Limites : DS1 - 4h

situation pour tous les exercices Le plan est muni d'un repère d'origine O noté $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Pour toute fonction F utilisée , on note C_F la courbe représentant F dans ce repère .

Pour justifier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes ou rationnelles la méthode dite détaillée est obligatoire , les théorèmes ne pouvant être utilisés que pour conjecturer les résultats (utiles pour l'exercice 4)

exercice 1 On considère la fonction f suivante $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(x-1)^2}$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f

2) En utilisant la résolution d'un système , déterminer les réels a , b , c et d tels que :

$\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{(x-1)^2}$

3) Justifier que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une droite asymptote à la courbe C_f puis étudier la position relative de C_f et de Δ

exercice 2 On considère la fonction f suivante $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 2x - 2}$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f .

2) On note $g = \sqrt{f}$ **2-1** Etudier le signe de $f(x)$ puis en déduire l'ensemble de définition D_g de g .

2-2 En utilisant les résultats de la question **1)** et les limites de la fonction racine carrée , déduire les limites de g aux bornes de D_g .

$\lim\limits_{-\infty} g$; $\lim\limits_{-2^-} g$; $\lim\limits_{\frac{5}{2}^+} g$; $\lim\limits_{+\infty} g$

3) On note $h = \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$. **3-1** En utilisant les résultats de la question **2)** déduire l'ensemble de définition D_h de h

3-2 Déduire les limites de h aux bornes de D_h .

exercice 3 Calculer les limites indiquées dans le tableau suivant (ne pas justifier D_f) :

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut étudier
1) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 - 4x + 3$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{-\frac{1}{2}} f$
2) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 7}$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim\limits_{-\infty} f$
3) $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 11x^2 - 18x - 9}{-2x^3 - 5x^2 + 3x}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{0, -3, \dfrac{1}{2}\right\}$	$\lim\limits_{-3^+} f$ et $\lim\limits_{-3^-} f$
4) $f(x) = \dfrac{8x^2 + 5\|x\|}{2x^2 + \|x\|}$	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{0^-} f$
5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x+1} - 5}{-2x^2 + 11x - 15}$	$D_f = [-\dfrac{1}{8}, +\infty[- \left\{3, \dfrac{5}{2}\right\}$	$\lim\limits_{3^+} f$ et $\lim\limits_{3^-} f$
6) $f(x) = \dfrac{\|4 - 6x\|}{9x^2 - 12x + 4}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$	$\lim\limits_{3^+} f$ et $\lim\limits_{3^-} f$
7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{2x^2 + 5x}$	$D_f = [-2, +\infty[- \{0\}$	$\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{0^-} f$

exercice 4 **1)** Les énoncés proposés sont-ils vrais ou faux ? . Cette question sera notée de la manière suivante : toute réponse exacte est notée n points ; toute réponse inexacte enlève la moitié de ces n points ; toute absence de réponse est notée 0 . Si le total obtenu pour l'ensemble des énoncés est négatif , la note attribuée à la question 1) est 0 .

l'énoncé	son contenu (la lettre x désigne un réel quelconque)	vrai ? faux ?
énoncé 1	Avec $f(x) = \dfrac{8x^2+1}{4x^2+4x+1}$, C_f possède deux droites asymptotes	
énoncé 2	Avec $f(x) = \dfrac{2x^3+4x^2-5x}{3x^2+x}$, on a : $\lim\limits_{3} f = \lim\limits_{x \longrightarrow 3} \dfrac{2x^3}{3x^2}$	
énoncé 3	Avec $f(x) = \dfrac{4x^2-2x-1}{1-x^2}$, on a : $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$	
énoncé 4	Avec $f(x) = \sqrt{\dfrac{8x^2+1}{2x^2+5}}$, C_f possède une droite asymptote d'équation : $y = 4$	
énoncé 5	Avec $f(x) = \dfrac{-3x^2+2x+1}{\lvert x \rvert}$, deux droites asymptotes à C_f sont obliques	
énoncé 6	Avec $f(x)$ défini par : $\begin{cases} f(x) = 5x^2-4x \Leftrightarrow x > 2 \\ f(x) = ax^2+4 \Leftrightarrow x \leq 2 \end{cases}$, f est continue en 2 ssi a vaut 2	
énoncé 7	si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$	
énoncé 8	Avec $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x^2+3x}$ on a : $\lim\limits_{0} f = 1$	
énoncé 9	Avec $f(x) = \dfrac{x^3+4\lvert x \rvert^2+3}{x^2}$, deux droites asymptotes à C_f sont obliques	
énoncé 10	si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ alors C_f possède une droite asymptote oblique d'équation : $y = 2x$	

2) Justifier votre réponse pour les énoncés suivants : énoncé 2 ; énoncé 6 ; énoncé 7 ; énoncé 8 ; énoncé 10

exercice	1	2	3	4	NOM :
temps conseillé $\simeq$	$\simeq 45mn$	$\simeq 60mn$	$\simeq 80mn$	$\simeq 45mn$	Prénom :