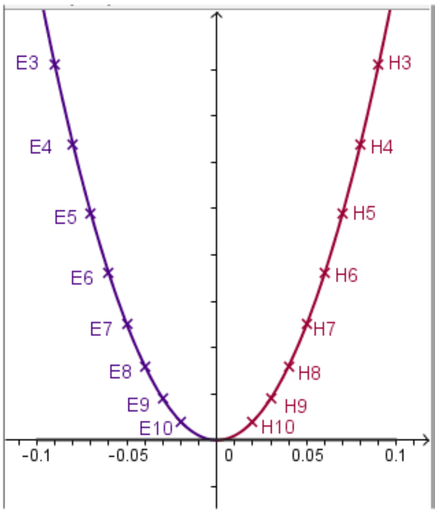
Des comportements de f(x) lorsque x tend vers 0

situation 1 : **f est définie en 0 et sur un intervalle ouvert contenant 0 et C_f ne présente pas de < cassure > en son point d'abscisse 0 et d'ordonnée f (0) ; la fonction f est dite continue en 0**

un exemple : avec f : $x \longmapsto x^2$ (f définie sur $\mathbb{R}$) .



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_0	k	x = k × Δh		point E (x,x²)	x = - k × Δh		point H (x,x²)
2	0	10	-0.1	0.01	(-0.1, 0.01)	0.1	0.01	(0.1, 0.01)
3	$f(x_0)$	9	-0.09	0.0081	(-0.09, 0.0081)	0.09	0.0081	(0.09, 0.0081)
4	0	8	-0.08	0.0064	(-0.08, 0.0064)	0.08	0.0064	(0.08, 0.0064)
5	Δh	7	-0.07	0.0049	(-0.07, 0.0049)	0.07	0.0049	(0.07, 0.0049)
6	0.01	6	-0.06	0.0036	(-0.06, 0.0036)	0.06	0.0036	(0.06, 0.0036)
7		5	-0.05	0.0025	(-0.05, 0.0025)	0.05	0.0025	(0.05, 0.0025)
8		4	-0.04	0.0016	(-0.04, 0.0016)	0.04	0.0016	(0.04, 0.0016)
9		3	-0.03	0.0009	(-0.03, 0.0009)	0.03	0.0009	(0.03, 0.0009)
10		2	-0.02	0.0004	(-0.02, 0.0004)	0.02	0.0004	(0.02, 0.0004)
11		1	-0.01	0.0001	(-0.01, 0.0001)	0.01	0.0001	(0.01, 0.0001)
12		0	0	0	(0, 0)	0	0	(0, 0)

x étant un réel de $]-0,1;0,1[$ on note M le point de C_f qui a pour abscisse ce réel x . On attribue à l'abscisse x du point M des valeurs de plus en plus < voisines > du réel 0 . En utilisant le graphique et le tableur , examiner ce qui suit :

→ le comportement de ce point M sur la parabole C_f ? **Il se rapproche de plus en plus de O : point de C_f d'abscisse 0**

→ l'évolution de l'ordonnée x^2 de ce point M ? x^2 **prend des valeurs de plus en plus proches de 0 (ordonnée du point O)**

Pour résumer cette situation → on dit : **lorsque x tend vers 0 son carré x^2 tend vers 0** en notant : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$

→ en utilisant le nom f de la fonction carré on dit **lorsque x tend vers 0 f(x) tend vers 0** en notant : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

ou bien : on dit **f admet le réel 0 comme limite en 0** en notant : $\lim\limits_{0} f = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

cas général de la situation 1 : **Admettre :** **La plupart des fonctions connues et définies en 0** (fonctions de référence , fonctions polynômes et rationnelles , sinus , cosinus , ... etc ...) **sont continues en 0 et vérifient :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

situation 2 : **f est définie en 0 et sur un intervalle ouvert contenant 0 et C_f et présente une < cassure > en son point d'abscisse 0 et d'ordonnée f (0) .** On note C_1 la partie de C_f constituée de ses points d'abscisses négatives et C_2 la partie de C_f constituée de ses points d'abscisses positives

situation 2-1 : la courbe C_f contient le point $A\binom{0}{0.5}$ et présente une cassure en A ($f(0) = 0.5$) ; A situé sur C_1

→ Lorsque l'abscisse x d'un point M de C_f situé sur la partie C_1 de C_f tend vers 0 en étant strictement négative , comment évolue son ordonnée f(x) ? **f(x) tend vers $\frac{1}{2}$ (ordonnée du point A situé sur C_f)** on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = y_A = \dfrac{1}{2}$

→ Lorsque l'abscisse x d'un point M de C_f situé sur la partie C_2 de C_f tend vers 0 en étant strictement positive , comment évolue son ordonnée f(x) ? **f(x) tend vers 0 (ordonnée du point O non situé sur C_f)** on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = y_O = 0$

pour exprimer :

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

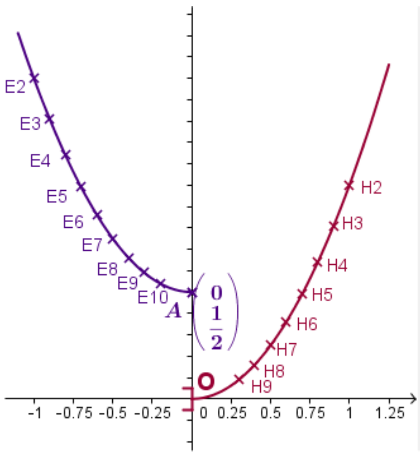
on dit : f n'admet pas de limite en 0

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0)$

on dit : f est continue à gauche en 0

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \neq f(0)$

on dit : f n'est pas continue à droite en 0



1	x_0	k	x = k × Δh	x²+0.5	E $\left(\begin{smallmatrix}x\\ x^2+0.5\end{smallmatrix}\right)$	x = - k × Δh	x^2	H $\binom{x}{x^2}$
2	0	10	-1	1.5	(-1, 1.5)	1	1	(1, 1)
3	$f(x_0)$	9	-0.9	1.31	(-0.9, 1.31)	0.9	0.81	(0.9, 0.81)
4	0.5	8	-0.8	1.14	(-0.8, 1.14)	0.8	0.64	(0.8, 0.64)
5	Δh	7	-0.7	0.99	(-0.7, 0.99)	0.7	0.49	(0.7, 0.49)
6	0.1	6	-0.6	0.86	(-0.6, 0.86)	0.6	0.36	(0.6, 0.36)
7		5	-0.5	0.75	(-0.5, 0.75)	0.5	0.25	(0.5, 0.25)
8		4	-0.4	0.66	(-0.4, 0.66)	0.4	0.16	(0.4, 0.16)
9		3	-0.3	0.59	(-0.3, 0.59)	0.3	0.09	(0.3, 0.09)
10		2	-0.2	0.54	(-0.2, 0.54)	0.2	0.04	(0.2, 0.04)
11		1	-0.1	0.51	(-0.1, 0.51)	0.1	0.01	(0.1, 0.01)
12		0	0	0.5	(0, 0.5)			

situation 2-2 : la courbe C_f contient le point $O\binom{0}{0}$ et présente une cassure en O ($f(0) = 0$) ; O situé sur C_2

→ Lorsque l'abscisse x d'un point M de C_f situé sur la partie C_1 de C_f tend vers 0 en étant strictement négative , comment évolue son ordonnée f(x) ? **f(x) tend vers $\frac{1}{2}$ (ordonnée du point A non situé sur C_f)** on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = y_A = \frac{1}{2}$

→ Lorsque l'abscisse x d'un point M de C_f situé sur la partie C_2 de C_f tend vers 0 en étant strictement positive , comment évolue son ordonnée f(x) ? **f(x) tend vers 0 (ordonnée du point O situé sur C_f)** on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = y_O = 0$

pour exprimer :

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$

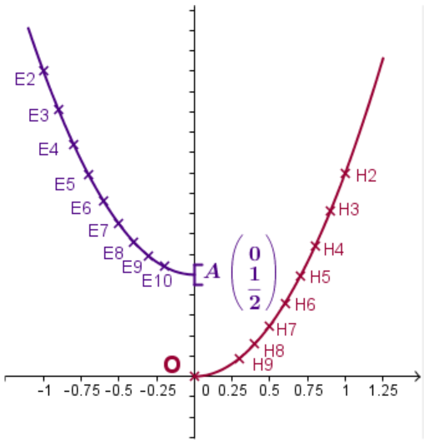
on dit : f n'admet pas de limite en 0

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) \neq f(0)$

on dit : f n'est pas continue à gauche en 0

→ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = f(0)$

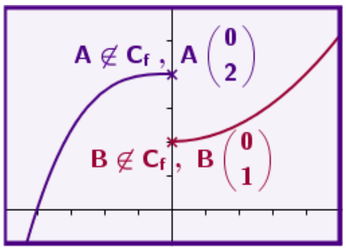
on dit : f est continue à droite en 0



1	x0	k	x = k × Δh	x²+0.5	E $\left(x, \frac{x}{x^2+0.5}\right)$	x = - k × Δh	x²	H $\left(\frac{x}{x^2}\right)$
2	0	10	-1	1.5	(-1, 1.5)	1	1	(1, 1)
3	f(x0)	9	-0.9	1.31	(-0.9, 1.31)	0.9	0.81	(0.9, 0.81)
4	0.5	8	-0.8	1.14	(-0.8, 1.14)	0.8	0.64	(0.8, 0.64)
5	Δh	7	-0.7	0.99	(-0.7, 0.99)	0.7	0.49	(0.7, 0.49)
6	0.1	6	-0.6	0.86	(-0.6, 0.86)	0.6	0.36	(0.6, 0.36)
7		5	-0.5	0.75	(-0.5, 0.75)	0.5	0.25	(0.5, 0.25)
8		4	-0.4	0.66	(-0.4, 0.66)	0.4	0.16	(0.4, 0.16)
9		3	-0.3	0.59	(-0.3, 0.59)	0.3	0.09	(0.3, 0.09)
10		2	-0.2	0.54	(-0.2, 0.54)	0.2	0.04	(0.2, 0.04)
11		1	-0.1	0.51	(-0.1, 0.51)	0.1	0.01	(0.1, 0.01)
12		0				0	0	(0, 0)

situation 3 : f est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 sans l'être en 0 ; C_f n'a pas de point d'abscisse 0

exemple 3-1 : $A \notin C_f$ et $B \notin C_f$



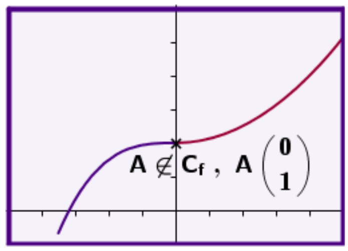
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = y_A = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = y_B = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$

dans ce cas : **f n'admet pas de limite en 0**

exemple 3-2 : $A \notin C_f$



$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = y_A = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = y_A = 1$

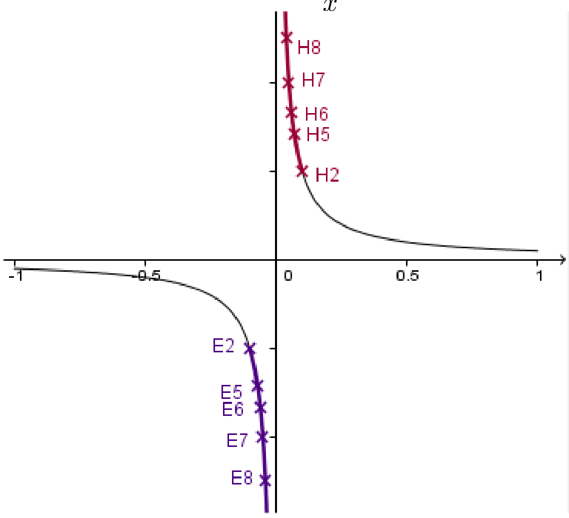
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$

f admet une limite en 0 égale à 1 . **$C_f \cup \{A\}$ représente une fonction appelée prolongement par continuité de f en 0**

situation 4 : f est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 sans l'être en 0 ; C_f n'a pas de point d'abscisse 0

On note C_1 la partie de C_f constituée de ses points d'abscisses négatives et C_2 la partie de C_f constituée de ses points d'abscisses positives .

un exemple avec $f(x) = \frac{1}{x}$. $0 \notin D_f$ et C_f n'a pas de point d'abscisse 0 (situé sur l'axe (Oy))



1	x0	k	x = k × Δh	$\frac{1}{x}$	point E $\left(x, \frac{1}{x}\right)$	x = - k × Δh	$\frac{1}{x}$	point H $\left(x, \frac{1}{x}\right)$
2	0	10	-0.1	-10	(-0.1, -10)	0.1	10	(0.1, 10)
3	f(x0)	9	-0.09	-11.1111	(-0.09, -11.1111)	0.09	11.1111	(0.09, 11.1111)
4		8	-0.08	-12.5	(-0.08, -12.5)	0.08	12.5	(0.08, 12.5)
5	Δh	7	-0.07	-14.2857	(-0.07, -14.2857)	0.07	14.2857	(0.07, 14.2857)
6	0.01	6	-0.06	-16.6667	(-0.06, -16.6667)	0.06	16.6667	(0.06, 16.6667)
7		5	-0.05	-20	(-0.05, -20)	0.05	20	(0.05, 20)
8		4	-0.04	-25	(-0.04, -25)	0.04	25	(0.04, 25)
9		3	-0.03	-33.3333	(-0.03, -33.3333)	0.03	33.3333	(0.03, 33.3333)
10		2	-0.02	-50	(-0.02, -50)	0.02	50	(0.02, 50)
11		1	-0.01	-100	(-0.01, -100)	0.01	100	(0.01, 100)
12		0.1	-0.001	-1000	(-0.001, -1000)	0.001	1000	(0.001, 1000)
13		0.01	-0.0001	-10000	(-0.0001, -10000)	0.0001	10000	(0.0001, 10000)

pour $x < 0$: $\frac{1}{x} < 0$ **et** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

pour $x > 0$: $\frac{1}{x} > 0$ **et** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$