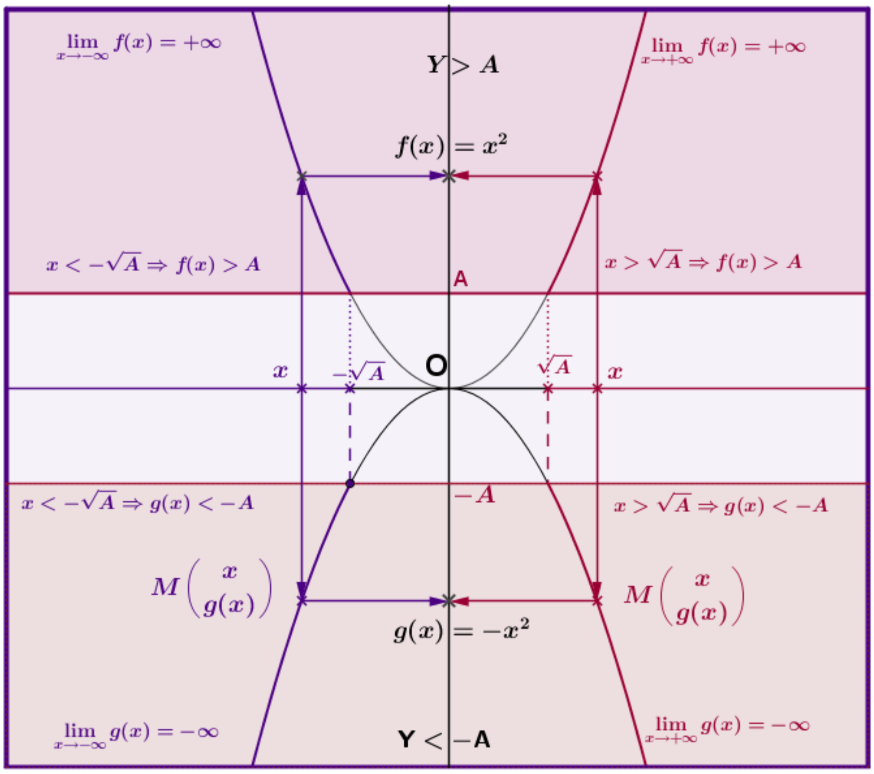
$\rightarrow$ au voisinage de $-\infty$: $x < -\sqrt{A} \Rightarrow f(x) > A$

donc :$x < -\sqrt{A} \Rightarrow -f(x) < -A$ ($-1 < 0$)

soit : $x < -\sqrt{A} \Rightarrow g(x) < -A$

Donc : $\forall A > 0$, $x < -\sqrt{A} \Rightarrow g(x) \in]-\infty, -A[$

Ainsi : $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$



définition 3 g est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle du type] a , $+\infty$ [(avec $a > 0$)

Si g(x) est strictement négatif et que l'on peut rendre $|g(x)|$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez grand **on dit indifféremment** : **$\rightarrow$ g(x) tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** en notant : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$\rightarrow$ g admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ en notant : $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

définition 4 g est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle du type] $-\infty$, b [(avec $b < 0$)

Si g(x) est strictement négatif et que l'on peut rendre $|g(x)|$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x négatif et $|x|$ assez grand **on dit indifféremment** :

$\rightarrow$ g(x) tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -∞ en notant : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\rightarrow$ g admet $-\infty$ comme limite en -∞ en notant : $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$

Remarque : **On pourrait aussi poser comme définition**

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} -g(x) = +\infty$

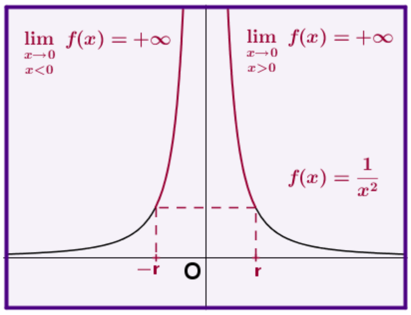
Préalable à la définition 5 : deux fonctions inverses

exemple 3 : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

x	$-\infty$	0		$+\infty$
f(x)	0 ↗	$+\infty$	$+\infty$	↘ 0



En utilisant le sens de variation de f et un réel r strictement positif on construit :

$\rightarrow$ pour x proche du réel 0 en étant strictement positif :

f étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: $0 < x < r$ entraîne $f(x) > f(r)$ soit $\dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{r^2}$

par exemple : avec $r = 0,01 = \dfrac{1}{100}$ on a : $0 < x < 0.01$ (donc x voisin de 0) qui entraîne $f(x) > f(r)$ soit $\dfrac{1}{x^2} > 10\,000$

Toutes les valeurs de f(x) sont dans l'intervalle $]10000, +\infty[$ pour x voisin de 0 en étant strictement positif .

$\rightarrow$ pour x proche du réel 0 en étant strictement négatif : f étant strictement croissante sur $]-\infty, 0[$:

$-r < x < 0$ entraîne $f(-r) < f(x)$ soit :$\dfrac{1}{(-r)^2} < \dfrac{1}{x^2}$ soit : $\dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{r^2}$ soit : $f(x) > \dfrac{1}{r^2}$

par exemple : avec $r = 0.01 = \dfrac{1}{100}$, $-0.01 < x < 0$ (donc x voisin de 0) entraîne $\dfrac{1}{x^2} > 10\,000$

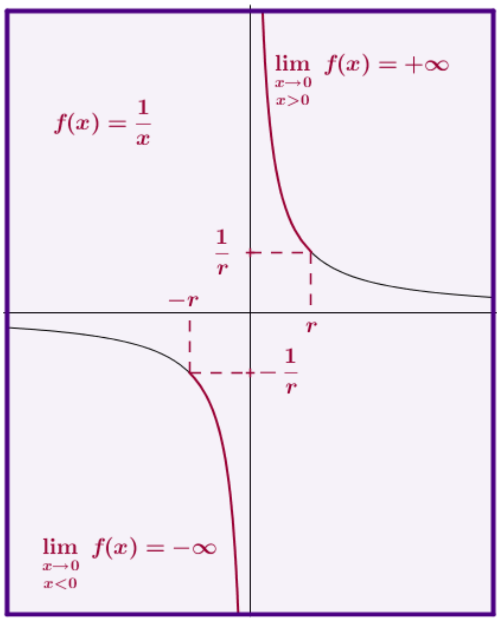
Toutes les valeurs de f(x) sont dans l'intervalle $]10000, +\infty[$ pour x voisin de 0 en étant strictement négatif

exemple 4 : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0



f étant strictement décroissante sur sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ on contruit de manière &analogue à l'exemple 3 :

→ pour x proche du réel 0 en étant strictement positif :

f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Par conséquent :

$0 < x < r$ entraîne $f(x) > f(r)$ soit $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{r}$

par exemple : avec $r = 0,0001 = \dfrac{1}{10000}$, $0 < x < 0.0001$ entraîne $\dfrac{1}{x} > 10000$

Toutes les valeurs de f(x) sont dans l'intervalle $]10000, +\infty[$ pour x très voisin de 0 en étant strictement positif

→ pour x proche du réel 0 en étant strictement négatif : f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$. Donc :

$-r < x < 0$ entraîne $f(-r) > f(x)$ soit $\dfrac{1}{-r} > \dfrac{1}{x}$ soit : $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{r}$

par exemple : avec $r = 0,0001 = \dfrac{1}{10000}$, $-0,0001 < x < 0$ entraîne $\dfrac{1}{x} < -10000$

Toutes les valeurs de f(x) sont dans l'intervalle $]-\infty, -10000[$ pour x assez voisin de 0 en étant strictement négatif

définition 5 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie autour d'un réel x_0 soit définie sur un ensemble du type suivant $]\ x_0 - r\ ,\ x_0[\cup]x_0\ ,\ x_0 + r\ [$ (avec $r > 0$)

→ Si on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez proche de x_0 en étant strictement supérieur à x_0 : on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = +\infty$ ou bien : $\lim\limits_{x_0+} f = +\infty$

→ Si on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez proche de x_0 en étant strictement inférieur à x_0 : on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = +\infty$ ou bien : $\lim\limits_{x_0-} f = +\infty$

→ Si f(x) est strictement négatif et que l'on peut rendre $|f(x)|$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez proche de x_0 en étant strictement supérieur à x_0 : on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x_0+} f = -\infty$

→ Si f(x) est strictement négatif et que l'on peut rendre $|f(x)|$ aussi grand que l'on veut à condition de prendre x assez proche de x_0 en étant strictement inférieur à x_0 : on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x_0-} f = -\infty$

Des comportements infinis à connaître

fonctions puissances : $x \to x^n$ avec $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

au voisinage de $+\infty$ on a : $x > 0$ et $x^n > 0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

au voisinage de $-\infty$ on a : $x < 0$ et donc le signe de x^n dépend de la parité de n . En effet :

$x^n > 0$ ssi n est pair soit ssi : $n = 2k$ et $x^n < 0$ ssi n est impair soit ssi : $n = 2k+1$ (k entier naturel non nul)

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty$ et : $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1} = -\infty$

inverses des fonctions puissances : avec n entier non nul : → **en 0^+ :** $x^n > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;

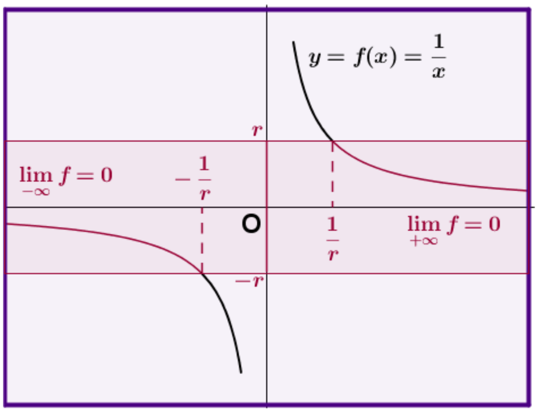
→ **en 0^- :** pour n pair : $x^n > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$; pour n impair : $x^n < 0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

fonction racine carrée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

fonction valeur absolue : : $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

⟶ Le comportement de f(x) est fini lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$

En préalable : deux fonctions inverses observées aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$



exemple 1 : $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

r est un réel strictement positif . En utilisant f strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sur l'intervalle$]-\infty, 0[$ on construit :

$x > \frac{1}{r} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < r$ et $x < -\frac{1}{r} \Rightarrow -r < \frac{1}{x} < 0$

Par conséquent : toutes les valeurs de $\frac{1}{x}$ sont dans $]0, r[$ pour $x > \frac{1}{r}$ et toutes les valeurs de $\frac{1}{x}$ sont dans l'intervalle $]-r, 0[$ pour $x < -\frac{1}{r}$

Ainsi : Pour obtenir $\frac{1}{x}$ compris entre 0 et 0,0001 (soit très voisin de 0) il suffit de choisir x est strictement plus grand que 10000 .

exemple 2 : $f(x) = \frac{1}{x^2}$

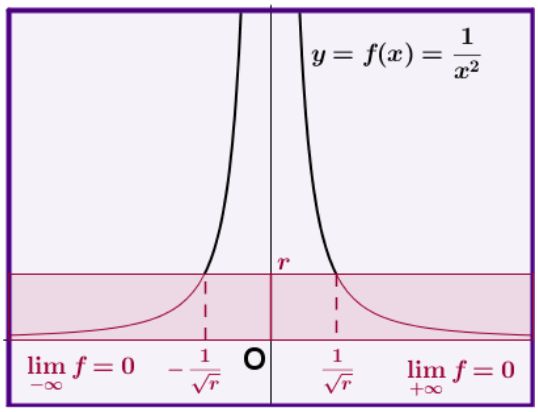
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

avec $r > 0$ on a : $x > \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < r$ et $x < -\frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2} < r$

Par conséquent : toutes les valeurs de $\frac{1}{x^2}$ sont dans $]0, r[$ pour $x > \frac{1}{\sqrt{r}}$ et

toutes les valeurs de $\frac{1}{x^2}$ sont dans $]0, r[$ pour $x < -\frac{1}{\sqrt{r}}$

Ainsi : Pour obtenir $\frac{1}{x^2}$ compris entre 0 et 0,0001 (soit très voisin de 0) avec x strictement positif , il suffit de choisir x strictement plus grand que 100



définition 6 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle du type] a , $+\infty$ [(avec $a > 0$)

→ Si on peut rendre f(x) aussi voisin du réel 0 que l'on veut à condition de prendre x assez grand on dit que f(x) tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ en notant : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ou bien que f admet le réel 0 comme limite en $+\infty$ en notant : $\lim_{+\infty} f = 0$

→ Si on peut trouver un réel k tel que : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - k = 0$ on dit que f(x) tend vers k lorsque x tend vers $+\infty$ en notant : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$ ou bien que f admet le réel k comme limite en $+\infty$ en notant : $\lim_{+\infty} f = k$

définition 7 f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle du type] $-\infty$, b [(avec $b < 0$)

→ Si on peut rendre f(x) aussi voisin du réel 0 que l'on veut à condition de prendre x négatif et $|x|$ assez grand on dit que f(x) tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ en notant : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ou bien : $\lim_{-\infty} f = 0$

→ Si on peut trouver un réel k tel que : $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - k = 0$ on dit que f(x) tend vers k lorsque x tend vers $-\infty$ en notant : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$ ou bien que f admet le réel k comme limite en $-\infty$ en notant : $\lim_{-\infty} f = k$

Des comportements finis à connaître en $-\infty$ et $+\infty$

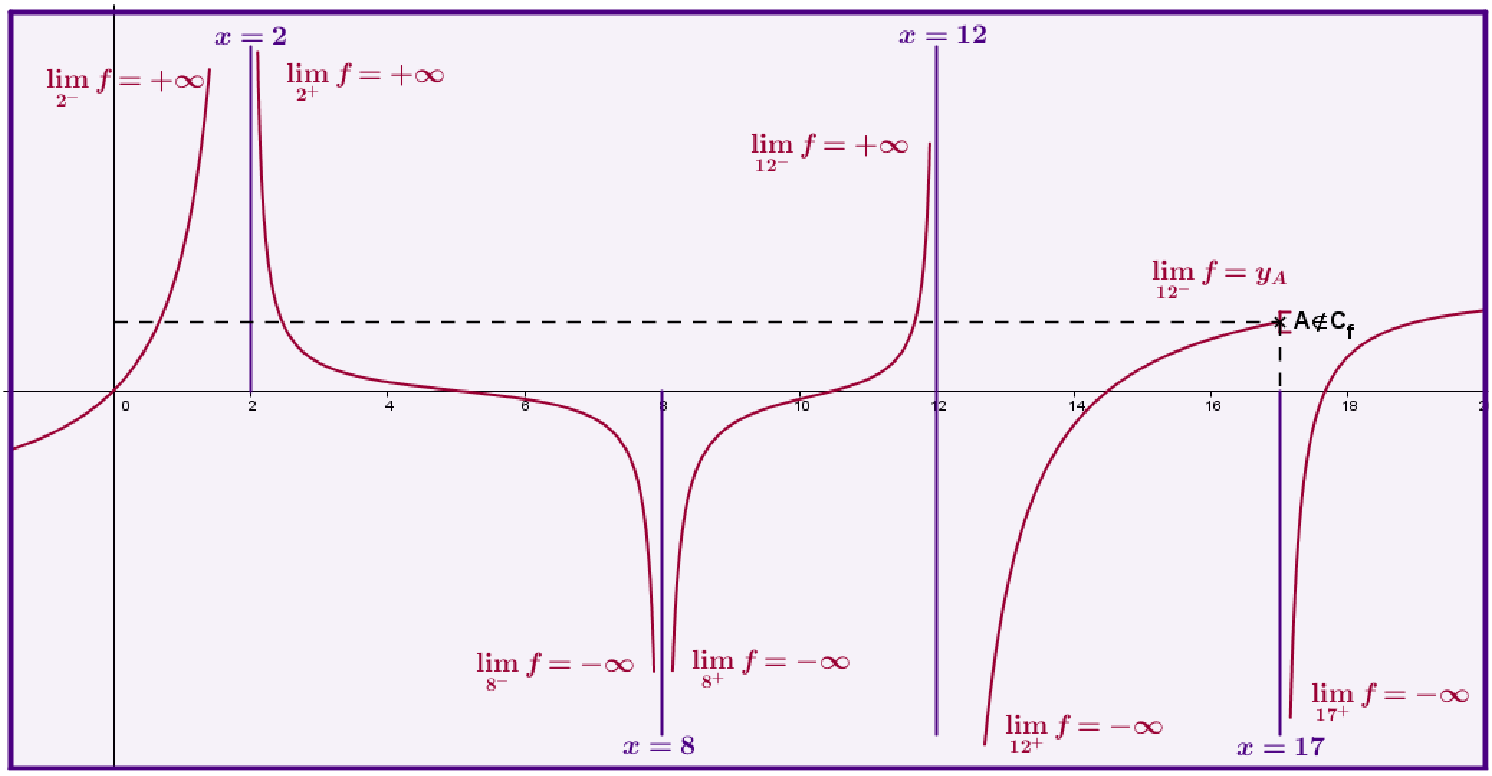
inverses des fonctions puissances : $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)

$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)

fonction constante : f : $x \mapsto k$. On a : $\lim_{+\infty} f = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} k = k$ et : $\lim_{-\infty} f = \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} k = k$

Dans la suite , on note C_f la représentation graphique de la fonction f considérée .

situation 1 La droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite : $x = x_0$ ($\mathcal{D}$ //(Oy)) est dite **droite asymptote à la courbe C_f si et seulement si l'une au moins des deux limites $\lim\limits_{x_0^-} f$ et $\lim\limits_{x_0^+} f$ est infinie**



deux types de fonctions à connaître pour les exos

type 1 : $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0}$ **avec x_0 réel quelconque**

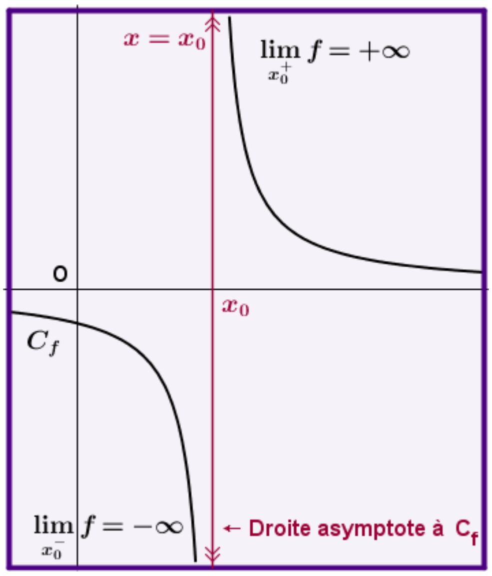
→ L'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{x_0\}$

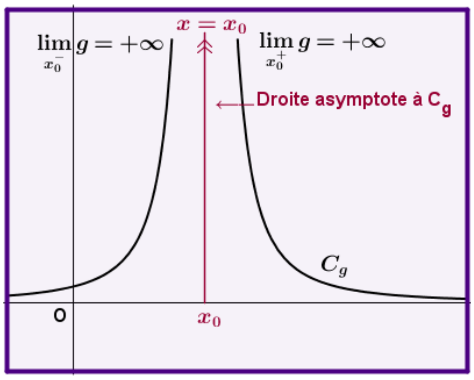
→ pour x distinct de x_0 le signe de f(x) est celui de $x - x_0$ et $x - x_0$ s'annule en x_0 en changeant de signe

→ en posant $X = x - x_0$ on a : $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0} = \dfrac{1}{X}$ et faire tendre x vers x_0 revient à faire tendre $x - x_0$ soit X vers 0 . Le comportement de f(x) au voisinage de x_0 peut donc s'interpréter comme le comportement de $\dfrac{1}{X}$ au voisinage de 0 . D'où :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{1}{X} = -\infty \quad \text{car : } x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0 \text{ (soit } X < 0 \text{)}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{1}{X} = +\infty \quad \text{car : } x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0 \text{ (soit } X > 0 \text{)}$$





type 2 : $g(x) = \dfrac{1}{(x - x_0)^2}$ **avec x_0 réel quelconque**

→ $D_g = \mathbb{R} - \{x_0\}$ et $(x - x_0)^2$ s'annule en x_0 sans changer de signe

→ en posant $X = x - x_0$ on a : $g(x) = \dfrac{1}{X^2}$. Le comportement de g(x) au voisinage de x_0 peut donc s'interpréter comme le comportement de $\dfrac{1}{X^2}$ au voisinage de 0 . D'autre part : $x \neq x_0 \Rightarrow (x - x_0)^2 > 0$ (soit $X^2 > 0$). Donc :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} g(x) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X < 0}} \frac{1}{X^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} g(x) = \lim_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \frac{1}{X^2} = +\infty$$

conséquence géométrique : f et g sont représentées par une courbe admettant la droite d'équation réduite : $x = x_0$ comme **droite asymptote**

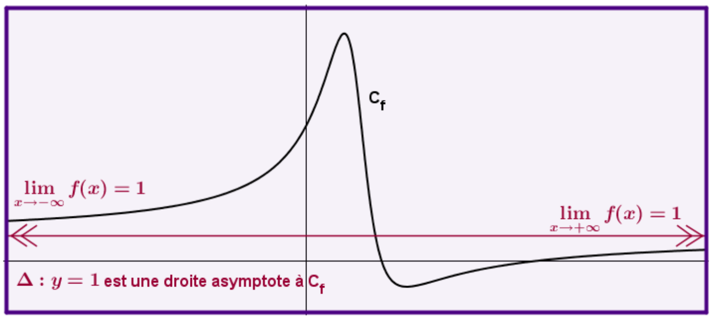
situation 2 La droite Δ d'équation réduite : $y = k$ ($\Delta \, //(Oy)$) est dite

→ **droite asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$** si et seulement si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$

→ **droite asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$** si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$

→ **droite asymptote à la courbe C_f** si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$

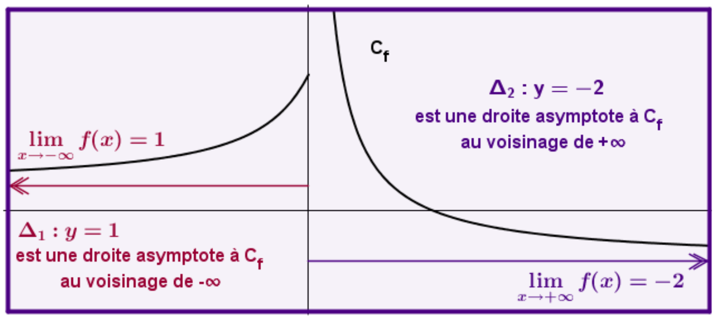
exemple 1



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Ces deux limites étant égales au réel 1 , la courbe C_f admet une droite asymptote d'équation réduite : $y = 1$

exemple 2



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ **:** $\Delta_1 : y = 1$ est une droite asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

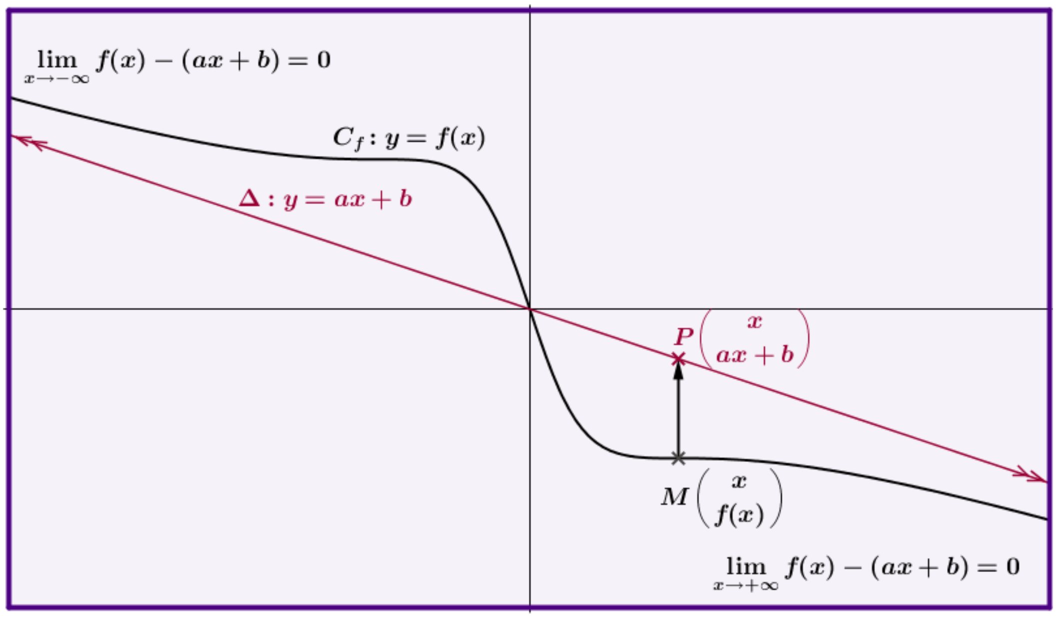
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ **:** $\Delta_2 : y = -2$ est une droite asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

situation 3 La droite Δ d'équation réduite : $y = ax + b$ **avec** $a \neq 0$ (Δ non parallèle aux axes) est dite

→ **droite asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$** si et seulement si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

→ **droite asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$** si et seulement si : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

→ **droite asymptote à la courbe C_f** ssi : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$



Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite asymptote $\Delta : y = ax + b$ revient à comparer les ordonnées de deux points de même abscisse x ($x \in D_f$) :

→ l'un , noté M , situé sur C_f et d'ordonnée : $y_M = f(x)$

→ l'autre , noté P , situé sur Δ et d'ordonnée : $y_p = ax + b$

Ensuite , pour comparer y_M et y_P , on peut suivre la démarche suivante :

1) calculer , en fonction de x , leur différence qui vaut $y_M - y_P = f(x) - (ax + b)$,

2) étudier selon les valeurs de x le signe de $y_M - y_P$

3) en déduire la comparaison entre y_M et y_P (par exemple : $y_M < y_P \Leftrightarrow f(x) - (ax + b) < 0$)

4) déduire la position de C_f par rapport à Δ (par exemple : avec $y_M < y_P$, le point M de C_f est situé en dessous de Δ)