Limites : Corrigé DS1 - 4h

situation pour tous les exercices Le plan est muni d'un repère d'origine O noté $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour toute fonction F utilisée , on note C_F la courbe représentant F dans ce repère .

Pour justifier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes ou rationnelles la méthode dite détaillée est obligatoire , les théorèmes ne pouvant être utilisés que pour conjecturer les résultats (utiles pour l'exercice 4)

exercice 1 On considère la fonction f suivante $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^2} = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 - 2x + 1}$

1) 1-1 ensemble de définition D_f de f $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1\}}$ Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

1-2 limites de f aux bornes de D_f . $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = -\infty \; ; \; \lim\limits_{+\infty} f = +\infty}$ $\rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3\left[1 - \dfrac{3x^2}{x^3} + \dfrac{4x}{x^3}\right]}{x^2\left[1 - \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right]} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = x \times \frac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$ On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1 - 3(0) + 4(0)}{1 - 2(0) + (0)} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1 - 3(0) + 4(0)}{1 - 2(0) + (0)} = 1$

D'autre part : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $1 > 0$) :

$\lim\limits_{x \to -\infty} x \times \dfrac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \times \dfrac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$ soit : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$\lim\limits_{1^-} f = +\infty$ $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite $D : x = 1$ est une droite asymptote à C_f .

situation $x \to 1$

$N(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$	$N(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 2$ (réel non nul)
$D(x) = (x-1)^2$	$D(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$

Pour la suite j'utilise : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^2} = \left(x^3 - 3x^2 + 4x\right) \times \dfrac{1}{(x-1)^2}$

On a : $\lim\limits_{x \to 1} x^3 - 3x^2 + 4x = (1)^3 - 3(1)^2 + 4(1) = 1 - 3 + 4 = 2$

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ car $x \neq 1$ entraîne $(x-1)^2 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $2 > 0$) :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(x^3 - 3x^2 + 4x\right) \times \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(x^3 - 3x^2 + 4x\right) \times \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ soit : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ **.**

2) Les réels a , b , c et d tels que : $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{(x-1)^2}$

x est un réel de D_f . On note $E(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{(x-1)^2}$. On a : $E(x) = \dfrac{(ax+b)(x-1)^2}{(x-1)^2} + \dfrac{c(x-1)}{(x-1)^2} + \dfrac{d}{(x-1)^2}$

$$E(x) = \frac{(ax+b)\left(x^2 - 2x + 1\right) + c(x-1) + d}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + cx - c + d}{(x-1)^2}$$

$$E(x) = \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a - 2b + c)x + (b - c + d)}{(x-1)^2}$$

Par conséquent : $f(x) = E(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^2} = \dfrac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b+c)x + (b-c+d)}{(x-1)^2}$

$f(x) = E(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4x = ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b+c)x + (b-c+d)$ ($(x-1)^2 \neq 0$ pour $x \in D_f$)

Deux polynômes de degré trois sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients . Donc :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 3x^2 + 4x = ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b+c)x + (b-c+d)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -3 \\ a - 2b + c = 4 \\ b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2a - 3 \\ c = -a + 2b + 4 \\ d = c - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2(1) - 3 \\ c = -1 + 2b + 4 \\ d = c - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 + 2(-1) + 4 \\ d = c - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 1 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

On obtient donc ainsi : $\forall x \in D_f$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

3) Pour justifier que la courbe C_f possède la droite $\Delta : y = x - 1$ comme droite asymptote il suffit de prouver :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = 0$.

On a prouvé en **2) :** pour tout réel x de D_f , $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$ donc : $f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

D'autre part : $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$

Puis : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} = 0 + 2(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} = 0 + 2(0) = 0$.

Soit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = 0$ . .

La droite $\Delta : y = x - 1$ répond bien à la définition d'une droite asymptote à la courbe C_f .

Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite $\Delta : y = 2x - 1$ revient à comparer les ordonnées de deux points de même abscisse x ($x \in D_f$) : $\begin{cases} \rightarrow \text{l'un , noté M , situé sur } \mathrm{C}_f \text{ et d'ordonnée : } y_M = f(x) \\ \rightarrow \text{l'autre , noté P , situé sur } \Delta \text{ et d'ordonnée : } y_p = x - 1 \end{cases}$

Avec x élément de D_f soit x distinct de 1 on a : $y_M - y_P = f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)+2}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

$(x-1)^2$ étant strictement positif pour x distinct de 1 , le signe du quotient $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ égal à $y_M - y_P$ est donc le même que celui de $x + 1$ pour $x \neq 1$. D'où les résultats suivants :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

1er cas : $x \in]-\infty, -1[$. D'après ce qui précède : $x + 1 < 0$ donc : $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} < 0$ soit : $y_M - y_P < 0$ puis : $y_M < y_P$. Les points de C_f ayant une abscisse x strictement inférieure à -1 sont situés en dessous de $\Delta : y = x - 1$.

2ème cas : $x \in]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. D'après ce qui précède : $x + 1 > 0$ donc : $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} > 0$ soit : $y_M - y_P > 0$ puis : $y_M > y_P$.

Les points de C_f ayant une abscisse x distincte de 1 et strictement supérieure à -1 sont situés au dessus de Δ .

3ème cas : $x = -1$. Dans ce cas : $x + 1 = 0$ donc : $\dfrac{x+1}{(x-1)^2} = 0$ et : $y_M - y_P = 0$ puis : $y_M = y_P$ et $M = P$. La courbe C_f et la droite Δ se coupent en un point , noté I , d'abscisse -1 et d'ordonnée : $y_I = x_I - 1 = (-1) - 1 = -2$ soit en $I \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

exercice 2 On considère la fonction f suivante $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 2x - 2}$

1) 1-1 ensemble de définition D_f de f $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0$

-1 est une racine de $4x^2 + 2x - 2$ car : $4(-1)^2 + 2(-1) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$.

Donc $4x^2 + 2x - 2$ est factorisable par $x + 1$ et pour tout réel x : $4x^2 + 2x - 2 = (x+1)(4x-2)$.

D'où : $x \notin D_f \Leftrightarrow (x+1)(4x-2) = 0$ puis $x \notin D_f \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

1-2 limites de f aux bornes de D_f $\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} =]-\infty, -1[\cup \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$\lim\limits_{-\infty} f = 1, \lim\limits_{+\infty} f = 1$	ces deux limites étant égales au réel 1 , la droite $\Delta : y = 1$ est une droite asymptote à C_f .

→ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f $\quad f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 2x - 2} = \dfrac{x^2\left[4 + \frac{12x}{x^2} + \frac{9}{x^2}\right]}{x^2\left[4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right]} = \dfrac{4 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$

→ déduction de $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$ $\quad$ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = \dfrac{4 + 12(0) + 9(0)}{4 + 2(0) - 2(0)} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = \dfrac{4 + 12(0) + 9(0)}{4 + 2(0) - 2(0)} = 1$

$\lim\limits_{-1^-} f = +\infty$ $\lim\limits_{-1^+} f = -\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite $D_1 : x = -1$ est une droite asymptote à C_f .

situation $x \to -1$

$N(x) = 4x^2 + 12x + 9$	$N(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 1$
$D(x) = 4x^2 + 2x - 2$	$D(x) \underset{x\to-1}{\longrightarrow} 0$

Pour la suite j'utilise : $f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 2x - 2} = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{(x+1)(4x-2)} = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x - 2} \times \dfrac{1}{x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x - 2} = \dfrac{4(-1)^2 + 12(-1) + 9}{4(-1) - 2} = \dfrac{4 - 12 + 9}{-4 - 2} = -\dfrac{1}{6}$

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ car $x < -1$ entraîne $x + 1 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ car $x > -1$ entraîne $x + 1 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire $\left(\text{avec } -\dfrac{1}{6} < 0\right)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x - 2} \times \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x - 2} \times \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ soit : $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{\frac{1}{2}^-} f = -\infty$ $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} f = +\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite $D_2 : x = \dfrac{1}{2}$ est une droite asymptote à C_f .

situation $x \to \dfrac{1}{2}$

$N(x) = 4x^2 + 12x + 9$	$N(x) \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} 16$
$D(x) = 4x^2 + 2x - 2$	$D(x) \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} 0$

Pour la suite j'utilise : $f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 2x - 2} = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{(x+1)(4x-2)} = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{(x+1) \times 2(2x-1)} = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2(x+1)} \times \dfrac{1}{2x - 1}$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2(x+1)} = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) + 9}{2\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \dfrac{4\left(\frac{1}{4}\right) + 6 + 9}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{1 + 15}{3} = \dfrac{16}{3}$

D'autre part : en utilisant le tableau de signe de $2x - 1$ on a : $x < \dfrac{1}{2}$ entraîne $2x - 1 < 0$ et $x > \dfrac{1}{2}$ entraîne $2x - 1 > 0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2}}} \dfrac{1}{2x - 1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ x>\frac{1}{2}}} \dfrac{1}{2x - 1} = +\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x - 1$		signe de $-a$ $-$	0	signe de a , a = 2 $+$	

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire $\left(\text{avec } \dfrac{16}{3} > 0\right)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2}}} \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2(x+1)} \times \dfrac{1}{2x - 1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ x>\frac{1}{2}}} \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2(x+1)} \times \dfrac{1}{2x - 1} = +\infty$ soit : $\lim\limits_{\frac{1}{2}^-} f = -\infty$ et $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} f = +\infty$

2) On note $g = \sqrt{f}$ $\quad$ **2-1** signe de $f(x)$ J'utilise $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x) = 4x^2 + 12x + 9$ et $D(x) = 4x^2 + 2x - 2$

D'après 1-1 $D(x)$ est un polynôme du second degré admettant les réels -1 et $\dfrac{1}{2}$ comme racines et le réel 4 comme coefficient dominant . D'autre part : $N(x) = 4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2(6x) + (3)^2 = (2x + 3)^2$

D'où le tableau donnant le signe du quotient $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x+3)^2$		+	0	+		+		+	
$4x^2+2x-2$		signe de a +		signe de a +	0	signe de -a $-$	0	signe de a , a = 4 +	
$\dfrac{(2x+3)^2}{4x^2+2x-2}$		+	0	+	‖	$-$	‖	+	

déduction de l'ensemble de définition D_g de g

$g = \sqrt{f}$ donc pour tout réel x , $x \in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

En utilisant D_f et le tableau de signe de $f(x)$ on déduit :

$$x \in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \text{ et } x \neq \dfrac{1}{2} \\ x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\end{cases}$$

Tout réel x de $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ vérifie $x \neq -1$ et $x \neq \dfrac{1}{2}$. Donc : $\boxed{D_g = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[}$.

2-2 limites de g aux bornes de D_g $\quad g = \sqrt{f}$ et d'après **1-2** : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{-1^-} f = +\infty$; $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} f = +\infty$.

En posant $X = f(x)$ et en utilisant les limites de la fonction racine carrée on déduit ensuite les limites de g aux bornes de D_g

→ **avec** $\lim\limits_{-\infty} f = 1$: $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f(x)} = \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$ → **avec** $\lim\limits_{+\infty} f = 1$: $\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$

→ **avec** $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} f = +\infty$: $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} g = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} \sqrt{f(x)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ → **avec** $\lim\limits_{-1^-} f = +\infty$: $\lim\limits_{-1^-} g = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \sqrt{f(x)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{-\infty} g = 1 \text{ ; } \lim\limits_{-1^-} g = +\infty \text{ ; } \lim\limits_{\frac{1}{2}^+} g = +\infty \text{ ; } \lim\limits_{+\infty} g = 1}$

3) On note $h = \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$. **3-1** ensemble de définition D_h de h :

$h = \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$ donc pour tout réel x , $x \in D_h \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ \sqrt{f(x)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

D'après le tableau de signe de $f(x)$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$. Donc : $x \in D_h \Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$

Donc : $D_h = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[- \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ soit : $\boxed{D_h = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{3}{2}, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[}$

3-2 limites de h aux bornes de D_h $\quad D_h = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{3}{2}, -1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

D'après **2-2** $\lim\limits_{-\infty} g = 1$; $\lim\limits_{-1^-} g = +\infty$; $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} g = +\infty$; $\lim\limits_{+\infty} g = 1$. Comme g est une fonction définie et continue en $-\dfrac{3}{2}$,

on a : $\lim\limits_{-\frac{3}{2}} g = \lim\limits_{-\frac{3}{2}^+} g = \lim\limits_{-\frac{3}{2}^-} g = g\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et d'après le tableau de signe de $f(x)$: $g\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \sqrt{f\left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \sqrt{0} = 0$ et

$x \in \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{3}{2}, -1\right[$ entraîne $f(x) > 0$ d'où $\sqrt{f(x)} > 0$ puis $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} > 0$ soit $g(x) > 0$

En utilisant les limites de l'inverse d'une fonction (ici de g) on déduit les limites de $h = \dfrac{1}{g}$ aux bornes de D_h .

→ **avec** $\lim\limits_{-\infty} g = 1$: $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc : $\lim\limits_{-\infty} h = 1$ → **avec** $\lim\limits_{+\infty} g = 1$: $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc : $\lim\limits_{+\infty} h = 1$

→ **avec** $\lim\limits_{-\frac{3}{2}^-} g = 0$ et $g(x) > 0$ pour $x < -\dfrac{3}{2}$: $\lim\limits_{-\frac{3}{2}^-} \dfrac{1}{g} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{-\frac{3}{2}^-} h = +\infty$

→ **avec** $\lim\limits_{-\frac{3}{2}^+} g = 0$ et $g(x) > 0$ pour $-\dfrac{3}{2} < x < -1$: $\lim\limits_{-\frac{3}{2}^+} \dfrac{1}{g} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{-\frac{3}{2}^+} h = +\infty$

→ **avec** $\lim\limits_{-1^-} g = +\infty$: $\lim\limits_{-1^-} \dfrac{1}{g} = 0$ donc $\lim\limits_{-1^-} h = 0$ → **avec** $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} g = +\infty$ $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} \dfrac{1}{g} = 0$ donc $\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} h = 0$.

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{-\infty} h = 1 \text{ ; } \lim\limits_{-\frac{3}{2}^-} h = +\infty \text{ ; } \lim\limits_{-\frac{3}{2}^+} h = +\infty \text{ ; } \lim\limits_{-1^-} h = 0 \text{ ; } \lim\limits_{\frac{1}{2}^+} h = 0 \text{ ; } \lim\limits_{+\infty} h = 1}$

 Calculer les limites indiquées dans le tableau suivant (ne pas justifier D_f) :

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut justifier
1) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 - 4x + 3$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\frac{1}{2}} f = 9$
2) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 7}$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$
3) $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 11x^2 - 18x - 9}{-2x^3 - 5x^2 + 3x}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{0, -3, \dfrac{1}{2}\right\}$	$\lim\limits_{-3^-} f = \lim\limits_{-3^+} f = \dfrac{2}{7} = \lim\limits_{-3} f$
4) $f(x) = \dfrac{8x^2 + 5\|x\|}{2x^2 + \|x\|}$	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 5 = \lim\limits_{0} f$
5) $f(x) = \dfrac{\|4 - 6x\|}{9x^2 - 12x + 4}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$	$\lim\limits_{\frac{2}{3}^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{\frac{2}{3}^-} f = +\infty$
6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{2x^2 + 5x}$	$D_f = [-2, +\infty[- \{0\}$	$\lim\limits_{0^-} f = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ et $\lim\limits_{0^+} f = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$
7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x + 1} - 5}{-2x^2 + 11x - 15}$	$D_f = \left[-\dfrac{1}{8}, +\infty\right[- \left\{3, \dfrac{5}{2}\right\}$	$\lim\limits_{3^-} f = \lim\limits_{3^+} f = -\dfrac{4}{5} = \lim\limits_{3} f$

1) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 - 4x + 3$

$\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = +\infty}$ → une autre expression pour $f(x)$ avec x non nul

$$f(x) = -8x^3 + 12x^2 - 4x + 3 = x^3\left[\frac{-8x^3 + 12x^2 - 4x + 3}{x^3}\right] = x^3\left[\frac{-8x^3}{x^3} + \frac{12x^2}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right] = x^3\left[-8 + \frac{12}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right]$$

→ déduction de $\lim\limits_{-\infty} f$ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} -8 + \dfrac{12}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} = -8 + 12(0) - 4(0) + 3(0) = -8$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-8 < 0$) :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left[-8 + \dfrac{12}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right] = +\infty$ soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{-\frac{1}{2}} f = 9}$ Comme fonction polynôme , f est définie et continue en tout réel et : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = -8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + 12\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 = -8\left(-\dfrac{1}{8}\right) + 12\left(\dfrac{1}{4}\right) + 2 + 3 = 1 + 3 + 5 = 9$

2) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 7}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$. Pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 7 \geq 0$

Le discriminant Δ de $4x^2 + 2x + 7$ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(4)(7) = 4 - 112 = -108$.

Δ étant strictement négatif , $4x^2 + 2x + 7$ n'admet pas de racine et est de signe constant sur $\mathbb{R}$: celui de son coefficient dominant a égal à 4 . Donc pour tout réel x , $4x^2 + 2x + 7 > 0$ et $x \in D_f$ est vrai .

$\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = +\infty}$ $f(x)$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$ en posant : $u(x) = 4x^2 + 2x + 7$

→ comportement de $u(x)$ au voisinage de $-\infty$. Avec x non nul , $u(x) = 4x^2 + 2x + 7 = x^2\left(4 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 4 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2} = 4 + 2(0) + 7(0) = 4$. D'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet d'obtenir avec $4 > 0$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(4 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$.

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $-\infty$. En posant $X = u(x)$ on obtient :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

$3) f(x) = \dfrac{-2x^3 - 11x^2 - 18x - 9}{-2x^3 - 5x^2 + 3x}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \left\{0, -3, \frac{1}{2}\right\}}$.

Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow -2x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-2x^2 - 5x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-2x^2 - 5x + 3 = 0$

Le discriminant Δ de $-2x^2 - 5x + 3$ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-2)(3) = 25 + 24 = 49$ *et* $\sqrt{\Delta} = 7$.

Δ étant strictement positif , $-2x^2 - 5x + 3$ admet deux racines distinctes égales à :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-7}{2(-2)} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+7}{2(-2)} = \dfrac{12}{-4} = -3$

Par conséquent : $-2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = \dfrac{1}{2}$ et $x \notin D_f \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$ ou $x = \dfrac{1}{2}$. Ainsi : $D_f = \mathbb{R} - \left\{0, -3, \frac{1}{2}\right\}$

$\boxed{\lim\limits_{-3} f = \frac{2}{7}}$ situation $x \to -3$

$N(x) = -2x^3 - 11x^2 - 18x - 9$	$N(x) \underset{x \to -3}{\longrightarrow} 0$
$D(x) = -2x^3 - 5x^2 + 3x$	$D(x) \underset{x \to -3}{\longrightarrow} 0$

$N(x)$ et $D(x)$ factorisables par $x + 3$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

• D'après la recherche de D_f on a : $D(x) = -2x^3 - 5x^2 + 3x = x(-2x^2 - 5x + 3)$ et $-2x^2 - 5x + 3$ est factorisable par $x + 3$ comme polynôme du second degré admettant -3 comme racine . Donc : $-2x^2 - 5x + 3 = (x+3)(-2x+1)$ et : $D(x) = x(x+3)(-2x+1)$.

• N(x) étant factorisable par $x + 3$ on peut trouver trois réels a , b , c tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ N(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.

D'autre part : $(x+3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c = ax^3 + (b + 3a)x^2 + (c + 3b)x + 3c$.

Et deux polynômes de même degré sont égaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ils ont les mêmes coefficients . Donc :

$\forall x \in \mathbb{R},\ N(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -2x^3 - 11x^2 - 18x - 9 = ax^3 + (b + 3a)x^2 + (c + 3b)x + 3c$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ N(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b + 3a = -11 \\ c + 3b = -18 \\ 3c = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -11 - 3a \\ c = -18 - 3b \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -11 + 6 \\ c = -18 - 3b \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = -18 + 15 \\ c = -3 \end{cases}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ N(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow (a, b, c) = (-2, -5, -3)$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ N(x) = (x+3)(-2x^2 - 5x - 3)$

• $f(x)$ devient : $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 11x^2 - 18x - 9}{-2x^3 - 5x^2 + 3x} = \dfrac{(x+3)(-2x^2 - 5x - 3)}{x(x+3)(-2x+1)} = \dfrac{-2x^2 - 5x - 3}{x(-2x+1)} = g(x)$ en posant $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 5x - 3}{x(-2x+1)}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de -3 g est une fonction rationnelle définie et continue en -3 .

Donc $\lim\limits_{-3^-} g = \lim\limits_{-3^+} g = \lim\limits_{-3} g = g(-3) = \dfrac{-2(-3)^2 - 5(-3) - 3}{-3(-2(-3) + 1)} = \dfrac{-6}{-21} = \dfrac{2}{7}$. D'où : $\lim\limits_{-3^-} f = \lim\limits_{-3^-} g = \dfrac{2}{7}$ et $\lim\limits_{-3^+} f = \lim\limits_{-3^+} g = \dfrac{2}{7}$.

Ayant : $-3 \notin D_f$, $\lim\limits_{-3^-} f = \lim\limits_{-3^+} f = \dfrac{2}{7}$ on déduit : f admet une limite en -3 et $\lim\limits_{-3} f = \dfrac{2}{7}$

$4) f(x) = \dfrac{8x^2 + 5|x|}{2x^2 + |x|}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0\}}$. Pour tout x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 2x^2 + |x| = 0$.

Or : → $0 \notin D_f$ car : $x = 0$ entraîne $2x^2 + |x| = 2(0)^2 + |0| = 0$

→ avec $x \neq 0$: ($2x^2 > 0$ car : $x^2 > 0$ et $2 > 0$) et $|x| > 0$ donc $2x^2 + |x| > 0$. Tout réel x non nul est élément de D_f .

$\boxed{\lim\limits_{0} f = 5}$ situation $x \to 0$

$N(x) = 8x^2 + 5|x|$	$N(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
$D(x) = 2x^2 + |x|$	$D(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

méthode : écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue puis simplifier le quotient $f(x)$ par x

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x < 0}$

$x < 0$ entraîne $|x| = -x$. Donc $f(x) = \dfrac{8x^2 + 5|x|}{2x^2 + |x|}$ devient :

$f(x) = \dfrac{8x^2 - 5x}{2x^2 - x} = \dfrac{x(8x - 5)}{x(2x - 1)} = \dfrac{8x - 5}{2x - 1}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{8x - 5}{2x - 1} = \dfrac{8(0) - 5}{2(0) - 1} = 5$

Ainsi : $\lim\limits_{0^-} f = 5$

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x > 0}$

$x > 0$ entraîne $|x| = x$. Donc $f(x) = \dfrac{8x^2 + 5|x|}{2x^2 + |x|}$ devient :

$f(x) = \dfrac{8x^2 + 5x}{2x^2 + x} = \dfrac{x(8x + 5)}{x(2x + 1)} = \dfrac{8x + 5}{2x + 1}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{8x + 5}{2x + 1} = \dfrac{8(0) + 5}{2(0) + 1} = 5$

Ainsi : $\lim\limits_{0^+} f = 5$

Ayant : $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f = 5$ on déduit : f admet une limite en 0 et $\lim\limits_{0} f = 5$

5) $f(x) = \dfrac{|4-6x|}{9x^2-12x+4}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$. En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 9x^2-12x+4=0$

Et : $x \notin D_f \Leftrightarrow (3x)^2 - 2(2)(3x) + (2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{\frac{2}{3}^-} f = +\infty$; $\lim\limits_{\frac{2}{3}^+} f = +\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite $D : x = \dfrac{2}{3}$ est une droite asymptote à C_f .

situation $x \to \dfrac{2}{3}$

$N(x) = \|4-6x\|$	$N(x) \underset{x \to \frac{2}{3}}{\longrightarrow} \left\|4 - 6\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\| = \|0\| = 0$
$D(x) = 9x^2-12x+4$	$D(x) \underset{x \to \frac{2}{3}}{\longrightarrow} 0$

méthode : écrire $N(x)$ sans le symbole de la valeur absolue puis simplifier le quotient $f(x)$ par $x - \dfrac{2}{3}$ ou par $3x-2$

D'après la recherche de D_f : $D(x) = 9x^2-12x+4 = (3x-2)^2$.

D'autre part : $N(x) = |4-6x| = |-2(3x-2)| = |-2| \times |3x-2| = 2 \times |3x-2|$

Donc pour tout réel x de D_f , $f(x) = \dfrac{|4-6x|}{9x^2-12x+4} = \dfrac{2 \times |3x-2|}{(3x-2)^2}$.

Pour écrire $|3x-2|$ sans le symbole de la valeur absolue , on est amené à considérer le signe de $3x-2$ et à se placer naturellement en $\dfrac{2}{3}^-$ et en $\dfrac{2}{3}^+$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		signe de $-a$ $-$	0	signe de a , a = 3 $+$	

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x < \dfrac{2}{3}}$

$x < \dfrac{2}{3}$ entraîne $3x-2<0$ et $|3x-2| = -(3x-2)$. Donc :

$f(x) = \dfrac{2 \times |3x-2|}{(3x-2)^2}$ devient : $f(x) = \dfrac{-2(3x-2)}{(3x-2)^2} = \dfrac{-2}{3x-2}$

Et : $f(x) = -2 \times \dfrac{1}{3x-2}$. D'autre part :

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} \dfrac{1}{3x-2} = -\infty$ car : $x < \dfrac{2}{3}$ entraîne $3x-2<0$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} -2 \times \dfrac{1}{3x-2} = +\infty$ car : $-2<0$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} f(x) = +\infty$

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x > \dfrac{2}{3}}$

$x > \dfrac{2}{3}$ entraîne $3x-2>0$ et $|3x-2| = (3x-2)$. Donc :

$f(x) = \dfrac{2 \times |3x-2|}{(3x-2)^2}$ devient : $f(x) = \dfrac{2(3x-2)}{(3x-2)^2} = \dfrac{2}{3x-2}$

Et : $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{3x-2}$. D'autre part :

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x > \frac{2}{3}}} \dfrac{1}{3x-2} = +\infty$ car : $x > \dfrac{2}{3}$ entraîne $3x-2>0$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} 2 \times \dfrac{1}{3x-2} = +\infty$ car : $2>0$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ x < \frac{2}{3}}} f(x) = +\infty$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+2x^2}}{2x^2+5x}$ $\boxed{D_f = [-2, +\infty[- \{0\}}$. En effet : pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2 \geq 0 \\ 2x^2+5x \neq 0 \end{cases}$. D'autre part :

avec x réel quelconque : $x^3+2x^2 = x^2(x+2)$ et $2x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(2x+5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $2x+5=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x = -\dfrac{5}{2}$

En utilisant le tableau de signe de x^3+2x^2 et les racines de $2x^2+5x$

$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2 \geq 0 \\ 2x^2+5x \neq 0 \end{cases}$ devient : $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, +\infty[\\ x \neq 0 \text{ et } x \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Or : $0 \in [-2, +\infty[$ et $-\dfrac{5}{2} \notin [-2, +\infty[$ (car : $-\dfrac{5}{2} < -2$)

Donc : $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2, +\infty[\\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, +\infty[- \{0\}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3+2x^2		$-$	0	$+$	0	$+$	

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{0^-} f = -\dfrac{\sqrt{2}}{5} \\ \lim\limits_{0^+} f = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\end{array}}$$

situation $x \to 0$

$N(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$	$N(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{0} = 0$
$D(x) = 2x^2 + 5x$	$D(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

méthode : simplifier le quotient $f(x)$ par x en utilisant : $\sqrt{x^2} = |x|$ et la définition de $|x|$

Avec x élément de D_f on a : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+2x^2}}{2x^2+5x} = \dfrac{\sqrt{x^2(x+2)}}{x(2x+5)} = \dfrac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{x+2}}{x(2x+5)} = \dfrac{|x|}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x < 0}$

$x < 0$ entraîne $|x| = -x$. Donc $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$ devient :

$f(x) = \dfrac{-x}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5} = -\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5} = -\dfrac{\sqrt{0+2}}{2\,(0)+5} = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Ainsi : $\lim\limits_{0^-} f = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x > 0}$

$x > 0$ entraîne $|x| = x$. Donc $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$ devient :

$f(x) = \dfrac{x}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x+2}}{2x+5} = \dfrac{\sqrt{0+2}}{2\,(0)+5} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Ainsi : $\lim\limits_{0^+} f = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$\lim\limits_{0^-} f \neq \lim\limits_{0^+} f$: f n'admet pas de limite en 0 .

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x+1} - 5}{-2x^2 + 11x - 15}$

$\boxed{D_f = \left[-\dfrac{1}{8}, +\infty\right[- \left\{3, \dfrac{5}{2}\right\}}$. En effet : pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+1 \geq 0 \\ -2x^2+11x-15 \neq 0 \end{cases}$.

D'autre part : $\rightarrow 8x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 8x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{8}$ car $8 > 0$

$\rightarrow$ 3 est une racine de $-2x^2 + 11x - 15$ car : $-2\,(3)^2 + 11\,(3) - 15 = -18 + 33 - 15 = 0$.

$-2x^2 + 11x - 15$ est donc factorisable par $x - 3$ et $-2x^2 + 11x - 15 = (x-3)(-2x+5)$.

D'où : $-2x^2 + 11x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(-2x+5) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \dfrac{5}{2}$

Par conséquent : $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+1 \geq 0 \\ -2x^2+11x-15 \neq 0 \end{cases}$ devient : $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{8} \\ x \neq 3 \text{ et } x \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\dfrac{1}{8}, +\infty\right[\\ x \neq 3 \text{ et } x \neq \dfrac{5}{2} \end{cases}$

3 et $\dfrac{5}{2}$ sont éléments de $\left[-\dfrac{1}{8}, +\infty\right[$ donc $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{1}{8}, +\infty\right[- \left\{3, \dfrac{5}{2}\right\}$ et D_f est justifié .

$\boxed{\lim\limits_{3} f = \dfrac{4}{5}}$

situation $x \to 3$

$N(x) = \sqrt{8x+1} - 5$	$N(x) \underset{x\to 3}{\longrightarrow} \sqrt{25} - 5 = 0$
$D(x) = -2x^2 + 11x - 15$	$D(x) \underset{x\to 3}{\longrightarrow} 0$

méthode : multiplier $N(x)$ et $D(x)$ par la quantité conjuguée de $\sqrt{8x+1} - 5$ puis simplifier $f(x)$ par $x - 3$

$\rightarrow$ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{\sqrt{8x+1}-5}{-2x^2+11x-15} = \frac{\left[\sqrt{8x+1}-5\right]\left[\sqrt{8x+1}+5\right]}{(-2x^2+11x-15)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]} = \frac{\left[\sqrt{8x+1}\right]^2 - (5)^2}{(-2x^2+11x-15)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]}$$

$$f(x) = \frac{8x+1-25}{(-2x^2+11x-15)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]} = \frac{8x-24}{(-2x^2+11x-15)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]} = \frac{8(x-3)}{(x-3)(-2x+5)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]}$$

$$f(x) = \frac{8}{(-2x+5)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]}$$

$\rightarrow$ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 1 On a obtenu précédemment :

$f(x) = g(x)$ avec $g(x) = \dfrac{8}{(-2x+5)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]}$ et comme nouvelle situation :

situation $x \to 3$

$N_1(x) = 8$	$N_1(x) \underset{x\to 3}{\longrightarrow} 8$
$D_1(x) = (-2x+5)\left[\sqrt{8x+1}+5\right]$	$D_1(x) \underset{x\to 3}{\longrightarrow} (-6+5)\left[\sqrt{24+1}+5\right] = (-1)\times 10 = -10$

g est une fonction quotient définie et continue en 3 et : $\lim\limits_{3^-} g = \lim\limits_{3^+} g = \lim\limits_{3} g = g(3) = \dfrac{N_1(3)}{D_1(3)} = \dfrac{8}{-10} = -\dfrac{4}{5}$

D'où : $\lim\limits_{3^-} f = \lim\limits_{3^-} g = -\dfrac{4}{5}$ et $\lim\limits_{3^+} f = \lim\limits_{3^+} g = -\dfrac{4}{5}$.

Ayant : $3 \notin D_f$, $\lim\limits_{3^-} f = \lim\limits_{3^+} f = -\dfrac{4}{5}$ on déduit : f admet une limite en 3 et $\lim\limits_{3} f = -\dfrac{4}{5}$

exercice 4 **1)** Les énoncés proposés sont-ils vrais ou faux ? .

l'énoncé	son contenu (la lettre x désigne un réel quelconque)	vrai ? ou faux ?
énoncé 1	Avec $f(x)=\dfrac{8x^2+1}{4x^2+4x+1}$, C_f possède deux droites asymptotes	**VRAI**
énoncé 2	Avec $f(x)=\dfrac{2x^3+4x^2-5x}{3x^2+x}$, on a : $\lim\limits_{3} f=\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{2x^3}{3x^2}$	**FAUX**
énoncé 3	Avec $f(x)=\dfrac{4x^2-2x-1}{1-x^2}$, on a : $\lim\limits_{1^+} f=+\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f=-\infty$	**FAUX**
énoncé 4	Avec $f(x)=\sqrt{\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}}$, C_f possède une droite asymptote d'équation : $y=4$	**FAUX**
énoncé 5	Avec $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{\lvert x\rvert}$, deux droites asymptotes à C_f sont obliques	**VRAI**
énoncé 6	Avec $f(x)$ défini par : $\begin{cases} f(x)=5x^2-4x \Leftrightarrow x>2 \\ f(x)=ax^2+4 \Leftrightarrow x\leq 2\end{cases}$, f est continue en 2 ssi a vaut 2	**VRAI**
énoncé 7	si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-g(x)=0$	**FAUX**
énoncé 8	Avec $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2}}{x^2+3x}$ on a : $\lim\limits_{0} f=1$	**FAUX**
énoncé 9	Avec $f(x)=\dfrac{x^3+4\lvert x\rvert^2+3}{x^2}$, deux droites asymptotes à C_f sont obliques	**FAUX**
énoncé 10	si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ alors C_f possède une droite asymptote oblique d'équation : $y=2x$	**FAUX**

énoncé 1 VRAI $f(x)=\dfrac{8x^2+1}{4x^2+4x+1}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$ En effet : pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow 4x^2+4x+1=0$.

Et : $x\notin D_f \Leftrightarrow (2x)^2+2(2x)(1)+(1)^2=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

situation $x\to -\dfrac{1}{2}$

$N(x)=8x^2+1$	$N(x)\underset{x\to-\frac{1}{2}}{\longrightarrow} N\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$ réel non nul
$D(x)=4x^2+4x+1$	$D(x)\underset{x\to-\frac{1}{2}}{\longrightarrow} 0$

Donc $\lim\limits_{-\frac{1}{2}^-} f$ et $\lim\limits_{-\frac{1}{2}^+} f$ infinies et D_1 : $x=-\dfrac{1}{2}$ est une première droite asymptote à la courbe C_f

Aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{8x^2}{4x^2}$ soit à 2

Donc : $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\to-\infty} 2=2$ et $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2$. Ces deux limites étant égales au réel 2 , la droite D_2 : $y=2$ est une deuxième droite asymptote à la courbe C_f . C_f ne possède que deux droites asymptotes et l'énoncé 1 est vrai .

énoncé 2 FAUX $f(x)=\dfrac{2x^3+4x^2-5x}{3x^2+x}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\left\{0,-\dfrac{1}{3}\right\}}$ Pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow 3x^2+x=0 \Leftrightarrow x(3x+1)=0$.

Attention ! Le théorème $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{2x^3}{3x^2}$ ne s'applique qu'aux seuls voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$! .

$\rightarrow$ f est une fonction rationnelle définie et continue en 3 donc : $\lim\limits_{3} f=f(3)=\dfrac{2(3)^3+4(3)^2-5(3)}{3(3)^2+(3)}=\dfrac{75}{30}=\dfrac{5}{2}$

$\rightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{2x^3}{3x^2}=\dfrac{2(3)^3}{3(3)^2}=\dfrac{2(3)^3}{(3)^3}=2$ et $2=\dfrac{5}{2}$ est faux . L'énoncé 2 est donc faux .

énoncé 3 FAUX Avec $f(x)=\dfrac{4x^2-2x-1}{1-x^2}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{1,-1\}}$

Pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)=0$.

situation $x\to 1$

$N(x)=4x^2-2x-1$	$N(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow} N(1)=1$
$D(x)=1-x^2$	$D(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

Pour la suite , j'utilise : $f(x)=\dfrac{4x^2-2x-1}{1-x^2}=\dfrac{4x^2-2x-1}{(1-x)(1+x)}$

$f(x)=\dfrac{4x^2-2x-1}{-(x-1)(1+x)}=\dfrac{4x^2-2x-1}{-(1+x)}\times\dfrac{1}{x-1}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{4x^2-2x-1}{-(1+x)}=\dfrac{4(1)^2-2(1)-1}{-(1+(1))}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ ($x<1$ entraîne $x-1<0$)

Donc : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{4x^2-2x-1}{-(1+x)}\times\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ (car $-\dfrac{1}{2}<0$) . Ainsi : $\displaystyle\lim_{1^-}f=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{1^-}f=-\infty$ est faux . L'énoncé 3 est donc faux .

énoncé 4 FAUX $f(x)=\sqrt{\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}}$. $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$ Pour tout réel x , $x^2\geq 0$ et $8>0$, $2>0$.

Donc pour tout réel x : $8x^2\geq 0$ et $2x^2\geq 0$ puis : $8x^2+1\geq 1$ et $2x^2+5\geq 5$ d'où : $8x^2+1>0$ et $2x^2+5>0$.

Ainsi , pour tout réel x : $\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}$ est strictement positif et $\sqrt{\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}}$ est défini .

Avec D : $y=4$ droite asymptote à la courbe C_f on a l'une au moins des deux limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ qui vaut 4 .

D'autre part : aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{8x^2}{2x^2}$ soit à 4 .

Donc : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}=\lim_{x\to-\infty}4=4$ et $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}4=4$; En posant $X=\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}$ on obtient ensuite :

$\displaystyle\lim_{-\infty}f=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}}=\lim_{X\to 4}\sqrt{X}=\sqrt{4}=2$ et $\displaystyle\lim_{+\infty}f=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}}=\lim_{X\to 4}\sqrt{X}=\sqrt{4}=2$

Ces deux limites étant égales au réel 2 qui est distinct de 4 , la droite D : $y=4$ n'est pas une droite asymptote à la courbe C_f .

L'énoncé 4 est donc faux . Par contre C_f admet la droite Δ : $y=2$ comme droite asymptote .

énoncé 5 VRAI $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{|x|}$. $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{0\}}$ Pour tout réel x , $x\notin D_f\Leftrightarrow |x|=0\Leftrightarrow x=0$

au voisinage de 0

$\boxed{\displaystyle\lim_{0^-}f=+\infty=\lim_{0^+}f}$

situation $x\to 0$

$N(x)=-3x^2+2x+1$	$N(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
$D(x)=\lvert x\rvert$	$D(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Pour la suite j'utilise :

$f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{|x|}=\left(-3x^2+2x+1\right)\times\dfrac{1}{|x|}$

On a : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}-3x^2+2x+1=-3(0)^2+2(0)+1=1$;

D'autre part : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0}|x|=|0|=0$ et $|x|>0$ pour $x\neq 0$ d'où : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{|x|}=+\infty=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{|x|}$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $1>0$) :

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(-3x^2+2x+1\right)\times\dfrac{1}{|x|}=+\infty=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-3x^2+2x+1\right)\times\dfrac{1}{|x|}$ soit : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=+\infty=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$.

Avec ces deux limites infinies on déduit : l'axe (Oy) : $x=0$ est une droite asymptote à C_f (non oblique) .

Au voisinage de $-\infty$ on peut supposer $x<0$ et $|x|=-x$

Donc : $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{|x|}$ devient :

$f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{-x}=3x-2-\dfrac{1}{x}$

D'où : $f(x)-(3x-2)=-\dfrac{1}{x}$

Et : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty}f(x)-(3x-2)=\lim_{x\longrightarrow-\infty}-\dfrac{1}{x}=-0=0$

On obtient ainsi : la droite D_1 : $y=3x-2$ est une droite asymptote "oblique" à C_f au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ on peut supposer $x>0$ et $|x|=x$

Donc : $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{|x|}$ devient :

$f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{x}=-3x+2+\dfrac{1}{x}$

D'où : $f(x)-(-3x+2)=\dfrac{1}{x}$

Et : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)-(-3x+2)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x}=-0$

On obtient ainsi : la droite D_1 : $y=-3x+2$ est une droite asymptote "oblique" à C_f au voisinage de $+\infty$.

Conclusion : avec $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{|x|}$, deux des trois droites asymptotes à C_f sont bien "obliques " . L'énoncé 5 est vrai

énoncé 6 VRAI $f(x)$ défini par : $\begin{cases} f(x) = 5x^2 - 4x \Leftrightarrow x > 2 \\ f(x) = ax^2 + 4 \Leftrightarrow x \leq 2 \end{cases}$

f est continue en 2 si et seulement si : $f(2) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$.

Or : $f(2) = a(2)^2 + 4 = 4a + 4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} ax^2 + 4 = a(2)^2 + 4 = 4a + 4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 5x^2 - 4x = 5(2)^2 - 4(2) = 12$

Donc : $f(2) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) \Leftrightarrow 4a + 4 = 12 \Leftrightarrow a = 2$.

Et : f est continue en 2 si et seulement si a vaut 2 . L'énoncé 6 est donc vrai .

énoncé 7 FAUX contre-exemple : $f(x) = -x$; $g(x) = -2x$

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -x = -\infty \ (-1 < 0)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -2x = -\infty \ (-2 < 0)$.

Par contre : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -x - (-2x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -x + 2x = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$

Avec $f(x) = -x$ et $g(x) = -2x$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$ est donc faux . L'énoncé 7 est faux .

énoncé 8 FAUX $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x^2 + 3x}$

$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0, -3\}}$ Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

0 n'étant pas élément de D_f : $\lim\limits_0 f = 1$ signifie : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ existent et sont égales à 1 .

D'autre part : $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x^2 + 3x} = \dfrac{3\sqrt{x^2}}{x^2 + 3x} = \dfrac{3\,|x|}{x^2 + 3x}$

Avec $x \in D_f$ et $x < 0$ $x < 0$ entraîne $|x| = -x$. Donc $f(x) = \dfrac{3\,|x|}{x^2 + 3x}$ devient : $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 + 3x} = \dfrac{-3x}{x(x+3)} = \dfrac{-3}{x+3}$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-3}{x+3} = \dfrac{-3}{0+3} = -1$. Or : $-1 \neq 1$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) \neq 1$ et l'énoncé 8 est faux

énoncé 9 FAUX $f(x) = \dfrac{x^3 + 4\,|x|^2 + 3}{x^2}$

$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0\}}$ Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

En utilisant la propriété suivante : Pour tout réel x , $|x|^2 = \left|x^2\right| = x^2$(car $x^2 \geq 0$) on obtient une autre écriture pour f(x) :

$f(x) = \dfrac{x^3 + 4\,|x|^2 + 3}{x^2} = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3}{x^2} = x + 4 + \dfrac{3}{x^2}$

$f(x)$ est donc de la forme $x + 4 + R(x)$ avec $R(x) = \dfrac{3}{x^2} = 3 \times \dfrac{1}{x^2}$

D'autre part : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x^2}$ entraîne $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} R(x) = 3 \times 0 = 0 = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} R(x)$.

D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (x+4) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} R(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - (x+4) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} R(x) = 0$

C_f n'admet qu'une seule droite asymptote oblique d'équation : $y = x + 4$. L'énoncé 9 est faux .

énoncé 10 FAUX contre-exemple : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0\}}$ Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ est vrai car : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{2x + 1 + \dfrac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2 + 0 + 0 = 2$ car $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

D'autre part : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$ entraîne : $f(x) - (2x+1) = \dfrac{1}{x}$

D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - (2x+1) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - (2x+1) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

La courbe C_f admet donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ comme asymptote oblique qui est strictement parallèle à $D : y = 2x$.

remarque : avec $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$: on peut seulement dire que l'équation réduite de la droite asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ est de la forme $y = 2x + b$, la valeur de b dépendant de l'expression donnée pour f(x) .