

Limites - corrigés feuille 1

Première Partie : avec des fonctions polynômes

page 1 / 27

exercice 1 1) Compléter le tableau suivant en utilisant le théorème : f étant une fonction polynôme, aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme son terme de plus haut degré.

l'expression donnée pour $f(x)$	terme de plus haut degré de $f(x)$	comportement de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$
1) $f(x) = 2x^2 - 7x$	$2x^2$	$\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$
2) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5$	$5x^3$	$\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$
3) $f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6$	$-2x^5$	$\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$
4) $f(x) = -2x^4 + 8x + 3$	$-2x^4$	$\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$
5) $f(x) = -6x^3 + 5x^2 - 5x + 8$	$-6x^3$	$\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$

2) Justification des résultats précédents.

Préalable : aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, on peut supposer x différent de 0. Toutes les expressions du type $\frac{1}{x^n}$ avec n entier naturel non nul sont donc définies aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$. Pour mettre en évidence le terme de plus haut degré on factorise $f(x)$ par la plus grande puissance de x intervenant dans l'expression donnée pour $f(x)$.

1) $f(x) = 2x^2 - 7x \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x non nul

$$f(x) = 2x^2 - 7x = x^2 \left[\frac{2x^2 - 7x}{x^2} \right] = x^2 \left[\frac{2x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} \right] = x^2 \left[2 - \frac{7}{x} \right]$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{7}{x} = 2 - 7(0) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{7}{x} = 2 - 7(0) = 2$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $2 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[2 - \frac{7}{x} \right] = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[2 - \frac{7}{x} \right] = +\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty}$$

2) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5 \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x non nul

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5 = x^3 \left[\frac{5x^3 + 4x^2 - 3x + 5}{x^3} \right] = x^3 \left[\frac{5x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right] = x^3 \left[5 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right]$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} = 5 + 4(0) - 3(0) + 5(0) = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} = 5 + 4(0) - 3(0) + 5(0) = 5$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $5 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[5 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right] = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[5 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right] = +\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty}$$

3) $f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6 \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x non nul

$$f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6 = x^5 \left[\frac{-2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6}{x^5} \right] = x^5 \left[\frac{-2x^5}{x^5} + \frac{3x^3}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{6}{x^5} \right] = x^5 \left[-2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^5} \right]$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^5} = -2 + 3(0) - 2(0) + 6(0) = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^5} = -2 + 3(0) - 2(0) + 6(0) = -2$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-2 < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left[-2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^5} \right] = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left[-2 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^5} \right] = -\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = -\infty}$$

4) $f(x) = -2x^4 + 8x + 3 \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x non nul

$$f(x) = -2x^4 + 8x + 3 = x^4 \left[\frac{-2x^4 + 8x + 3}{x^4} \right] = x^4 \left[\frac{-2x^4}{x^4} + \frac{8x}{x^4} + \frac{3}{x^4} \right] = x^4 \left[-2 + \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right]$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} = -2 + 8(0) + 3(0) = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} = -2 + 8(0) + 3(0) = -2$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-2 < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left[-2 + \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right] = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left[-2 + \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right] = -\infty . \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = -\infty}$$

5) $f(x) = -6x^3 + 5x^2 - 5x + 8 \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x non nul

$$f(x) = -6x^3 + 5x^2 - 5x + 8 = x^3 \left[\frac{-6x^3 + 5x^2 - 5x + 8}{x^3} \right] = x^3 \left[-6 + \frac{5}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right]$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -6 + \frac{5}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} = -6 + 5(0) - 5(0) + 8(0) = -6 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -6 + \frac{5}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} = -6 + 5(0) - 5(0) + 8(0) = -6$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-6 < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[-6 + \frac{5}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right] = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[-6 + \frac{5}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right] = -\infty . \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = -\infty}$$

exercice 2 On considère la fonction polynôme $f : x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = (-x^2 - 2x + 8)(x + 1)^2$

1) 1-1 signe de $f(x)$ $\rightarrow$ Pour tout réel x , $(x + 1)^2 \geq 0$ et $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$\rightarrow -x^2 - 2x + 8$ est un polynôme du second degré admettant le réel 2 comme racine ($-(2)^2 - 2(2) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$).

$-x^2 - 2x + 8$ est donc factorisable par $x - 2$ et pour tout réel x , $-x^2 - 2x + 8 = (x - 2)(-x - 4)$.

Et : $-x^2 - 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(-x - 4) \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -4$

D'où le signe du produit $(-x^2 - 2x + 8)(x + 1)^2$ égal à $f(x)$

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$-x^2 - 2x + 8$	$-$ signe de a	0	$+$ signe de -a	$+$ signe de -a	$-$ signe de a, a = -1
$(x + 1)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$-$

1-2 Calculer les deux limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ (méthode détaillée)

On a : $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 = +\infty$

$\rightarrow$ avec x réel non nul, $-x^2 - 2x + 8 = x^2 \left[-1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right]$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} = -1 - 2(0) + 8(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} = -1 - 2(0) + 8(0) = -1$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-1 < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[-1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right] = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[-1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right] = -\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 - 2x + 8 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 2x + 8 = -\infty$$

Par conséquent pour l'expression produit $f(x) = (-x^2 - 2x + 8)(x + 1)^2$, on déduit avec les limites précédentes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 - 2x + 8)(x + 1)^2 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - 2x + 8)(x + 1)^2 = -\infty .$$

Ainsi : $\boxed{\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = -\infty}$

2) g est la fonction inverse de f ($g = \frac{1}{f}$).

2-1 ensemble de définition D_g de g

Comme fonction polynôme, f est définie sur $\mathbb{R}$. Par conséquent : pour tout réel x , $x \in D_g \Leftrightarrow f(x) \neq 0$

D'après 1-1 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, -1, 2\}$. Donc : $x \notin D_g \Leftrightarrow x \in \{-4, -1, 2\}$

Par conséquent : $D_g = \mathbb{R} - \{-4, -1, 2\} =]-\infty, -4[\cup]-4, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$

2-2 limites de g aux bornes de D_g

en $+\infty$ et en $-\infty$ D'après 1-2 : $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

Le théorème concernant la limite de l'inverse d'une fonction permet ensuite de déduire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ soit : } \boxed{\lim_{-\infty} g = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} g = 0}$$

remarque : ces deux limites étant égales au réel 0, l'axe (Ox) : $y = 0$ est une droite asymptote à la courbe C_g représentant la fonction g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

en -4^- et en -4^+ D'après 1-1 et 1-2 : $\lim_{-4^-} f = f(-4) = 0$ et $\begin{cases} f(x) < 0 \text{ pour } x \text{ élément de }]-\infty, -4[\\ f(x) > 0 \text{ pour } x \text{ élément de }]-4, -1[\end{cases}$

Le théorème concernant la limite de l'inverse d'une fonction permet ensuite de déduire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{1}{f(x)} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ soit : } \boxed{\lim_{-4^-} g = -\infty \text{ et } \lim_{-4^+} g = +\infty}$$

remarque : avec ces deux limites infinies, on déduit que la droite d'équation réduite $x = -4$ est asymptote à C_g .

en -1^- et en -1^+ D'après 1-1 et 1-2 : $\lim_{-1^-} f = f(-1) = 0$ et $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ pour } x \text{ élément de }]-4, -1[\\ f(x) < 0 \text{ pour } x \text{ élément de }]-1, 2[\end{cases}$

Le théorème concernant la limite de l'inverse d'une fonction permet ensuite de déduire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{f(x)} = -\infty \text{ soit : } \boxed{\lim_{-1^-} g = +\infty \text{ et } \lim_{-1^+} g = -\infty}$$

remarque : avec ces deux limites infinies, on déduit que la droite d'équation réduite $x = -1$ est asymptote à C_g .

en 2^- et en 2^+ D'après 1-1 et 1-2 : $\lim_{2^-} f = f(2) = 0$ et $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ pour } x \text{ élément de }]-1, 2[\\ f(x) < 0 \text{ pour } x \text{ élément de }]2, +\infty[\end{cases}$

Le théorème concernant la limite de l'inverse d'une fonction permet ensuite de déduire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{f(x)} = -\infty \text{ soit : } \boxed{\lim_{2^-} g = +\infty \text{ et } \lim_{2^+} g = -\infty}$$

remarque : avec ces deux limites infinies, on déduit que la droite d'équation réduite $x = 2$ est asymptote à C_g .

Deuxième Partie : avec des fonctions rationnelles

exercice 3 1) Compléter le tableau suivant en utilisant le théorème : f étant une fonction rationnelle, aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré.

l'expression donnée pour $f(x)$	rapport des termes de plus haut degré de $f(x)$	comportement de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$
1) $f(x) = \frac{5-2x}{3x+6}$	$\frac{-2x}{3x}$ soit : $-\frac{2}{3}$	$\lim_{-\infty} f = -\frac{2}{3}$ et $\lim_{+\infty} f = -\frac{2}{3}$
2) $f(x) = \frac{8x+1}{2x^2+1}$	$\frac{8x}{2x^2}$ soit : $\frac{4}{x}$	$\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$
3) $f(x) = \frac{-2x^2+3x}{x^2+6x-4}$	$\frac{-2x^2}{x^2}$ soit : -2	$\lim_{-\infty} f = -2$ et $\lim_{+\infty} f = -2$
4) $f(x) = \frac{-2x^3+7x-1}{6x-3}$	$\frac{-2x^3}{6x}$ soit : $-\frac{x^2}{3}$	$\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$
5) $f(x) = \frac{-8x^3+5x^2-2x+4}{4x^2+3x-1}$	$\frac{-8x^3}{4x^2}$ soit : $-2x$	$\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$

les éventuelles droites asymptotes à la courbe C_f représentant la fonction f dans un repère d'origine O .

1) $f(x) = \frac{5-2x}{3x+6} \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{5-2x}{3x+6} = \frac{-2x+5}{3x+6} = \frac{x \left[-2 + \frac{5}{x} \right]}{x \left[3 + \frac{6}{x} \right]} = \frac{x}{x} \times \frac{\left[-2 + \frac{5}{x} \right]}{\left[3 + \frac{6}{x} \right]} = 1 \times \frac{-2 + \frac{5}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{-2 + \frac{5}{x}}{3 + \frac{6}{x}}$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{5}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{-2 + 5(0)}{3 + 6(0)} = -\frac{2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{5}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{-2 + 5(0)}{3 + 6(0)} = -\frac{2}{3}. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\frac{2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\frac{2}{3}}$$

conséquence : ces deux limites étant égales au réel $-\frac{2}{3}$, la droite d'équation réduite $y = -\frac{2}{3}$ est une droite asymptote à C_f .

2) $f(x) = \frac{8x+1}{2x^2+1} \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{8x+1}{2x^2+1} = \frac{x \left[8 + \frac{1}{x} \right]}{x^2 \left[2 + \frac{1}{x^2} \right]} = \frac{x}{x^2} \times \frac{\left[8 + \frac{1}{x} \right]}{\left[2 + \frac{1}{x^2} \right]} = \frac{1}{x} \times \frac{8 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}}$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{8 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = 0 \times \frac{8+0}{2+0} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{8 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = 0 \times \frac{8+0}{2+0} = 0. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0}$$

conséquence : ces deux limites étant égales au réel 0 , l'axe (Ox) : $y = 0$ est une droite asymptote à la courbe C_f .

3) $f(x) = \frac{-2x^2+3x}{x^2+6x-4} \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{-2x^2+3x}{x^2+6x-4} = \frac{x^2 \left[-2 + \frac{3x}{x^2} \right]}{x^2 \left[1 + \frac{6x}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right]} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}}$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{-2 + 3(0)}{1 + 6(0) - 4(0)} = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{-2 + 3(0)}{1 + 6(0) - 4(0)} = -2. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -2}$$

conséquence : ces deux limites étant égales au réel -2 , la droite d'équation réduite $y = -2$ est une droite asymptote à C_f .

4) $f(x) = \frac{-2x^3+7x-1}{6x-3} \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{-2x^3+7x-1}{6x-3} = \frac{x^3 \left[-2 + \frac{7x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right]}{x \left[6 - \frac{3}{x} \right]} = \frac{x^3}{x} \times \frac{-2 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{3}{x}} = x^2 \times \frac{-2 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{3}{x}}$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{3}{x}} = \frac{-2 + 7(0) - (0)}{6 - 3(0)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{3}{x}} = \frac{-2 + 7(0) - (0)}{6 - 3(0)} = -\frac{1}{3}$$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $-\frac{1}{3} < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \times \frac{-2 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{3}{x}} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \frac{-2 + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 - \frac{3}{x}} = -\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty}$$

5) $f(x) = \frac{-8x^3 + 5x^2 - 2x + 4}{4x^2 + 3x - 1} \rightarrow$ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{-8x^3 + 5x^2 - 2x + 4}{4x^2 + 3x - 1} = \frac{x^3 \left[-8 + \frac{5x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right]}{x^2 \left[4 + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right]} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{-8 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = x \times \frac{-8 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{-8 + 5(0) - 2(0) + 4(0)}{4 + 3(0) - (0)} = -2; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{-8 + 5(0) - 2(0) + 4(0)}{4 + 3(0) - (0)} = -2$$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $-2 < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{-8 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{-8 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = -\infty}$$

3) comportement de $g(x)$ et $h(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$ avec : $g(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x}$ et $h(x) = -2x^3 + x^2 + 5 - \frac{2}{x^2}$

Préalable : g et h se présentent sous la forme d'une somme de deux fonctions et le théorème concernant la somme de deux fonctions est applicable en $-\infty$ et en $+\infty$ dans chacun des cas

1) $g(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x}$ On a : $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$ car $2 > 0$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 3(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 3(0) = 0$

Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet de déduire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 1 + \frac{3}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 + \frac{3}{x} = +\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} g = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} g = +\infty}$$

2) $g(x) = -2x^3 + x^2 + 5 - \frac{2}{x^2} \rightarrow$ avec x réel non nul, $-2x^3 + x^2 + 5 = x^3 \left[-2 + \frac{x^2}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right] = x^3 \left[-2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} \right]$

D'autre part : $\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} = -2 + (0) + 5(0) = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} = -2 + (0) + 5(0) = -2$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet de déduire (avec $-2 < 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[-2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} \right] = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[-2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} \right] = -\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + x^2 + 5 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 + x^2 + 5 = -\infty$$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x^2} = -2(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2} = -2(0) = 0$

Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet ensuite de déduire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + x^2 + 5 - \frac{2}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 + x^2 + 5 - \frac{2}{x^2} = -\infty. \text{ Ainsi : } \boxed{\lim_{-\infty} h = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} h = -\infty}$$

exercice 4 f est une fonction rationnelle représentée dans un repère d'origine O par une courbe notée C_f .

Calculer les limites demandées dans le tableau suivant et signaler les éventuelles droites asymptotes à C_f

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut justifier
1) $f(x) = \frac{5}{3x+6}$	$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$	$\lim_{1^-} f = \frac{5}{9}$ puis $\lim_{-2^-} f = -\infty$ et $\lim_{-2^+} f = +\infty$
2) $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4}$	$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$	$\lim_{1^-} f = -\infty$ et $\lim_{1^+} f = +\infty$ puis $\lim_{-4^-} f = -\infty$ et $\lim_{-4^+} f = +\infty$
3) $f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^2 - 36x + 36}$	$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$	$\lim_{\sqrt{3}} f = 1 + \frac{5}{9}\sqrt{3}$ puis $\lim_{2^-} f = +\infty$ et $\lim_{2^+} f = +\infty$
4) $f(x) = -4x + 1 - \frac{2}{x-3}$	$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$	$\lim_{3^-} f = +\infty$ et $\lim_{3^+} f = -\infty$
5) $f(x) = -2x^3 + x + \frac{2}{3x^2}$	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\lim_{0^-} f = +\infty$ et $\lim_{0^+} f = +\infty$

deux types de calcul de limites : **type 1** : $\lim_{x_0} f$ avec x_0 élément de D_f . On utilise $\lim_{x_0} f = f(x_0)$

type 2 : $\lim_{x_0^-} f$ et $\lim_{x_0^+} f$ avec x_0 non élément de D_f et le tableau de situation suivant :

$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} N(x_0)$ réel non nul
$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} D(x_0) = 0$

Dans ce cas : $\lim_{x_0^-} f$ et $\lim_{x_0^+} f$ sont infinies et la courbe C_f admet la droite d'équation réduite $x = x_0$ comme droite asymptote .

1) $f(x) = \frac{5}{3x+6}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ (pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$)

$\lim_1 f = \frac{5}{9}$ 1 est élément de D_f . Comme fonction rationnelle , f est continue en tout réel de son ensemble de définition .

Donc : $\lim_1 f = f(1) = \frac{5}{3(1)+6} = \frac{5}{9}$

$\lim_{-2^-} f = -\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite D	situation	$N(x) = 5$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -2} 5$
$\lim_{-2^+} f = +\infty$	d'équation : $x = -2$ est une droite asymptote à la courbe C_f .	$x \rightarrow -2$	$D(x) = 3x+6$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -2} 0$

Pour la suite , on utilise pour x élément de D_f : $f(x) = \frac{5}{3x+6} = \frac{5}{3(x+2)} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{x+2}$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x+2} = -\infty$ car $x < -2$ entraîne $x+2 < 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$ car $x > -2$ entraîne $x+2 > 0$

D'autre part : $\frac{5}{3} > 0$. Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{5}{3} \times \frac{1}{x+2} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{5}{3} \times \frac{1}{x+2} = +\infty$ soit : $\lim_{-2^-} f = -\infty$ et $\lim_{-2^+} f = +\infty$

2) $f(x) = \frac{-2x^2+5x}{x^2+3x-4}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$ (pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-4$ ou $x=1$)

$\lim_{-4^-} f = -\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la	situation	$N(x) = -2x^2+5x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -4} -52$
$\lim_{-4^+} f = +\infty$	droite $D_1 : x = -4$ est une droite asymptote à C_f .	$x \rightarrow -4$	$D(x) = x^2+3x-4$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -4} 0$

Pour la suite on utilise pour x élément de D_f , $f(x) = \frac{-2x^2+5x}{x^2+3x-4} = \frac{-2x^2+5x}{(x-1)(x+4)} = \frac{-2x^2+5x}{x-1} \times \frac{1}{x+4}$

D'autre part : 1) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{-2x^2+5x}{x-1} = \frac{-2(-4)^2+5(-4)}{(-4)-1} = \frac{-32-20}{-5} = \frac{52}{5}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{1}{x+4} = -\infty$ car $x < -4$ entraîne $x+4 < 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{1}{x+4} = +\infty$ car $x > -4$ entraîne $x+4 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $\frac{52}{5} > 0$) :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{-2x^2+5x}{x-1} \times \frac{1}{x+4} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{-2x^2+5x}{x-1} \times \frac{1}{x+4} = +\infty$ soit : $\lim_{-4^-} f = -\infty$ et $\lim_{-4^+} f = +\infty$.

$\lim_{1^-} f = -\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la	situation	$N(x) = -2x^2+5x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3$
$\lim_{1^+} f = +\infty$	droite $D_2 : x = 1$ est une droite asymptote à C_f .	$x \rightarrow 1$	$D(x) = x^2+3x-4$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

Pour la suite on utilise pour x élément de D_f , $f(x) = \frac{-2x^2+5x}{x^2+3x-4} = \frac{-2x^2+5x}{(x-1)(x+4)} = \frac{-2x^2+5x}{x+4} \times \frac{1}{x-1}$

D'autre part : 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2+5x}{x+4} = \frac{-2(1)^2+5(1)}{(1)+4} = \frac{-2+5}{5} = \frac{3}{5}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ car $x < 1$ entraîne $x-1 < 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ car $x > 1$ entraîne $x-1 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $\frac{3}{5} > 0$) :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-2x^2+5x}{x+4} \times \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-2x^2+5x}{x+4} \times \frac{1}{x-1} = +\infty$ soit : $\lim_{1^-} f = -\infty$ et $\lim_{1^+} f = +\infty$.

$$3) f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^2 - 36x + 36}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

. Pour tout réel x , $9x^2 - 36x + 36 = 9(x^2 - 4x + 4) = 9(x - 2)^2$

Donc : $x \notin D_f \Leftrightarrow 9x^2 - 36x + 36 \Leftrightarrow 9(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$\lim_{\sqrt{3}} f = 1 + \frac{5}{9}\sqrt{3} \quad \sqrt{3} \text{ est élément de } D_f. \text{ et pour tout réel } x, f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^2 - 36x + 36} = \frac{x^2 - x}{9(x - 2)^2}.$$

Comme fonction rationnelle, f est continue en tout réel de son ensemble de définition. Donc : $\lim_{\sqrt{3}} f = f(\sqrt{3})$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})}{9(\sqrt{3} - 2)^2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{9(3 - 4\sqrt{3} + 4)} = \frac{3 - \sqrt{3}}{9(7 - 4\sqrt{3})} = \frac{(3 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})}{9(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{21 + 12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 12}{9[(7)^2 - (4\sqrt{3})^2]} = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{9(49 - 48)}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{9} = 1 + \frac{5}{9}\sqrt{3}. \text{ Ainsi : } \lim_{\sqrt{3}} f = 1 + \frac{5}{9}\sqrt{3}$$

$\lim_{2^-} f = +\infty$	avec ces limites infinies, on peut affirmer que la
$\lim_{2^+} f = +\infty$	droite $D : x = 2$ est une droite asymptote à C_f .

situation
 $x \rightarrow 2$

$N(x) = x^2 - x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 2$
$D(x) = 9x^2 - 36x + 36$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$

Pour la suite on utilise pour x élément de D_f , $f(x) = \frac{x^2 - x}{9x^2 - 36x + 36} = \frac{x^2 - x}{9(x - 2)^2} = \frac{x^2 - x}{9} \times \frac{1}{(x - 2)^2}$

$$\text{D'autre part : } 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{9} = \frac{(2)^2 - (2)}{9} = \frac{2}{9}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty \text{ car } x \neq 2 \text{ entraîne } (x - 2)^2 > 0$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $\frac{2}{9} > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{9} \times \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{9} \times \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty \text{ soit : } \lim_{2^-} f = +\infty \text{ et } \lim_{2^+} f = +\infty$$

$$4) f(x) = -4x + 1 - \frac{2}{x - 3}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

. En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$\lim_{3^-} f = +\infty$	avec ces limites infinies, on peut affirmer que la
$\lim_{3^+} f = -\infty$	droite $D : x = 3$ est une droite asymptote à C_f .

$f(x)$ est la somme de $-4x + 1$ et de $-\frac{2}{x - 3}$. D'autre part :

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} -4x + 1 = -4(3) + 1 = -11$$

$$2) -\frac{2}{x - 3} = -2 \times \frac{1}{x - 3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} = -\infty \text{ car } x < 3 \text{ entraîne } x - 3 < 0; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} = +\infty \text{ car } x > 3 \text{ entraîne } x - 3 > 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 3} -2 \times \frac{1}{x - 3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2 \times \frac{1}{x - 3} = -\infty \text{ car } -2 < 0 \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{2}{x - 3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{2}{x - 3} = -\infty$$

Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet ensuite de déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 3} -4x + 1 - \frac{2}{x - 3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -4x + 1 - \frac{2}{x - 3} = -\infty. \lim_{3^-} f = +\infty \text{ et } \lim_{3^+} f = -\infty$$

$$5) f(x) = -2x^3 + x + \frac{2}{3x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

. En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim_{0^-} f = +\infty$	avec ces limites infinies, on peut affirmer que
$\lim_{0^+} f = +\infty$	l'axe $(Oy) : x = 0$ est une droite asymptote à C_f .

$f(x)$ est la somme de $-2x^3 + x$ et de $\frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x^2}$.

$$\text{D'autre part : } 1) \lim_{x \rightarrow 0} -2x^3 + x = -2(0)^3 + 0 = 0$$

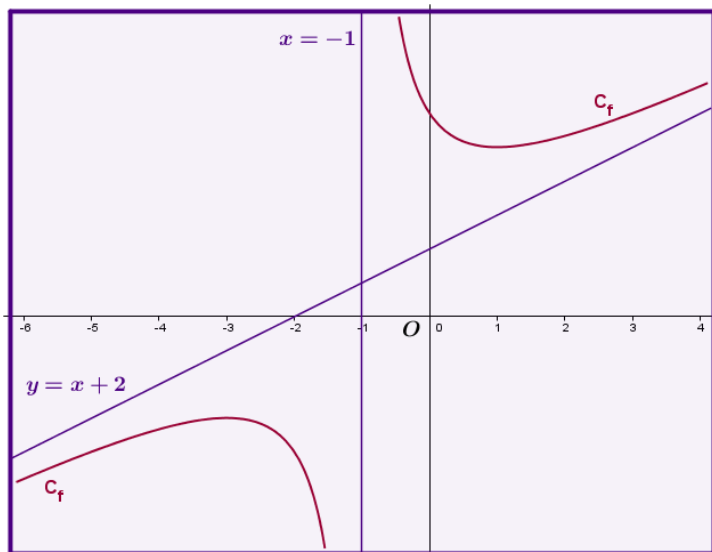
$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ car } x \neq 0 \text{ entraîne } x^2 > 0 \text{ et avec } \frac{2}{3} > 0 \text{ on déduit : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x^2} = +\infty$$

Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet ensuite d'obtenir :

$$\lim_{x \rightarrow 0} -2x^3 + x + \frac{2}{3x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -2x^3 + x + \frac{2}{3x^2} = +\infty. \text{ Ainsi : } \lim_{0^-} f = +\infty \text{ et } \lim_{0^+} f = +\infty$$

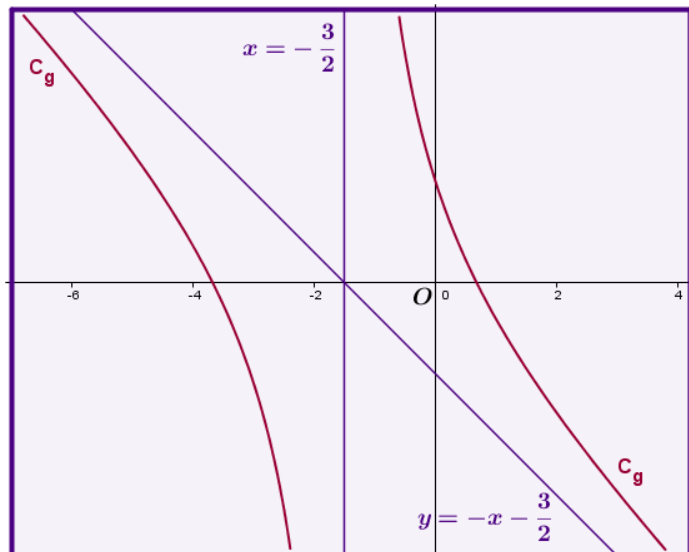
exercice 5

$$f : x \mapsto f(x) \text{ avec : } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$$



$$g : x \mapsto g(x) \text{ avec : } g(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 5}{2x + 3}$$

page 8 / 27



1) fonction $f : x \mapsto f(x)$ avec $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ 1-1 $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

une autre écriture pour $f(x)$ x désigne un réel de D_f . On a :

$$ax + b + \frac{c}{x + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x + 1} = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}$$

$$\text{Donc : } f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1} \Leftrightarrow_{x+1 \neq 0 \text{ pour } x \in D_f} x^2 + 3x + 6 = ax^2 + (a + b)x + b + c$$

Deux polynômes de même degré sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients. D'où :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 6 = ax^2 + (a + b)x + b + c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 3 \\ b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - a \\ c = 6 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - 1 \\ c = 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ainsi : pour tout réel x de D_f , $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x + 1}$

1-2 limites de f aux bornes de D_f $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ Je choisis d'utiliser la forme suivante pour $f(x)$: $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x + 1} = x + 2 + 4 \left(\frac{1}{x + 1} \right)$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 1} = 4(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 4(0) = 0$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$.

Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet de déduire :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 + \frac{4}{x + 1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 + \frac{4}{x + 1} = +\infty$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$	avec ces limites infinies, on peut affirmer que la
$\lim_{x \rightarrow -1^+} f = +\infty$	droite $D : x = -1$ est une droite asymptote à C_f .

Je choisis encore d'utiliser la forme suivante pour $f(x)$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x + 1} = x + 2 + 4 \left(\frac{1}{x + 1} \right)$$

On a : $\frac{4}{x + 1} = 4 \left(\frac{1}{x + 1} \right)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x + 1} = -\infty$ car $x < -1$ entraîne $x + 1 < 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x + 1} = +\infty$ car $x > -1$ entraîne $x + 1 > 0$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{4}{x + 1} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{4}{x + 1} = +\infty$ car $4 > 0$. D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -1} x + 2 = -1 + 2 = 1$

Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet ensuite de déduire :

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x + 2 + \frac{4}{x + 1} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x + 2 + \frac{4}{x + 1} = +\infty$ soit : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 2) = 0 .$$

On a : pour tout réel x , $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}$. Donc : pour tout réel x , $f(x) - (x + 2) = \frac{4}{x+1}$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ (prouvé en **1-2**) .

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} = 0$

La droite $\Delta : y = x + 2$ répond bien à la définition d'une droite asymptote à la courbe C_f .

Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite $\Delta : y = x + 2$ revient à comparer les ordonnées

de deux points de même abscisse x ($x \in D_f$)

$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{l'un , noté M , situé sur } C_f \text{ et d'ordonnée : } y_M = f(x) \\ \rightarrow \text{l'autre , noté P , situé sur } \Delta \text{ et d'ordonnée : } y_P = x + 2 \end{array} \right.$

Avec x élément de D_f soit x distinct de -1 :

$y_M - y_P = f(x) - (x + 2) = \frac{4}{x+1}$. D'où le tableau ci-contre :

$x \in D_f$	$-\infty$	$-1 \notin D_f$	$+\infty$
$x + 1$	—		+
$y_M - y_P = \frac{4}{x+1}$ $4 > 0$	—		+
position de C_f par rapport à Δ	$y_M < y_P$ C_f en dessous de Δ		$y_M > y_P$ C_f au dessus de Δ

2) fonction $g : x \rightarrow g(x)$ avec $g(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 5}{2x + 3}$ **2-1** $D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_g \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

une autre écriture pour $g(x)$ x désigne un réel de D_g . On a :

$$ax + b + \frac{c}{2x + 3} = \frac{(ax + b)(2x + 3) + c}{2x + 3} = \frac{2ax^2 + 3ax + 2bx + 3b + c}{2x + 3} = \frac{2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b + c}{2x + 3} . \text{ Donc :}$$

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - 6x + 5}{2x + 3} = \frac{2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b + c}{2x + 3} \Leftrightarrow_{2x+3 \neq 0 \text{ pour } x \in D_g} -2x^2 - 6x + 5 = 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b + c$$

Deux polynômes de même degré sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients . D'où :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}, -2x^2 - 6x + 5 = 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b + c) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2 \\ 3a + 2b = -6 \\ 3b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2b = -6 - 3a \\ c = 5 - 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2b = -6 - 3(-1) \\ c = 5 - 3b \end{cases} \\ (\forall x \in \mathbb{R}, -2x^2 - 6x + 5 = 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b + c) &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2b = -3 \\ c = 5 - 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = 5 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{19}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi : $\left[\text{Pour tout réel } x \text{ de } D_g , g(x) = -x - \frac{3}{2} + \frac{19}{2(2x + 3)} \right]$

1-2 limites de f aux bornes de D_g $D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2} \right\} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[$. Je choisis d'utiliser : $g(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 5}{2x + 3}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$ $\rightarrow$ une autre expression pour $g(x)$ avec x élément non nul de D_g

On a : $g(x) = \frac{-2x^2 - 6x + 5}{2x + 3} = \frac{x^2 \left[-2 - \frac{6x}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right]}{x \left[2 + \frac{3}{x} \right]} = \frac{x^2}{x} \times \frac{-2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = x \times \frac{-2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}}$

$\rightarrow$ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-2 - 6(0) + 5(0)}{2 + 3(0)} = \frac{-2}{2} = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-2 - 6(0) + 5(0)}{2 + 3(0)} = -1$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet de déduire :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{-2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{-2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{3}{x}} = -\infty$ car : $-1 < 0$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f = +\infty$	avec ces limites infinies , on peut affirmer que la droite $D : x = -\frac{3}{2}$ est une droite asymptote à C_g .
---	---

Pour la suite , j'utilise : $g(x) = (-2x^2 - 6x + 5) \times \frac{1}{2x+3}$

et le tableau de signe de $2x+3$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
2x+3	signe de -a —	0	signe de a , a = 2 +

situation
 $x \rightarrow -\frac{3}{2}$

$N(x) = -2x^2 - 6x + 5$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{19}{2}$
$D(x) = 2x + 3$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{3}{2}} 0$

On a: $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (-2x^2 - 6x + 5) = -2 \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = -2 \left(\frac{9}{4}\right) + 9 + 5 = -\frac{9}{2} + 14 = \frac{19}{2}$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} \frac{1}{2x+3} = -\infty$ car $x < -\frac{3}{2}$ entraîne $2x+3 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} \frac{1}{2x+3} = +\infty$ car $x > -\frac{3}{2}$ entraîne $2x+3 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $\frac{19}{2} > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} (-2x^2 - 6x + 5) \times \frac{1}{2x+3} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} (-2x^2 - 6x + 5) \times \frac{1}{2x+3} = +\infty$$

soit : $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} g = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} g = +\infty$

2-3 Pour justifier que la droite $\Delta : y = -x - \frac{3}{2}$ est une droite asymptote à la courbe C_g il suffit de prouver :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = 0 .$$

D'après **2-1** : Pour tout réel x de D_g , $g(x) = -x - \frac{3}{2} + \frac{19}{2(2x+3)}$.

Donc : pour tout réel x , $f(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = \frac{19}{2(2x+3)} = \frac{19}{2} \times \frac{1}{2x+3}$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+3 = +\infty$ car $2 > 0$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x+3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{19}{2(2x+3)} = \frac{19}{2}(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{19}{2(2x+3)} = \frac{19}{2}(0) = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{19}{2(2x+3)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{19}{2(2x+3)} = 0$

La droite $\Delta : y = -x - \frac{3}{2}$ répond bien à la définition d'une droite asymptote à la courbe C_g .

Etudier la position relative de la courbe C_g et de la droite $\Delta : y = -x - \frac{3}{2}$ revient à comparer les ordonnées de deux points

de même abscisse x ($x \in D_g$)

→ l'un , noté M , situé sur C_g et d'ordonnée : $y_M = g(x)$

→ l'autre , noté P , situé sur Δ , d'ordonnée : $y_P = -x - \frac{3}{2}$

Avec x élément de D_g soit x distinct de $-\frac{3}{2}$:

$$y_M - y_P = g(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = \frac{19}{2(2x+3)} .$$

D'où le tableau ci-contre :

$x \in D_g$	$-\infty$	$-\frac{3}{2} \notin D_g$	$+\infty$
2x + 3	—		+
$y_M - y_P = \frac{19}{2(x+1)}$ $\frac{19}{2} > 0$	—		+
position de C_g par rapport à Δ	$y_M < y_P$ C_g en dessous de Δ		$y_M > y_P$ C_g au dessus de Δ

exercice 6

1) On considère $f : x \mapsto f(x)$ avec : $f(x) = \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x^2 + x - 6}$

page 11 / 27

1-1 $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{3}{2} \right\}$.

Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$

-2 est une racine de $2x^2 + x - 6$ car : $2(-2)^2 + (-2) - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$.

Donc $2x^2 + x - 6$ est factorisable par $x + 2$ et pour tout réel x :

$$2x^2 + x - 6 = (x + 2)(2x - 3)$$

D'où : $x \notin D_f \Leftrightarrow (x + 2)(2x - 3) = 0$

puis $x \notin D_f \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{3}{2}$

limites de f aux bornes de D_f

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{3}{2} \right\} =]-\infty, -2[\cup]-2, \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

→ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x^2 + x - 6} = \frac{x^3 \left[4 - \frac{13x}{x^3} + \frac{13}{x^3} \right]}{x^2 \left[2 + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2} \right]} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{4 - \frac{13}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = x \times \frac{4 - \frac{13}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

→ déduction de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{13}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{4 - 13(0) + 13(0)}{2 + (0) - 6(0)} = \frac{4}{2} = 2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{13}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{4 - 13(0) + 13(0)}{2 + (0) - 6(0)} = 2$$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $2 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{4 - \frac{13}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{4 - \frac{13}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty$	avec ces limites infinies, on peut affirmer que la
$\lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty$	droite $D_1 : x = -2$ est une droite asymptote à C_f .

situation
 $x \rightarrow -2$

$N(x) = 4x^3 - 13x + 13$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -2} 7$
$D(x) = 2x^2 + x - 6$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -2} 0$

$$\text{Pour la suite j'utilise : } f(x) = \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x^2 + x - 6} = \frac{4x^3 - 13x + 13}{(x + 2)(2x - 3)} = \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x - 3} \times \frac{1}{x + 2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x - 3} = \frac{4(-2)^3 - 13(-2) + 13}{2(-2) - 3} = \frac{-32 + 26 + 13}{-4 - 3} = \frac{7}{-7} = -1$$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x + 2} = -\infty$ car $x < -2$ entraîne $x + 2 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x + 2} = +\infty$ car $x > -2$ entraîne $x + 2 > 0$

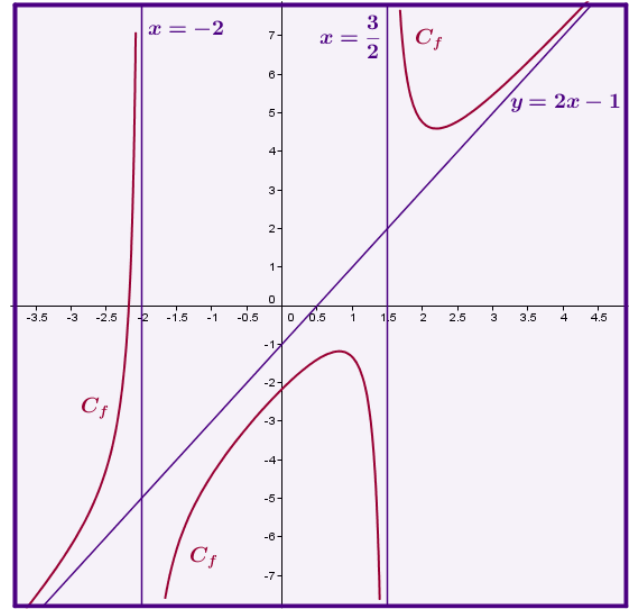
Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $-1 < 0$) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x - 3} \times \frac{1}{x + 2} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x - 3} \times \frac{1}{x + 2} = -\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f = -\infty$	avec ces limites infinies, on peut affirmer que la
$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f = +\infty$	droite $D : x = \frac{3}{2}$ est une droite asymptote à C_g .

situation
 $x \rightarrow \frac{3}{2}$

$N(x) = 4x^3 - 13x + 13$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{3}{2}} 7$
$D(x) = 2x^2 + x - 6$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{3}{2}} 0$



Pour la suite j'utilise : $f(x) = \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x^2 + x - 6} = \frac{4x^3 - 13x + 13}{(x+2)(2x-3)} = \frac{4x^3 - 13x + 13}{x+2} \times \frac{1}{2x-3}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^3 - 13x + 13}{x+2} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 13\left(\frac{3}{2}\right) + 13}{\left(\frac{3}{2}\right) + 2} = \frac{\frac{27}{2} - \frac{39}{2} + \frac{26}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{14}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{14}{7} = 2$$

D'autre part : en utilisant le tableau de signe de $2x - 3$ on a : $x < -\frac{3}{2}$ entraîne $2x + 3 < 0$ et $x > -\frac{3}{2}$ entraîne $2x + 3 > 0$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$	signe de $-a$ $-$	0	signe de a , $a = 2$ $+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{1}{2x-3} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{1}{2x-3} = +\infty$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet donc de déduire (avec $2 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^3 - 13x + 13}{x+2} \times \frac{1}{2x-3} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^3 - 13x + 13}{x+2} \times \frac{1}{2x-3} = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f = +\infty$$

1-2 Les réels a , b , c et d tels que : $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{2x-3}$

x est un réel de D_f . On note $E(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{2x-3}$. On a :

$$E(x) = \frac{(ax+b)(x+2)(2x-3) + c(2x-3) + d(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{(ax+b)(2x^2+x-6) + c(2x-3) + d(x+2)}{2x^2+x-6}$$

$$E(x) = \frac{2ax^3 + ax^2 - 6ax + 2bx^2 + bx - 6b + 2cx - 3c + dx + 2d}{2x^2+x-6} = \frac{2ax^3 + (a+2b)x^2 + (-6a+b+2c+d)x + (-6b-3c+2d)}{2x^2+x-6}$$

$$\text{Par conséquent : } f(x) = E(x) \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 13x + 13}{2x^2+x-6} = \frac{2ax^3 + (a+2b)x^2 + (-6a+b+2c+d)x + (-6b-3c+2d)}{2x^2+x-6}$$

$$f(x) = E(x) \Leftrightarrow 4x^3 - 13x + 13 = 2ax^3 + (a+2b)x^2 + (-6a+b+2c+d)x + (-6b-3c+2d) \quad (2x^2+x-6 \neq 0 \text{ pour } x \in D_f)$$

Deux polynômes de degré trois sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 13x + 13 = 2ax^3 + (a+2b)x^2 + (-6a+b+2c+d)x + (-6b-3c+2d)) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ a + 2b = 0 \\ -6a + b + 2c + d = -13 \\ -6b - 3c + 2d = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b = -2 \\ 2c + d = 6a - b - 13 \\ -3c + 2d = 6b + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ 2c + d = 12 - (-1) - 13 \\ -3c + 2d = -6 + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ 2c + d = 0 \\ -3c + 2d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ d = -2c \\ -3c + 2(-2c) = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ d = -2c \\ -7c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ d = -2c \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ d = 2 \\ c = -1 \end{cases} \text{ . Ainsi : } \boxed{\text{pour tout réel } x \text{ de } D_f, f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-3}}$$

1-3 Pour justifier que la courbe C_f possède la droite $\Delta : y = 2x - 1$ comme droite asymptote il suffit de prouver

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = 0.$$

$$\text{On a prouvé en 1-2 : pour tout réel } x \text{ de } D_f, f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-3} \text{ donc : } f(x) - (2x - 1) = -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-3}$$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x+2 = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x+2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x-3 = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x-3 = +\infty \text{ car } 2 > 0 \text{ et } \frac{1}{2x-3} = 2 \times \frac{1}{2x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-3} = -(0) + 2(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-3} = -(0) + 2(0) = 0$$

$$\text{Soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = 0.$$

La droite $\Delta : y = 2x - 1$ répond bien à la définition d'une droite asymptote à la courbe C_f .

Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite $\Delta : y = 2x - 1$ revient à comparer les ordonnées de deux points de même abscisse x ($x \in D_f$) :

$$\begin{cases} \rightarrow \text{l'un, noté M, situé sur } C_f \text{ et d'ordonnée : } y_M = f(x) \\ \rightarrow \text{l'autre, noté P, situé sur } \Delta \text{ et d'ordonnée : } y_P = 2x - 1 \end{cases}$$

Avec x élément de D_f soit x distinct de -2 et de $\frac{3}{2}$:

$$y_M - y_P = f(x) - (2x - 1) = -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-3} = \frac{-(2x-3) + 2(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{-2x+3+2x+4}{2x^2+x-6} = \frac{7}{2x^2+x-6}$$

7 étant strictement positif, le signe de $\frac{7}{2x^2+x-6}$

(qui est égal à $y_M - y_P$) est celui de $2x^2 + x - 6$

pour x élément de D_f . D'où la discussion suivante :

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2 + x - 6$	signe de a +	0	signe de -a -	signe de a, a=2 +

1^{er} cas : $x \in]-\infty, -2[\cup \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$. D'après ce qui précède : $2x^2 + x - 6 > 0$ et donc $y_M - y_P > 0$ soit : $y_M > y_P$. Les points

C_f ayant une abscisse x strictement inférieure à -2 ou strictement supérieure à $\frac{3}{2}$ sont situés au dessus de $\Delta : y = 2x - 1$.

2^{ème} cas : $x \in \left] -2, \frac{3}{2} \right[$. D'après ce qui précède : $2x^2 + x - 6 < 0$ et donc $y_M - y_P < 0$ soit : $y_M < y_P$.

Les points de C_f ayant une abscisse x strictement comprise entre -2 et $\frac{3}{2}$ sont situés en dessous de Δ .

Troisième Partie : avec des fonctions utilisant des radicaux

exercice 7 Calculer les limites indiquées dans le tableau suivant

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut étudier
1) $f(x) = \sqrt{2x-5}$	$D_f = \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[$	$\lim_{+\infty} f = +\infty$
2) $x^2 + 2\sqrt{x}$	$D_f = \mathbb{R}^+$	$\lim_{+\infty} f = +\infty$
3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{2x-1}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$	$\lim_{-\infty} f = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{+\infty} f = \frac{1}{2}$
4) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = +\infty$
5) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$	$D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$	$\lim_{+\infty} f = 1$ puis $\lim_{1^+} f = +\infty$
6) $f(x) = \sqrt{\frac{9x^2+5}{x^2+1}}$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim_{-\infty} f = 3$
7) $f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2(2x+7)}}{3x^2+9x-12}$	$D_f = \left[-\frac{7}{2}, +\infty \right[- \{1\}$	$\lim_{1^+} f = \frac{1}{5}$ et $\lim_{1^-} f = -\frac{1}{5}$

un rappel des outils

→ Pour tout réel X , $\sqrt{X^2} = |X|$

→ pour tout réel x , $\sqrt{u(x)}$ est défini si et seulement si : $u(x)$ est défini en étant positif

→ lorsque **f est du type** : $x \rightarrow \sqrt{u(x)}$ et que l'on demande $\lim_{?} f$ avec ? symbolisant un réel x_0 de D_f ou $-\infty$ ou $+\infty$

on peut suivre la démarche suivante :

1) examiner le comportement de $u(x)$ au voisinage de ? (utiliser éventuellement les techniques concernant les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles) .

2) utiliser le comportement trouvé pour $u(x)$ et les limites de $X \mapsto \sqrt{X}$ pour déduire $\lim f$. Trois cas sont possibles :

1^{er} cas : $\lim_{x \rightarrow ?} u(x) = a$ avec $a > 0$. **Alors :** $\lim_{?} f = \lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow a} \sqrt{X} = \sqrt{a}$ $\left(\begin{array}{l} \overset{?}{X \rightarrow a} \text{ codifie } u(x) \text{ tend vers } a \\ \text{lorsque } x \text{ tend vers ?} \end{array} \right)$

2^{ème} cas : $\lim_{x \rightarrow ?} u(x) = 0$ avec $u(x) > 0$. **Alors :** $\lim_{?} f = \lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{u(x)} = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \sqrt{X} = \sqrt{0} = 0$

3^{ème} cas : $\lim_{x \rightarrow ?} u(x) = +\infty$. **Alors :** $\lim_{?} f = \lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

$$1) f(x) = \sqrt{2x-5}$$

$$D_f = \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[. \text{ Pour tout réel } x, x \in D_f \Leftrightarrow 2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow_{2>0} x \geq \frac{5}{2}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x-5 = +\infty$ car $2 > 0$ Donc en posant $X = 2x-5$ on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x-5} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Ainsi : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

$$2) f(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ . \text{ Pour tout réel } x, x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$$

$\lim_{+\infty} f = +\infty$ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \sqrt{x} = +\infty$ soit : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{2x-1}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} . \text{ Pour tout réel } x, x^2 \geq 0 \text{ donc } \sqrt{x^2} \text{ est défini et : } x \in D_f \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{-\infty} f = -\frac{1}{2} ; \lim_{+\infty} f = +\frac{1}{2} \text{ Avec } x \text{ réel non nul de } D_f, f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{2x-1} = \frac{|x|}{2x-1} \text{ car pour tout réel } x : \sqrt{x^2} = |x| .$$

Au voisinage de $-\infty$, on peut supposer $x < 0$ et $|x| = -x$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{|x|}{2x-1} = \frac{-x}{2x-1} = \frac{-x}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{-1}{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{-\infty} f = -\frac{1}{2}$$

Au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x > 0$ et $|x| = x$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{|x|}{2x-1} = \frac{x}{2x-1} = \frac{x}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{+\infty} f = \frac{1}{2}$$

$$4) f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$$

$$D_f = \mathbb{R} . \text{ Pour tout réel } x, x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

Le discriminant Δ de $4x^2 + 2x + 1$ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(4)(1) = 4 - 16 = -12$.

Δ étant strictement négatif, $4x^2 + 2x + 1$ n'admet pas de racine et est de signe constant sur $\mathbb{R}$: celui de son coefficient dominant a égal à 4. Donc pour tout réel x , $4x^2 + 2x + 1 > 0$ et $x \in D_f$ est vrai.

$$\lim_{-\infty} f = +\infty ; \lim_{+\infty} f = +\infty \quad f(x) \text{ est de la forme } \sqrt{u(x)} \text{ en posant : } u(x) = 4x^2 + 2x + 1$$

→ comportement de $u(x)$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$. Avec x non nul, $u(x) = 4x^2 + 2x + 1 = x^2 \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 .$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 4 + 2(0) + 0 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 4 + 2(0) + 0 = 4$$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty .$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet d'obtenir avec $4 > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty .$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$. En posant $X = u(x)$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty .$$

$$5) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[. \text{ En effet : }$$

Pour tout réel x ,

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

En utilisant le tableau de signe de $\frac{x+1}{x-1}$, on déduit :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	signe de -a -	0	signe de a, a=1 +	+
$x-1$	-	signe de -a -	0	signe de a, a=1 +
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	-	+

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = 1} \quad f(x) \text{ est de la forme } \sqrt{u(x)} \text{ en posant : } u(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

→ comportement de $u(x)$ au voisinage de $+\infty$. Avec x non nul et distinct de 1 :

$$u(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} . \text{ D'autre part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 . \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. En posant $X = u(x)$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1 . \text{ Ainsi : } \lim_{+\infty} f = 1 .$$

$$\boxed{\lim_{1^+} f = +\infty} \quad f(x) \text{ est de la forme } \sqrt{u(x)} \text{ en posant : } u(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

→ comportement de $u(x)$ au voisinage de 1^+ . Avec x strictement supérieur à 1 : $u(x) = \frac{x+1}{x-1} = (x+1) \times \frac{1}{x-1}$.

$$\text{D'autre part : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ car } x < 1 \text{ entraîne } x-1 > 0 ; \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 1+1 = 2$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x+1) \times \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ (} 2 > 0 \text{) soit : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} u(x) = +\infty$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 1^+ . En posant $X = u(x)$ on obtient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty . \text{ Ainsi : } \lim_{1^+} f = +\infty$$

$$\underline{6) f(x) = \sqrt{\frac{9x^2+5}{x^2+1}}} \quad \boxed{D_f = \mathbb{R}} . \text{ Pour tout réel } x , x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1 \neq 0 \text{ et } \frac{9x^2+5}{x^2+1} \geq 0 .$$

D'autre part : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ entraîne $\begin{cases} \text{avec } 9 > 0 : 9x^2 \geq 0 \text{ puis } 9x^2+5 \geq 5 \text{ et donc } 9x^2+5 > 0 \\ x^2+1 \geq 1 \text{ et donc } x^2+1 > 0 \end{cases}$

Par conséquent : $\frac{9x^2+5}{x^2+1}$ est défini pour tout réel x ($x^2+1 > 0$ donc $x^2+1 \neq 0$) en étant strictement positif (comme quotient ayant ses numérateur et dénominateur strictement positifs) .

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = 3} \quad f(x) \text{ est de la forme } \sqrt{u(x)} \text{ en posant : } u(x) = \frac{9x^2+5}{x^2+1}$$

→ comportement de $u(x)$ au voisinage de $+\infty$. Avec x non nul et distinct de 1 :

$$u(x) = \frac{9x^2+5}{x^2+1} = \frac{x^2 \left(9 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{9 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} . \text{ Or : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 . \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{9+5(0)}{1+0} = 9$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. En posant $X = u(x)$ on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow 9} \sqrt{X} = \sqrt{9} = 3 . \text{ Ainsi : } \lim_{+\infty} f = 3 .$$

$$\underline{7) f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2(2x+7)}}{3x^2+9x-12}} \quad \boxed{D_f = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right] - \{1\}} . \text{ Pour tout réel } x , x \in D_f \Leftrightarrow 3x^2+9x-12 \neq 0 \text{ et } (x-1)^2(2x+7) \geq 0 .$$

1 est une racine de $3x^2+9x-12$ car :

$$3(1)^2+9(1)-12=3+9-12=0$$

Donc $3x^2+9x-12$ est factorisable par $x-1$ et

$$\text{pour tout réel } x , 3x^2+9x-12 = (x-1)(3x+12)$$

$$\text{d'où : } 3x^2+9x-12=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } 3x+12=0$$

$$\text{soit : } 3x^2+9x-12=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-4$$

En utilisant ce qui précède et le tableau de signe de $(x-1)^2(2x+7) \geq 0$ on déduit pour D_f :

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ et } x \neq -4) \text{ et } x \in \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right] - \{1\} \text{ car : } 1 \in \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right] \text{ et } -4 \notin \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right]$$

$$\text{D'où le résultat : } D_f = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right] - \{1\}$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$2x+7$	signe de -a -	0	signe de a , a=2 +	+
$(x-1)^2(2x+7)$	-	0	+	+

$\lim_{1^-} f = +\infty$ $\lim_{1^+} f = -\infty$	situation $x \rightarrow 1$	$N(x) = \sqrt{(x-1)^2(2x+7)}$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$
		$D(x) = 3x^2 + 9x - 12$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

→ une autre expression pour $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2(2x+7)}}{3x^2 + 9x - 12} = \frac{\sqrt{(x-1)^2} \sqrt{2x+7}}{(x-1)(3x+12)} \quad (\text{D'après l'étude de } D_f : 2x+7 \geq 0 \text{ et } 3x^2 + 9x - 12 = (x-1)(3x+12))$$

$$f(x) = \frac{|x-1| \sqrt{2x+7}}{(x-1)(3x+12)} \text{ car : pour tout réel } X, \sqrt{X^2} = |X| \text{ (utilisé avec } X = x-1 \text{) . D'où : } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12}$$

Pour écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue, on est amené à considérer le signe de $x-1$ et donc à se placer naturellement aux voisinages 1^- et 1^+

avec $x \in D_f$ et $x < 1$

$x < 1$ entraîne $x-1 < 0$ et $|x-1| = -(x-1)$

Donc : $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12}$ devient :

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12} = -\frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12}$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{\sqrt{2x+7}}{(3x+12)} = -\frac{\sqrt{2(1)+7}}{3(1)+12} = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{1^-} f = -\frac{1}{5}$$

avec $x \in D_f$ et $x > 1$

$x > 1$ entraîne $x-1 > 0$ et $|x-1| = x-1$

Donc : $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12}$ devient :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12} = \frac{\sqrt{2x+7}}{3x+12}$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{2x+7}}{(3x+12)} = \frac{\sqrt{2(1)+7}}{3(1)+12} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{1^+} f = \frac{1}{5}$$

remarque : f n'admet pas de limite en 1 car : $\lim_{1^-} f \neq \lim_{1^+} f$.

exercice 8 Dans chacun des cas suivants $f(x)$ est de la forme $\sqrt{ax^2 + bx + c} - (mx + p)$ avec $a > 0$.

Le polynôme $ax^2 + bx + c$ étant toujours du signe de a aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} - (mx + p)$ est défini aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ avec $a > 0$.

Dans chacun des cas suivants on commence par examiner si le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions est applicable avec $u : x \rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c}$ et $v : x \rightarrow -(mx + p)$. Pour cet examen on utilise : aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ se comporte comme son terme de plus haut degré ($a > 0$)

l'expression donnée pour $f(x)$	ce qu'il faut justifier
1) $f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 3} - 2x$	$\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$
2) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 5} + 7x + 3$	$\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$
3) $f(x) = \sqrt{25x^2 - 30x + 12} - 5x + 3$	$\lim_{+\infty} f = 0$
4) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 10x + 3} - x\sqrt{2}$	$\lim_{+\infty} f = \frac{5\sqrt{2}}{2}$
5) $f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 3} - 4x + 1$	$\lim_{+\infty} f = 2$

1) $f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 3} - 2x$ $f(x)$ est la somme de $\sqrt{16x^2 + 8x + 3}$ et de $-2x$

$\lim_{-\infty} f = +\infty$	situation $x \rightarrow -\infty$	$\sqrt{16x^2 + 8x + 3}$ se comporte comme $\sqrt{16x^2} = 4 x = -4x$	$-2x$	théorème "somme" applicable
		$\sqrt{16x^2 + 8x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$	$-2x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$	

$$\rightarrow \sqrt{16x^2 + 8x + 3} = \sqrt{x^2 \left(16 + \frac{8x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)} = \sqrt{x^2} \sqrt{16 + \frac{8x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = |x| \sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} = \sqrt{16 + 8(0) + 3(0)} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} = +\infty \text{ car } 4 > 0 \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 8x + 3} = +\infty$$

→ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$. Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions

permet ensuite de déduire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{16x^2 + 8x + 3} - 2x = +\infty$ soit $\lim_{-\infty} f = +\infty$

$\lim_{-\infty} f = +\infty$	situation	$\sqrt{16x^2 + 8x + 3}$ se comporte comme $\sqrt{16x^2} = 4 x = 4x$	$-2x$	théorème "somme"
	$x \rightarrow +\infty$	$\sqrt{16x^2 + 8x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	$-2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$	inapplicable

Intuitivement : dans cette situation deux infinis de force différente (l'un de $4x$, l'autre de $-2x$) s'affrontent ; le changement d'écriture pour $f(x)$ a pour but de permettre l'utilisation du théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions et de montrer ainsi que c'est le comportement de $4x$ qui va l'emporter pour donner ainsi la limite de f en $+\infty$.

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 3} - 2x = \sqrt{x^2 \left(16 + \frac{8x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)} - 2x = \sqrt{x^2} \sqrt{16 + \frac{8x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} - 2x = |x| \sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x$$

Au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x > 0$ et $|x| = x$. Donc : $f(x) = x \sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x = x \left[\sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 \right]$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 = \sqrt{16 + 8(0) + 3(0)} - 2 = \sqrt{16} - 2 = 2$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $2 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{16 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 \right] = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$2) f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 5} + 7x + 3 \quad f(x) \text{ est la somme de } \sqrt{4x^2 - 7x + 5} \text{ et de } 7x + 3$$

$\lim_{+\infty} f = +\infty$	situation	$\sqrt{4x^2 - 7x + 5}$ se comporte comme $\sqrt{4x^2} = 2 x = 2x$	$7x + 3$	théorème "somme"
	$x \rightarrow +\infty$	$\sqrt{4x^2 - 7x + 5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	$7x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	applicable

$$\rightarrow \sqrt{4x^2 - 7x + 5} = \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{7x}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right)} = \sqrt{x^2} \sqrt{4 - \frac{7x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = |x| \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} = \sqrt{4 - 7(0) + 5(0)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} = +\infty \text{ car } 2 > 0 \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 7x + 5} = +\infty$$

→ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x + 3 = +\infty$ car $7 > 0$. Le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions permet ensuite de déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 7x + 5} + 7x + 3 = +\infty \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{-\infty} f = -\infty$	situation	$\sqrt{4x^2 - 7x + 5}$ se comporte comme $\sqrt{4x^2} = 2 x = -2x$	$7x + 3$	théorème "somme"
	$x \rightarrow -\infty$	$\sqrt{4x^2 - 7x + 5} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$	$7x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$	inapplicable

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 5} + (7x + 3) = \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{7x}{x^2} + \frac{5}{x^2} \right)} + (7x + 3) = \sqrt{x^2} \sqrt{4 - \frac{7x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + (7x + 3) = |x| \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} + (7x + 3)$$

Au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x < 0$ et $|x| = -x$. $f(x) = -x \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} + (7x + 3) = x \left(-\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} + 7 + \frac{3}{x} \right)$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $-\infty$. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} + 7 + \frac{3}{x} = -\sqrt{4 - 7(0) + 5(0)} + 7 + 3(0) = -2 + 7 = 5$$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $5 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} + 7 + \frac{3}{x} \right) = -\infty \text{ soit } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$3) f(x) = \sqrt{25x^2 - 30x + 12} - 5x + 3$$

$f(x)$ est la somme de $\sqrt{25x^2 - 30x + 12}$ et de $-5x + 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \frac{5\sqrt{2}}{2}$	situation	$\sqrt{25x^2 - 30x + 12}$ se comporte comme $\sqrt{25x^2} = 5 x = 5x$	$-5x + 3$	théorème "somme"
	$x \rightarrow +\infty$	$\sqrt{25x^2 - 30x + 12} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	$-5x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$	inapplicable

Intuitivement : dans cette situation deux infinis de force égale (l'un de $5x$, l'autre de $-5x$) s'affrontent ; on crée une nouvelle expression de type quotient pour $f(x)$ **en utilisant l'expression conjuguée de $f(x)$ égale à $\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + 5x - 3$** et qui est définie au voisinage de $+\infty$; on fait ensuite un nouvel examen de situation pour savoir si le théorème concernant la limite d'un quotient de deux fonctions est applicable .

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \sqrt{25x^2 - 30x + 12} - 5x + 3 = \sqrt{25x^2 - 30x + 12} - (5x - 3) = \frac{(\sqrt{25x^2 - 30x + 12} - (5x - 3)) (\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + (5x - 3))}{\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + (5x - 3)}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{25x^2 - 30x + 12})^2 - (5x - 3)^2}{\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + 5x - 3} = \frac{25x^2 - 30x + 12 - (25x^2 - 30x + 9)}{\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + 5x - 3} = \frac{3}{\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + 5x - 3}$$

situation $x \rightarrow +\infty$	$N(x) = 3$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3$	théorème "quotient"
	$D(x) = \sqrt{25x^2 - 30x + 12} + 5x - 3$ se comporte comme $5x + 5x$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	applicable

On peut continuer à transformer l'expression trouvée précédemment pour mettre en évidence le comportement de son dénominateur en le factorisant par x . On obtient ainsi une nouvelle expression pour $f(x)$ qui permet le passage à la limite en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{25x^2 - 30x + 12} + 5x - 3} = \frac{3}{\sqrt{x^2 \left(25 - \frac{30x}{x^2} + \frac{12}{x^2} \right) + 5x - 3}} = \frac{3}{|x| \sqrt{25 - \frac{30x}{x^2} + \frac{12}{x^2}} + 5x - 3}$$

Au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x > 0$ et $|x| = x$. Donc :

$$f(x) = \frac{3}{x \sqrt{25 - \frac{30x}{x^2} + \frac{12}{x^2}} + 5x - 3} = \frac{3}{x \left(\sqrt{25 - \frac{30x}{x^2} + \frac{12}{x^2}} + 5 - \frac{3}{x} \right)} = \frac{1}{x} \times \frac{3}{\sqrt{25 - \frac{30}{x} + \frac{12}{x^2}} + 5 - \frac{3}{x}}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{3}{\sqrt{25 - \frac{30}{x} + \frac{12}{x^2}} + 5 - \frac{3}{x}} = 0 \times \frac{3}{\sqrt{25 - 30(0) + 12(0)} + 5 - 3(0)} = 0 \times \frac{3}{10} = 0 . \text{ Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$3) f(x) = \sqrt{2x^2 + 10x + 3} - x\sqrt{2}$$

$f(x)$ est la somme de $\sqrt{2x^2 + 10x + 3}$ et de $-x\sqrt{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \frac{5\sqrt{2}}{2}$	situation	$\sqrt{2x^2 + 10x + 3}$ se comporte comme $\sqrt{2x^2} = x \sqrt{2} = x\sqrt{2}$	$-x\sqrt{2}$	théorème "somme"
	$x \rightarrow +\infty$	$\sqrt{2x^2 + 10x + 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	$-x\sqrt{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$	inapplicable

Intuitivement : dans cette situation deux infinis de force égale (l'un de $x\sqrt{2}$, l'autre de $-x\sqrt{2}$) s'affrontent ; on crée une nouvelle expression de type quotient pour $f(x)$ **en utilisant l'expression conjuguée de $f(x)$ égale à $\sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2}$** et qui est définie au voisinage de $+\infty$; on fait ensuite un nouvel examen de situation pour savoir si le théorème concernant la limite d'un quotient de deux fonctions est applicable .

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 10x + 3} - x\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2x^2 + 10x + 3} - x\sqrt{2}) (\sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2})}{\sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2x^2 + 10x + 3})^2 - (x\sqrt{2})^2}{\sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 3 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2}} = \frac{10x + 3}{\sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2}}$$

situation $x \rightarrow +\infty$	$N(x) = 10x + 3$ se comporte comme $10x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	théorème "quotient"
	$D(x) = \sqrt{2x^2 + 10x + 3} + x\sqrt{2}$ se comporte comme $x\sqrt{2} + x\sqrt{2}$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	inapplicable

D'où la nécessité de continuer à transformer cette expression en factorisant numérateur $N(x)$ et dénominateur $D(x)$ par x (ou par la plus grande puissance de x) pour obtenir un quotient qui permet le passage à la limite en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{10x+3}{\sqrt{2x^2+10x+3}+x\sqrt{2}} = \frac{10x+3}{\sqrt{x^2\left(2+\frac{10x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)+x\sqrt{2}}} = \frac{10x+3}{|x|\sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{2}}$$

Au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x > 0$ et $|x| = x$. Donc :

$$f(x) = \frac{10x+3}{x\sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{2}} = \frac{x\left(10+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2}\right)} = \frac{x}{x} \times \frac{10+\frac{3}{x}}{\sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2}} = \frac{10+\frac{3}{x}}{\sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2}}$$

situation	$N_1(x) = 10 + \frac{3}{x}$	$N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 10$	théorème "quotient" applicable
$x \rightarrow +\infty$	$D_1(x) = \sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2}$	$D_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2}+\sqrt{2}$	avec : $f(x) = \frac{N_1(x)}{D_1(x)}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10+\frac{3}{x}}{\sqrt{2+\frac{10}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2}} = \frac{10+3(0)}{\sqrt{2+10(0)+3(0)}+\sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} . \text{ Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

5) $f(x) = \sqrt{16x^2+8x+3} - 4x + 1$ $f(x)$ est la somme de $\sqrt{16x^2+8x+3}$ et de $-4x+1$

$\lim_{+\infty} f = 2$	situation	$\sqrt{16x^2+8x+3}$ se comporte comme $\sqrt{16x^2} = 4 x = 4x$	$-4x+1$	théorème "somme"
	$x \rightarrow +\infty$	$\sqrt{16x^2+8x+3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	$-4x+1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$	inapplicable

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément non nul de D_f

$$f(x) = \sqrt{16x^2+8x+3} - 4x + 1 = \sqrt{16x^2+8x+3} - (4x-1) = \frac{(\sqrt{16x^2+8x+3} - (4x-1))(\sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1))}{\sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1)}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{16x^2+8x+3})^2 - (4x-1)^2}{\sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1)} = \frac{16x^2+8x+3 - (16x^2-8x+1)}{\sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1)} = \frac{16x+2}{\sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1)}$$

situation	$N(x) = 16x+2$ se comporte comme $16x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	théorème "quotient"
$x \rightarrow +\infty$	$D(x) = \sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1)$ se comporte comme $4x+4x$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$	inapplicable

$$\text{D'autre part : } f(x) = \frac{16x+2}{\sqrt{16x^2+8x+3} + (4x-1)} = \frac{16x+2}{|x|\sqrt{16+\frac{8x}{x^2}+\frac{3}{x^2}} + (4x-1)} \begin{cases} \text{et au voisinage de } +\infty \text{ on peut} \\ \text{peut supposer } x > 0 \text{ et } |x| = x \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{16x+2}{x\sqrt{16+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}} + (4x-1)} = \frac{x\left(16+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{16+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}} + 4 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{16+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}} + 4 - \frac{1}{x}}$$

situation	$N_1(x) = 16 + \frac{2}{x}$	$N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 16$	théorème "quotient" applicable
$x \rightarrow +\infty$	$D_1(x) = \sqrt{16+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}} + 4 - \frac{1}{x}$	$D_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{16} + 4$	avec : $f(x) = \frac{N_1(x)}{D_1(x)}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}} + 4 - \frac{1}{x}} = \frac{16+2(0)}{\sqrt{16+8(0)+3(0)} + 4 - (0)} = \frac{16}{4+4} = 2 . \text{ Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

exercice 9 $f(x)$ est un quotient du type $\frac{N(x)}{D(x)}$. On demande d'étudier les limites de f en x_{0-} et en x_{0+} et le page 20 / 27

tableau de situation pour $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est du type :	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} N(x_0) = 0$
	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} D(x_0) = 0$

9-1 $f(x)$ est une fraction rationnelle non définie en x_0 $N(x)$ et $D(x)$ sont factorisables par $x - x_0$ car ils ont x_0

comme racine commune . Une méthode : **1)** Factoriser $N(x)$ et $D(x)$ par $x - x_0$ puis simplifier l'expression donnée pour $f(x)$

2) En notant $g(x)$ l'expression simplifiée de $f(x)$ utiliser : $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^+} g$, $\lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^-} g$ pour examiner le comportement de $f(x)$

(les limites à trouver pour f peuvent être , selon l'expression trouvée pour $g(x)$, finies ou infinies)

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut justifier
1) $f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x + 3}$	$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$	$\lim_{-3^-} f = \lim_{-3^+} f = -24 = \lim_{-3} f$
2) $f(x) = \frac{-5x^2 + 11x - 2}{-7x^2 + 17x - 6}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{2, \frac{3}{7}\right\}$	$\lim_{2^-} f = \lim_{2^-} g = \frac{9}{11} = \lim_{2^-} f$
3) $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 1}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$	$\lim_{-1^-} f = \lim_{-1^+} f = 0 = \lim_{-1} f$
4) $f(x) = \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$	$D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$	$\lim_{1^+} f = +\infty$ et $\lim_{1^-} f = +\infty$; $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = 0 = \lim_{0} f$
5) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^4 - 8x^2 + 16}$	$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$	$\lim_{2^-} f = -\infty$ et $\lim_{2^+} f = +\infty$
6) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{3x^2 + x - 4}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{1, -\frac{4}{3}\right\}$	$\lim_{1^-} f = \lim_{1^+} f = 0 = \lim_{1} f$.

$1) f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x + 3}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ (pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$)

$\lim_{-3} f = -24$	situation $x \rightarrow -3$	$N(x) = 4x^2 - 36$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -3} 0$	$N(x)$ et $D(x)$ factorisables par $x + 3$
		$D(x) = x + 3$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -3} 0$	

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x + 3} = \frac{4(x^2 - 9)}{x + 3} = \frac{4(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = 4(x - 3)$. Donc $f(x) = g(x)$ en notant : $g(x) = 4(x - 3)$.

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de -3

g est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\lim_{-3^-} g = \lim_{-3^+} g = \lim_{-3} g = g(-3) = 4(-3 - 3) = -24$

D'où : $\lim_{-3^-} f = \lim_{-3^-} g = -24$ et $\lim_{-3^+} f = \lim_{-3^+} g = -24$.

Ayant : $-3 \notin D_f$, $\lim_{-3^-} f = \lim_{-3^+} f = -24$ on déduit : f admet une limite en -3 et $\lim_{-3} f = -24$

$2) f(x) = \frac{-5x^2 + 11x - 2}{-7x^2 + 17x - 6}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{2, \frac{3}{7}\right\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow -7x^2 + 17x - 6 = 0$

2 est une racine de $-7x^2 + 17x - 6$ car : $-7(2)^2 + 17(2) - 6 = -28 + 34 - 6 = 0$.

Donc $-7x^2 + 17x - 6$ est factorisable par $x - 2$ et pour tout réel x , $-7x^2 + 17x - 6 = (x - 2)(-7x + 3)$.

D'où : $x \notin D_f \Leftrightarrow (x - 2)(-7x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $-7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = \frac{3}{7}$

$\lim_{2^-} f = \frac{9}{11}$	situation $x \rightarrow 2$	$N(x) = -5x^2 + 11x - 2$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} -20 + 22 - 2 = 0$	$N(x)$ et $D(x)$ factorisables par $x - 2$
		$D(x) = -7x^2 + 17x - 6$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$	

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

On a montré précédemment : $-7x^2 + 17x - 6 = (x - 2)(-7x + 3)$. D'autre part : $-5x^2 + 11x - 2 = (x - 2)(-5x + 1)$

Donc : $f(x) = \frac{-5x^2 + 11x - 2}{-7x^2 + 17x - 6} = \frac{(x - 2)(-5x + 1)}{(x - 2)(-7x + 3)} = \frac{-5x + 1}{-7x + 3}$. Donc : $f(x) = g(x)$ avec $g(x) = \frac{-5x + 1}{-7x + 3}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 2

g est une fonction rationnelle définie et continue en 2. Donc $\lim_{2^-} g = \lim_{2^+} g = \lim_2 g = g(2) = \frac{-5(2) + 1}{-7(2) + 3} = \frac{-9}{-11} = \frac{9}{11}$

D'où : $\lim_{2^-} f = \lim_{2^-} g = \frac{9}{11}$ et $\lim_{2^+} f = \lim_{2^+} g = \frac{9}{11}$.

Ayant : $2 \notin D_f$, $\lim_{2^-} f = \lim_{2^+} f = \frac{9}{11}$ on déduit : f admet une limite en 2 et $\lim_2 f = \frac{9}{11}$

$$\underline{3) f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 1}} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1, -\frac{1}{4} \right\} . \text{ Pour tout réel } x, x \notin D_f \Leftrightarrow 4x^2 + 5x + 1 = 0$$

-1 est une racine de $4x^2 + 5x + 1$ car : $4(-1)^2 + 5(-1) + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$.

Donc $4x^2 + 5x + 1$ est factorisable par $x + 1$ et pour tout réel x , $4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1)$.

D'où : $x \notin D_f \Leftrightarrow (x + 1)(4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -\frac{1}{4}$

$\lim_{-1} f = 0$	situation $x \rightarrow -1$	$N(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} -2 + 3 - 1 = 0$	$N(x)$ et $D(x)$ factorisables par $x + 1$
		$D(x) = 4x^2 + 5x + 1$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$	

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

• On a montré précédemment : $4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1)$.

• Déterminons les réels a, b, c tels que pour tout réel x : $N(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

$$(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c \text{ et } N(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

Deux polynômes de degré 3 sont égaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ils ont les mêmes coefficients. Donc :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, 2x^3 + 3x^2 - 1 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ b + c = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 - a \\ b = -c \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 - 2 \\ b = -(-1) \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = (x + 1)(2x^2 + x - 1)$

$$\bullet \text{ d'où : } f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 1} = \frac{(x + 1)(2x^2 + x - 1)}{(x + 1)(4x + 1)} = \frac{2x^2 + x - 1}{4x + 1} \text{ et } f(x) = g(x) \text{ avec } g(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{4x + 1}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de -1 g est une fonction rationnelle définie et continue en -1 .

$$\text{Donc } \lim_{-1^-} g = \lim_{-1^+} g = \lim_{-1} g = g(-1) = \frac{2(-1)^2 + (-1) - 1}{4(-1) + 1} = \frac{2 - 1 - 1}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

D'où : $\lim_{-1^-} f = \lim_{-1^-} g = 0$ et $\lim_{-1^+} f = \lim_{-1^+} g = 0$.

Ayant : $-1 \notin D_f$, $\lim_{-1^-} f = \lim_{-1^+} f = 0$ on déduit : f admet une limite en -1 et $\lim_{-1} f = 0$

$$\underline{4) f(x) = \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\} . \text{ Pour tout réel } x, x \notin D_f \Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \text{ et } (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 . \text{ Donc : } x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x - 1)^3$$

Et : $x \notin D_f \Leftrightarrow x(x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

$\lim_0 f = 0$	situation $x \rightarrow 0$	$N(x) = x^4 - x^3$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 - 0 = 0$	$N(x)$ et $D(x)$ factorisables par x
		$D(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$	

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f On a montré précédemment : $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x - 1)^3$.

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} = \frac{x^3(x - 1)}{x(x - 1)^3} = \frac{x^2}{(x - 1)^2} \text{ et } f(x) = g(x) \text{ en posant : } g(x) = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 0 g est une fonction rationnelle définie et continue en 0.

$$\text{Donc } \lim_{0^-} g = \lim_{0^+} g = \lim_0 g = g(0) = \frac{(0)^2}{(0 - 1)^2} = \frac{0}{1} = 0 . \text{ D'où : } \lim_{0^-} f = \lim_{0^-} g = 0 \text{ et } \lim_{0^+} f = \lim_{0^+} g = 0 .$$

Ayant : $0 \notin D_f$, $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = 0$ on déduit : f admet une limite en 0 et $\lim_0 f = 0$

$$\lim_{1^-} f = +\infty$$

$$\lim_{1^+} f = +\infty$$

situation $x \rightarrow 1$	$N(x) = x^4 - x^3$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 - 1 = 0$
	$D(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

avec $f(x) = g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, situation $x \rightarrow 1$

$N_1(x) = x^2$	$N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$
$D_1(x) = (x-1)^2$	$D_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

Pour la suite j'utilise

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = x^2 \times \frac{1}{(x-1)^2}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1$. D'autre part : $x \neq 1$ entraîne $(x-1)^2 > 0$ donc : $\lim_{x < 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ et $\lim_{x > 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $1 > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 \times \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \times \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

5) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^4 - 8x^2 + 16}$ $D_f = \mathbb{R} - \{2, -2\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

D'autre part : $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2)^2 - 8(x^2) + (4)^2 = (x^2 - 4)^2 = [(x)^2 - (2)^2]^2 = [(x-2)(x+2)]^2 = (x-2)^2(x+2)^2$

Donc : $x \notin D_f \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0$ ou $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$$\lim_{2^-} f = -\infty$$

$$\lim_{2^+} f = +\infty$$

situation $x \rightarrow 2$	$N(x) = 2x^2 - x - 6$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 8 - 2 - 6 = 0$
	$D(x) = x^4 - 8x^2 + 16$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$

$N(x)$ et $D(x)$

factorisables par $x - 2$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f D'après D_f : pour tout réel x : $x^4 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2(x+2)^2$

D'autre part : 2 étant une racine de $2x^2 - x - 6$, ce polynôme est factorisable par $x - 2$ et : $2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

Par conséquent : $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^4 - 8x^2 + 16} = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{2x+3}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{1}{x-2} \times \frac{2x+3}{(x+2)^2}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 2 . On a : 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{(x+2)^2} = \frac{2(2)+3}{(2+2)^2} = \frac{7}{16}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = -\infty$ ($x < 2$ entraîne $x-2 < 0$) ; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$ car $x > 2$ entraîne $x-2 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $\frac{7}{16} > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \times \frac{2x+3}{(x+2)^2} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \times \frac{2x+3}{(x+2)^2} = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

6) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{3x^2 + x - 4}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{1, -\frac{4}{3}\right\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0$

1 est une racine de $3x^2 + x - 4$ car : $3(1)^2 + 1 - 4 = 3 + 1 - 4 = 0$.

Donc $3x^2 + x - 4$ est factorisable par $x - 1$ et pour tout réel x : $3x^2 + x - 4 = (x-1)(3x+4)$.

Donc : $x \notin D_f \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+4) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $3x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{4}{3}$

$$\lim_{1^-} f = 0$$

$$\lim_{1^+} f = 0$$

situation $x \rightarrow 1$	$N(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 + 2 - 7 + 4 = 0$
	$D(x) = 3x^2 + x - 4$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

$N(x)$ et $D(x)$

factorisables par $x - 1$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

• D'après la recherche de D_f on a : $D(x) = 3x^2 + x - 4 = (x-1)(3x+4)$

• $N(x)$ étant factorisable par $x - 1$ on peut trouver trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

D'autre part : $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Et deux polynômes de même degré sont égaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ils ont les mêmes coefficients. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ c - b = -7 \\ -c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 + a \\ -b = -7 - c \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 + 1 \\ -b = -7 - (-4) \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ -b = -3 \\ c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, N(x) = (x-1)(x^2 + 3x - 4)$

$$\bullet f(x) \text{ devient alors : } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{3x^2 + x - 4} = \frac{(x-1)(x^2 + 3x - 4)}{(x-1)(3x+4)} = \frac{x^2 + 3x - 4}{3x+4}$$

$$\text{soit : } f(x) = g(x) \text{ en posant : } g(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{3x+4}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 1 g est une fonction rationnelle définie et continue en 1 .

$$\text{Donc } \lim_{1^-} g = \lim_{1^+} g = \lim_{1} g = g(1) = \frac{(1)^2 + 3(1) - 4}{3(1) + 4} = \frac{1 + 3 - 4}{7} = 0 . \text{ D'où : } \lim_{1^-} f = \lim_{1^-} g = 0 \text{ et } \lim_{1^+} f = \lim_{1^+} g = 0 .$$

Ayant : $1 \notin D_f$, $\lim_{1^-} f = \lim_{1^+} f = 0$ on déduit : f admet une limite en 0 et $\lim_1 f = 0$

9-2 $f(x)$ est un quotient non défini en x_0

méthode : Comme dans le 9-1 on essaie de simplifier le quotient $f(x)$ par $x - x_0$

l'expression de $f(x)$ et D_f	à justifier	l'expression donnée pour $f(x)$ et D_f	à justifier
1) $f(x) = \frac{ x-3 }{x-3}$ $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$	$\lim_{3^-} f = -1$, $\lim_{3^+} f = 1$	5) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$ $D_f = \mathbb{R}^+ - \{4\}$	$\lim_4 f = -3$
2) $f(x) = \frac{ x^2-5x }{x^2-x}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$	$\lim_{0^-} f = 5$, $\lim_{0^+} f = -5$	6) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}-2}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\lim_{0^-} f = -\infty$, $\lim_{0^+} f = +\infty$
3) $f(x) = \frac{ x+1 }{2x^2-x-3}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$	$\lim_{-1^-} f = \frac{1}{5}$, $\lim_{-1^+} f = -\frac{1}{5}$	7) $f(x) = \frac{\sqrt{8x+1}-4x+1}{-2x^2+9x-7}$ $D_f = \left[-\frac{1}{8}, +\infty\right] - \left\{1, \frac{7}{2}\right\}$	$\lim_1 f = -\frac{8}{15}$
4) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{(x-3)^2}$ $D_f = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right] - \{3\}$	$\lim_{3^-} f = -\infty$, $\lim_{3^+} f = +\infty$	8) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}{x^2+2x-3}$ $D_f = [-1, +\infty] - \{1\}$	$\lim_{1^-} f = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\lim_{1^+} f = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\underline{\underline{1) f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}}} \quad \boxed{D_f = \mathbb{R} - \{3\}} \quad (\text{ pour tout réel } x, x \notin D_f \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3)$$

$$\lim_{3^-} f = -1$$

$$\lim_{3^+} f = 1$$

situation
 $x \rightarrow 3$

$N(x) = x-3 $	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} 0 = 0$
$D(x) = x-3$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} 0$

méthode : écrire $N(x)$ sans le symbole de la valeur absolue puis simplifier le quotient $f(x)$ par $x-3$

Pour écrire $|x-3|$ sans le symbole de la valeur absolue , on est amené à considérer le signe de $x-3$ et donc à se placer naturellement aux voisinages 3^- et 3^+

avec $x \in D_f$ et $x < 3$

$x < 3$ entraîne $x-3 < 0$ et $|x-3| = -(x-3)$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \text{ devient : } f(x) = \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x < 1} -1 = -1$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{1^-} f = -1$$

$\lim_{1^-} f \neq \lim_{1^+} f$ donc : f n'admet pas de limite en 1

avec $x \in D_f$ et $x > 3$

$x > 3$ entraîne $x-3 > 0$ et $|x-3| = x-3$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \text{ devient : } f(x) = \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x > 1} 1 = 1$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{1^+} f = 1$$

$2)f(x) = \frac{|x^2 - 5x|}{x^2 - x}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. page 24 / 27

$\lim_{0^-} f = 5$ $\lim_{0^+} f = -5$	situation $x \rightarrow 0$	$N(x) = x^2 - 5x $ $D(x) = x^2 - x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = 0$ $D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$	méthode : écrire $N(x)$ sans le symbole de la valeur absolue puis simplifier $f(x)$ par x
---	--------------------------------	---	--	--

Dans le tableau ci-contre on écrit $|x^2 - 5x|$ sans le symbole de la valeur absolue après avoir étudié le signe de $x^2 - 5x$ en utilisant sa forme factorisée $x(x - 5)$.

dernière ligne du tableau : pour écrire $|x^2 - 5x|$ sans le symbole de la valeur absolue on utilise avec $X = x^2 - 5x$ la définition suivante de $|X|$:
 $|X| = X \Leftrightarrow X \geq 0$ et $|X| = -X \Leftrightarrow X \leq 0$

On obtient alors pour $f(x)$:

avec $x \in D_f$ et $x < 0$	avec $x \in D_f$ et $0 < x < 5$
$x < 0$ entraîne $x^2 - 5x > 0$ et $ x^2 - 5x = x^2 - 5x$	$0 < x < 5$ entraîne $x^2 - 5x < 0$ et $ x^2 - 5x = -x^2 + 5x$
Donc : $f(x) = \frac{ x^2 - 5x }{x^2 - x}$ devient : $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - x}$	Donc : $f(x) = \frac{ x^2 - 5x }{x^2 - x}$ devient : $f(x) = \frac{-x^2 + 5x}{x^2 - x}$
D'où : $f(x) = \frac{x(x - 5)}{x(x - 1)} = \frac{x - 5}{x - 1}$	D'où : $f(x) = \frac{x(-x + 5)}{x(x - 1)} = \frac{-x + 5}{x - 1}$
Par conséquent : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x - 5}{x - 1} = \frac{0 - 5}{0 - 1} = 5$	Par conséquent : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x + 5}{x - 1} = \frac{-0 + 5}{0 - 1} = -5$
Ainsi : $\lim_{0^-} f = 5$	Ainsi : $\lim_{0^+} f = -5$
$\lim_{0^-} f \neq \lim_{0^+} f$ donc : f n'admet pas de limite en 0	

$3)f(x) = \frac{|x + 1|}{2x^2 - x - 3}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$. Pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$

$2(1)^2 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$. Donc $2x^2 - x - 3$ est factorisable par $x + 1$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$
D'où : $x \notin D_f \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{3}{2}$

$\lim_{-1^-} f = \frac{1}{5}$ $\lim_{-1^+} f = -\frac{1}{5}$	situation $x \rightarrow -1$	$N(x) = x + 1 $ $D(x) = 2x^2 - x - 3$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0 = 0$ $D(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0$	méthode : écrire $N(x)$ sans le symbole de la valeur absolue , utiliser la forme factorisée de $D(x)$ puis simplifier $f(x)$ par x
---	---------------------------------	---	--	---

D'après la recherche de D_f : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$. Pour écrire $|x + 1|$ sans le symbole de la valeur absolue , on est amené à considérer le signe de $x + 1$ et donc à se placer naturellement aux voisinages -1^- et -1^+ .

avec $x \in D_f$ et $x < -1$	avec $x \in D_f$ et $x > -1$
$x < -1$ entraîne $x + 1 < 0$ et $ x + 1 = -(x + 1)$	$x > -1$ entraîne $x + 1 > 0$ et $ x + 1 = x + 1$
Donc : $f(x) = \frac{ x + 1 }{2x^2 - x - 3}$ devient : $f(x) = \frac{-(x + 1)}{2x^2 - x - 3}$	Donc : $f(x) = \frac{ x + 1 }{2x^2 - x - 3}$ devient : $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 - x - 3}$
D'où : $f(x) = \frac{-(x + 1)}{(x + 1)(2x - 3)} = \frac{-1}{2x - 3}$	D'où : $f(x) = \frac{x + 1}{(x + 1)(2x - 3)} = \frac{1}{2x - 3}$
Par conséquent : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{-1}{2x - 3} = \frac{-1}{2(-1) - 3} = \frac{1}{5}$	Par conséquent : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{2x - 3} = \frac{1}{2(-1) - 3} = -\frac{1}{5}$
Ainsi : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \frac{1}{5}$	Ainsi : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\frac{1}{5}$
$\lim_{-1^-} f \neq \lim_{-1^+} f$ donc : f n'admet pas de limite en -1 .	

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{(x-3)^2}$$

$$D_f = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right] - \{3\} . \text{ Pour tout réel } x ,$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ (x-3)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \neq 3 \end{cases} \text{ (car } 2 > 0 \text{) et } x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[- \{3\}$$

$$\lim_{3^-} f = -\infty$$

$$\lim_{3^+} f = +\infty$$

situation
 $x \rightarrow 3$

$N(x) = \sqrt{2x+3}-3$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} \sqrt{9}-3 = 0$
$D(x) = (x-3)^2$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} 0$

méthode : multiplier numérateur et dénominateur de $f(x)$ par la quantité conjuguée de $\sqrt{2x+3}-3$ puis simplifier $f(x)$ par $x-3$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-3}{(x-3)^2} = \frac{[\sqrt{2x+3}-3][\sqrt{2x+3}+3]}{(x-3)^2[\sqrt{2x+3}+3]} = \frac{[\sqrt{2x+3}]^2 - (3)^2}{(x-3)^2[\sqrt{2x+3}+3]} = \frac{2x+3-9}{(x-3)^2[\sqrt{2x+3}+3]} = \frac{2x-6}{(x-3)^2[\sqrt{2x+3}+3]}$$

$$f(x) = \frac{2(x-3)}{(x-3)^2[\sqrt{2x+3}+3]} = \frac{2}{(x-3)[\sqrt{2x+3}+3]}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 3

avec $f(x) = \frac{2}{(x-3)[\sqrt{2x+3}+3]}$:	situation	$N_1(x) = 2$	$N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} 2$	$\lim_{3^-} f$ et $\lim_{3^+} f$ infinies
	$x \rightarrow 3$	$D_1(x) = (x-3)[\sqrt{2x+3}+3]$	$D_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} 0[\sqrt{9}+3] = 0$	

Pour la suite j'utilise : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} \times \frac{1}{x-3}$

On a : 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ ($x < 3$ entraîne $x-3 < 0$) ; $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3} = +\infty$ car $x > 3$ entraîne $x-3 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $\frac{1}{3} > 0$) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} \times \frac{1}{x-3} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} \times \frac{1}{x-3} = +\infty \text{ soit : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

$$5) f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ - \{4\} . \text{ Pour tout réel } x , x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+ - \{4\} .$$

remarque : $\mathbb{R}^+ - \{4\} = [0, 4[\cup]4, +\infty[$ donc : f n'est pas définie en 4 mais l'est autour de 4 .

$$\lim_4 f = -3$$

situation
 $x \rightarrow 4$

$N(x) = x\sqrt{x}-8$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4} 4\sqrt{4}-8 = 0$
$D(x) = 4-x$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4} 0$

méthode : multiplier numérateur et dénominateur de $f(x)$ par la quantité conjuguée de $x\sqrt{x}-8$ puis simplifier $f(x)$ par $x-4$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} = \frac{[x\sqrt{x}-8][x\sqrt{x}+8]}{(4-x)[x\sqrt{x}+8]} = \frac{(x\sqrt{x})^2 - (8)^2}{(4-x)[x\sqrt{x}+8]} = \frac{x^3 - 64}{(4-x)[x\sqrt{x}+8]}$$

4 est une racine de $x^3 - 64$ car : $(4)^3 - 64 = 64 - 64 = 0$ donc $x^3 - 64$ est factorisable par $x-4$.

$x^3 - 64$ est de la forme $a^3 - b^3$ avec $a = x$ et $b = 4$. Or : pour tous réels a et b , $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Donc :

$x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$ et $f(x)$ devient :

$$f(x) = \frac{x^3 - 64}{(4-x)[x\sqrt{x}+8]} = \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{-(x-4)[x\sqrt{x}+8]} = \frac{(x^2 + 4x + 16)}{-[x\sqrt{x}+8]} = -\frac{x^2 + 4x + 16}{x\sqrt{x}+8}$$

On obtient ainsi : $f(x) = g(x)$ avec $g(x) = -\frac{x^2 + 4x + 16}{x\sqrt{x}+8}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 4 g est une fonction quotient définie et continue en 4 .

$$\text{Donc } \lim_{4^-} g = \lim_{4^+} g = \lim_4 g = g(4) = -\frac{(4)^2 + 4(4) + 16}{4\sqrt{4} + 8} = -\frac{16 + 16 + 16}{8 + 8} = -\frac{3 \times 16}{16} = -3 .$$

D'où : $\lim_{4^-} f = \lim_{4^-} g = -3$ et $\lim_{4^+} f = \lim_{4^+} g = -3$.

Ayant : $4 \notin D_f$, $\lim_{4^-} f = \lim_{4^+} f = -3$ on déduit : f admet une limite en 4 et $\lim_4 f = -3$

$$6) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}-2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad . \text{ Pour tout réel } x, x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+4}-2 \neq 0 \end{cases}$$

D'autre part :

→ pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ entraîne pour tout réel x , $x^2+4 \geq 4$. Or : $4 > 0$. Donc : pour tout réel x , $x^2+4 > 0$

→ $\sqrt{x^2+4}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+4})^2=(2)^2$ (comparer deux réels positifs revient à comparer leurs carrés)

Donc : $\sqrt{x^2+4}-2=0 \Leftrightarrow x^2+4=4 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Par conséquent : Pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$.

$\lim_{0^-} f = -\infty$ $\lim_{0^+} f = +\infty$	situation $x \rightarrow 0$	$N(x) = 3x$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
		$D(x) = \sqrt{x^2+4}-2$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{4}-2=0$

méthode : multiplier numérateur et dénominateur de $f(x)$ par la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2+4}-2$ puis simplifier $f(x)$ par x

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}-2} = \frac{3x(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{3x(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+4})^2-(2)^2} = \frac{3x(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2+4-4} = \frac{3x(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{3(\sqrt{x^2+4}+2)}{x}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 0

avec $f(x) = \frac{3(\sqrt{x^2+4}+2)}{x}$:	situation $x \rightarrow 0$	$N_1(x) = 3(\sqrt{x^2+4}+2)$	$N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3(2+2) = 12$	$\lim_{0^-} f$ et $\lim_{0^+} f$ infinies
		$D_1(x) = x$	$D_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$	

Pour la suite j'utilise : $f(x) = 3(\sqrt{x^2+4}+2) \times \frac{1}{x}$

On a : **1)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3(\sqrt{x^2+4}+2) = 3(\sqrt{0^2+4}+2) = 3(2+2) = 12$ et **2)** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire (avec $12 > 0$) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3(\sqrt{x^2+4}+2) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\sqrt{x^2+4}+2) \times \frac{1}{x} = +\infty \text{ soit } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{8x+1}-4x+1}{-2x^2+9x-7}$$

$$D_f = \left[-\frac{1}{8}, +\infty \right[- \left\{ 1, \frac{7}{2} \right\} \quad . \text{ Pour tout réel } x, x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+1 \geq 0 \\ -2x^2+9x-7 \neq 0 \end{cases}$$

D'autre part : → $8x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 8x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{8}$ (car $8 > 0$) et $8x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{8}, +\infty \right[$

→ 1 est une racine de $-2x^2+9x-7$ car : $-2(1)^2+9(1)-7 = -2+9-7 = 0$. Donc $-2x^2+9x-7$ est factorisable par $x-1$ et pour tout réel x , $-2x^2+9x-7 = (x-1)(-2x+7)$. D'où : $-2x^2+9x-7=0 \Leftrightarrow (x-1)(-2x+7)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{7}{2}$

$$\text{Par conséquent : } x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+1 \geq 0 \\ -2x^2+9x-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{8}, +\infty \right[\\ x \neq 1 \text{ et } x \neq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{8}, +\infty \right[- \left\{ 1, \frac{7}{2} \right\}$$

$\lim_1 f = -\frac{8}{15}$	situation $x \rightarrow 1$	$N(x) = \sqrt{8x+1}-4x+1$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sqrt{9}-4+1=0$
		$D(x) = -2x^2+9x-7$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

méthode : multiplier $N(x)$ et $D(x)$ de $f(x)$ par la quantité conjuguée de $\sqrt{8x+1}-4x+1 = \sqrt{8x+1}-(4x-1)$ puis simplifier $f(x)$ par $x-1$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{\sqrt{8x+1}-4x+1}{-2x^2+9x-7} = \frac{\sqrt{8x+1}-(4x-1)}{-2x^2+9x-7} = \frac{[\sqrt{8x+1}-(4x-1)][\sqrt{8x+1}+(4x-1)]}{(-2x^2+9x-7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]} = \frac{[\sqrt{8x+1}]^2-(4x-1)^2}{(-2x^2+9x-7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]}$$

$$f(x) = \frac{8x+1-(16x^2-8x+1)}{(-2x^2+9x-7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]} = \frac{8x+1-16x^2+8x-1}{(-2x^2+9x-7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]} = \frac{-16x^2+16x}{(-2x^2+9x-7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]}$$

$-16x^2+16x$ est factorisable par $-16x$ et d'après D_f : $-2x^2+9x-7 = (x-1)(-2x+7)$. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{-16x(x-1)}{(x-1)(-2x+7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]} = \frac{-16x}{(-2x+7)[\sqrt{8x+1}+(4x-1)]}$$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 1 On a obtenu précédemment :

$$f(x) = g(x) \text{ avec } g(x) = \frac{-16x}{(-2x+7)[\sqrt{8x+1} + (4x-1)]} \text{ et comme nouvelle situation :}$$

situation	$N_1(x) = -16x$	$N_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -16$
$x \rightarrow 1$	$D_1(x) = (-2x+7)[\sqrt{8x+1} + (4x-1)]$	$D_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} (-2+7)[\sqrt{8+1} + (4-1)] = 5 \times 6 = 30$

$$g \text{ est une fonction quotient définie et continue en 1 et : } \lim_{1^-} g = \lim_{1^+} g = \lim_1 g = g(1) = \frac{N_1(1)}{D_1(1)} = \frac{-16}{30} = -\frac{8}{15}$$

$$\text{D'où : } \lim_{1^-} f = \lim_{1^-} g = -\frac{8}{15} \text{ et } \lim_{1^+} f = \lim_{1^+} g = -\frac{8}{15} .$$

$$\text{Ayant : } 1 \notin D_f, \lim_{1^-} f = \lim_{1^+} f = -\frac{8}{15} \text{ on déduit : } f \text{ admet une limite en 1 et } \lim_1 f = -\frac{8}{15}$$

$$\underline{7) f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}{x^2 + 2x - 3}} \quad D_f = [-1, +\infty[- \{1\} . \text{ Pour tout réel } x, x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \neq 0 \end{cases} . \text{ D'autre part :}$$

$$\rightarrow 1 \text{ et } -1 \text{ sont des racines de } x^3 - x^2 - x + 1 \text{ car } 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0 \text{ et } (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0 .$$

$$\text{Donc } x^3 - x^2 - x + 1 \text{ est factorisable par } x - 1 \text{ et par } x + 1 .$$

$$\text{Ainsi } x^3 - x^2 - x + 1 \text{ est factorisable par le produit } (x-1)(x+1) \text{ de degré 2 et égal à } x^2 - 1 .$$

$$\text{D'où : } x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1)$$

$$\text{puis } x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x+1)(x-1)$$

$$\text{soit : } x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$$

$$\text{D'où le tableau de signe pour } x^3 - x^2 - x + 1$$

$$\text{en utilisant sa forme factorisée } (x-1)^2(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$x+1$	-	0	+	+
$(x-1)^2(x+1)$	-	0	+	+

$$\text{Avec ce tableau on déduit alors : } x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty[$$

$$\rightarrow 1 \text{ est une racine de } x^2 + 2x - 3 \text{ car } (1)^2 + 2(1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 . \text{ Donc } x^2 + 2x - 3 \text{ est factorisable par } x - 1 \text{ et}$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) . \text{ D'où } x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3$$

$$\text{Par conséquent : } x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, +\infty[\\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty[- \{1\} \text{ car } \begin{cases} -3 \notin [-1, +\infty[\\ 1 \in [-1, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } D_f = [-1, +\infty[- \{1\}$$

$$\lim_{1^-} f = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{1^+} f = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

situation
 $x \rightarrow 1$

$N(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$	$N(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sqrt{0} = 0$
$D(x) = x^2 + 2x - 3$	$D(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$

méthode : utiliser les formes factorisées de $x^3 - x^2 - x + 1$ pour $x^2 + 2x - 3$ puis simplifier $f(x)$ par $x - 1$

→ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D_f

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}}{x^2 + 2x - 3} = \frac{\sqrt{(x-1)^2(x+1)}}{(x-1)(x+3)} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+3)} \quad (x+1 \geq 0 \text{ pour } x \in D_f \text{ car } x \geq -1)$$

$$f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+3)} \quad (\text{on utilise : pour tout réel } X, \sqrt{X^2} = |X| \text{ avec } X = x-1)$$

Pour écrire $|x-1|$ sans le symbole de la valeur absolue, on est amené à se placer naturellement aux voisinages 1^- et 1^+ .

$$\text{avec } x \in D_f \text{ et tel que : } -1 \leq x < 1$$

$$x < 1 \text{ entraîne } x-1 < 0 \text{ et } |x-1| = -(x-1)$$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+3)} = \frac{-(x-1)\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+3)}$$

$$\text{D'où : } f(x) = \frac{-\sqrt{x+1}}{x+3}$$

$$\text{Et : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-\sqrt{x+1}}{x+3} = \frac{-\sqrt{1+1}}{1+3} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{1^-} f = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \lim_{1^+} f = \frac{\sqrt{2}}{4} . \text{ On a : } \lim_{1^-} f \neq \lim_{1^+} f . \text{ Donc : } f \text{ n'admet pas de limite en 1}$$

$$\text{avec } x \in D_f \text{ et } x > 1$$

$$x > 1 \text{ entraîne } x-1 > 0 \text{ et } |x-1| = x-1$$

$$\text{Donc : } f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{(x-1)(x+3)}$$

$$\text{D'où : } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+3}$$

$$\text{Et : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} = \frac{\sqrt{1+1}}{1+3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$