Limites - énoncés feuille 1

Première Partie : avec des fonctions polynômes

exercice 1 **1)** Compléter le tableau suivant en utilisant le théorème : f étant une fonction polynôme , aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme son terme de plus haut degré .

l'expression donnée pour $f(x)$	terme de plus haut degré de $f(x)$	comportement de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$
1) $f(x) = 2x^2 - 7x$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
2) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
3) $f(x) = -2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
4) $f(x) = -2x^4 + 8x + 3$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
5) $f(x) = -6x^3 + 5x^2 - 5x + 8$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......

2) Justifier les résultats précédents en utilisant une forme "produit " pour $f(x)$.

exercice 2 On considère la fonction polynôme $f : x \longmapsto f(x)$ avec $f(x) = \left(-x^2 - 2x + 8\right)(x+1)^2$

1) **1-1** Etudier le signe de $f(x)$

1-2 Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$ (méthode détaillée)

2) On note g la fonction inverse de f ($g = \dfrac{1}{f}$) . En utilisant les questions précédentes :

2-1 Préciser l'ensemble de définition D_g de g

2-2 Etudier les limites de g aux bornes de D_g

Deuxième Partie : avec des fonctions rationnelles

exercice 3 **1)** Compléter le tableau suivant en utilisant le théorème : f étant une fonction rationnelle , aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré .

l'expression donnée pour $f(x)$	rapport des termes de plus haut degré de $f(x)$	comportement de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$
1) $f(x) = \dfrac{5-2x}{3x+6}$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
2) $f(x) = \dfrac{8x+1}{2x^2+1}$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
3) $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x}{x^2+6x-4}$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
4) $f(x) = \dfrac{-2x^3+7x-1}{6x-3}$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......
5) $f(x) = \dfrac{-8x^3+5x^2-2x+4}{4x^2+3x-1}$		$\lim\limits_{-\infty} f =$ ...... et $\lim\limits_{+\infty} f =$ ......

2) Justifier les résultats précédents en utilisant une autre expression pour $f(x)$ et signaler les éventuelles droites asymptotes à la courbe C_f représentant la fonction f dans un repère d'origine O .

3) Justifier le comportement de $g(x)$ et $h(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$ avec : $g(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x}$ et $h(x) = -2x^3 + x^2 + 5 - \dfrac{2}{x^2}$

exercice 4 f est une fonction rationnelle représentée dans un repère d'origine O par une courbe notée C_f .

Calculer les limites demandées dans le tableau suivant et signaler les éventuelles droites asymptotes à C_f

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut étudier
1) $f(x) = \dfrac{5}{3x+6}$	$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$	$\lim\limits_{1} f$ puis $\lim\limits_{-2^+} f$ et $\lim\limits_{-2^-} f$
2) $f(x) = \dfrac{-2x^2+5x}{x^2+3x-4}$	$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$	$\lim\limits_{1^+} f$ et $\lim\limits_{1^-} f$ puis $\lim\limits_{-4^+} f$ et $\lim\limits_{-4^-} f$
3) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{9x^2-36x+36}$	$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$	$\lim\limits_{\sqrt{3}} f$ puis $\lim\limits_{2^+} f$ et $\lim\limits_{2^-} f$
4) $f(x) = -4x+1-\dfrac{2}{x-3}$	$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$	$\lim\limits_{3^+} f$ et $\lim\limits_{3^-} f$
5) $f(x) = -2x^3+x+\dfrac{2}{3x^2}$	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{0^-} f$

exercice 5 **1)** On considère $f : x \longmapsto f(x)$ avec : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$

1-1 Préciser l'ensemble de définition D_f de f puis pour x élément de D_f écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

1-2 Etudier les limites de f aux bornes de D_f **1-3** Démontrer que la courbe C_f possède la droite $\Delta : y = x+2$ comme droite asymptote $<$ oblique $>$ puis étudier la position relative de C_f et de Δ

2) mêmes questions pour la fonction $g : x \longmapsto g(x)$ avec : $g(x) = \dfrac{-2x^2-6x+5}{2x+3}$ $\left(\text{avec } g(x) = ax+b+\dfrac{c}{2x+3}\right)$

exercice 6 On considère $f : x \longmapsto f(x)$ avec : $f(x) = \dfrac{4x^3-13x+13}{2x^2+x-6}$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f puis étudier les limites de f aux bornes de D_f

2) Déterminer les réels a , b , c et d tels que : $\forall x \in D_f$, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2}+\dfrac{d}{2x-3}$

3) Démontrer que la courbe C_f possède la droite $\Delta : y = 2x-1$ comme droite asymptote $<$ oblique $>$ puis étudier la position relative de C_f et de Δ

Troisième Partie : avec des fonctions utilisant des radicaux

exercice 7 Calculer les limites indiquées dans le tableau suivant

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut étudier
1) $f(x) = \sqrt{2x-5}$	$D_f = \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$	$\lim\limits_{+\infty} f$
2) $x^2+2\sqrt{x}$	$D_f = \mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{+\infty} f$
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{2x-1}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$	$\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$
4) $f(x) = \sqrt{4x^2+2x+1}$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$
5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	$D_f =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$	$\lim\limits_{+\infty} f$ puis $\lim\limits_{1^+} f$
6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2+5}{x^2+1}}$	$D_f = \mathbb{R}$	$\lim\limits_{-\infty} f$
7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2(2x+7)}}{3x^2+9x-12}$	$D_f = \left[-\dfrac{7}{2}, +\infty\right[- \{1\}$	$\lim\limits_{1^+} f$ et $\lim\limits_{1^-} f$

exercice 8 Dans chacun des cas suivants $f(x)$ est de la forme $\sqrt{ax^2+bx+c}-(mx+p)$ avec $a>0$.

Le polynôme ax^2+bx+c étant toujours du signe de a aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, $\sqrt{ax^2+bx+c}-(mx+p)$ est défini aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ avec $a>0$. Justifier les limites indiquées dans le tableau suivant

l'expression donnée pour $f(x)$	ce qu'il faut justifier
1) $f(x)=\sqrt{16x^2+8x+3}-2x$	$\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$
2) $f(x)=\sqrt{4x^2-7x+5}+7x+3$	$\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$
3) $f(x)=\sqrt{25x^2-30x+12}-5x+3$	$\lim\limits_{+\infty} f=0$
4) $f(x)=\sqrt{2x^2+10x+3}-x\sqrt{2}$	$\lim\limits_{+\infty} f=\frac{5\sqrt{2}}{2}$
5) $f(x)=\sqrt{16x^2+8x+3}-4x+1$	$\lim\limits_{+\infty} f=2$

Quatrième Partie : une situation particulière lorsque x tend vers x_0

exercice 9 Dans chacun des cas suivants : $f(x)$ est un quotient du type $\dfrac{N(x)}{D(x)}$.

On demande d'étudier les limites de f en x_{0^-} et en x_{0^+} lorsque le tableau de situation est :

$N(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}N(x_0)=0$
$D(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}D(x_0)=0$

9 - 1 $f(x)$ est une fraction rationnelle non définie en x_0

l'expression donnée pour $f(x)$	on donne aussi D_f	ce qu'il faut justifier
1) $f(x)=\dfrac{4x^2-36}{x+3}$	$D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$	$\lim\limits_{-3^-} f=\lim\limits_{-3^+} f=-24=\lim\limits_{-3} f$
2) $f(x)=\dfrac{-5x^2+11x-2}{-7x^2+17x-6}$	$D_f=\mathbb{R}-\left\{2,\dfrac{3}{7}\right\}$	$\lim\limits_{2^-} f=\lim\limits_{2^-} g=\dfrac{9}{11}=\lim\limits_{2} f$
3) $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^2+5x+1}$	$D_f=\mathbb{R}-\left\{-1,-\dfrac{1}{4}\right\}$	$\lim\limits_{-1^-} f=\lim\limits_{-1^+} f=0=\lim\limits_{-1} f$
4) $f(x)=\dfrac{x^4-x^3}{x^4-3x^3+3x^2-x}$	$D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$	$\lim\limits_{1^+} f=+\infty$ et $\lim\limits_{1^-} f=+\infty$; $\lim\limits_{0^+} f=\lim\limits_{0^-} f=0=\lim\limits_{0} f$
5) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-6}{x^4-8x^2+16}$	$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$	$\lim\limits_{2^-} f=-\infty$ et $\lim\limits_{2^+} f=+\infty$
6) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{3x^2+x-4}$	$D_f=\mathbb{R}-\{1,-\frac{4}{3}\}$	$\lim\limits_{1^-} f=\lim\limits_{1^+} f=0=\lim\limits_{1} f$.

9 - 2 $f(x)$ est un quotient non défini en x_0

l'expression de $f(x)$ et D_f	à justifier	l'expression donnée pour $f(x)$ et D_f	à justifier
1) $f(x)=\dfrac{\lvert x-3\rvert}{x-3}$ $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$	$\lim\limits_{3^-} f=-1$, $\lim\limits_{3^+} f=1$	**5)** $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$ $D_f=\mathbb{R}^+-\{4\}$	$\lim\limits_{4} f=-3$
2) $f(x)=\dfrac{\lvert x^2-5x\rvert}{x^2-x}$ $D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$	$\lim\limits_{0^-} f=5$, $\lim\limits_{0+} f=-5$	**6)** $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}-2}$ $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$	$\lim\limits_{0^-} f=-\infty$, $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$
3) $f(x)=\dfrac{\lvert x+1\rvert}{2x^2-x-3}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1,\dfrac{3}{2}\right\}$	$\lim\limits_{-1^-} f=\dfrac{1}{5}$, $\lim\limits_{-1^+} f=-\dfrac{1}{5}$	**7)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{8x+1}-4x+1}{-2x^2+9x-7}$ $D_f=\left[-\dfrac{1}{8},+\infty\right[-\left\{1,\dfrac{7}{2}\right\}$	$\lim\limits_{1} f=-\dfrac{8}{15}$
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{(x-3)^2}$ $D_f=\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[-\{3\}$	$\lim\limits_{3^-} f=-\infty$, $\lim\limits_{3^+} f=+\infty$	**8)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}{x^2+2x-3}$ $D_f=[-1,+\infty[-\{1\}$	$\lim\limits_{1^-} f=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\lim\limits_{1^+} f=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$