Limites - corrigés feuille 2
Vrai ? Faux ?

exercice 1 **1)** Les énoncés proposés sont-ils vrais ou faux ?

l'énoncé	son contenu (la lettre x désigne un réel quelconque)	vrai ? ou faux ?
énoncé 1	Avec $f(x)=\dfrac{x^2+1}{4x^2+5x-9}$, C_f possède trois droites asymptotes	**VRAI**
énoncé 2	Avec $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2-2x}{x^2+x}$, C_f possède une droite asymptote d'équation : $y=2x$	**VRAI**
énoncé 3	Avec $f(x)=\dfrac{-4x^2+5x+4}{2\|x\|}$, deux droites asymptotes à C_f sont obliques	**VRAI**
énoncé 4	Avec $f(x)=\sqrt{\dfrac{9x^2+4}{4x^2+1}}$, C_f possède une droite asymptote d'équation : $y=\dfrac{3}{2}$	**VRAI**
énoncé 5	Avec $f(x)=\dfrac{\left\|2x^4+5x^2\right\|+3}{x^2}$, C_f possède deux paraboles asymptotes	**FAUX**
énoncé 6	Avec $f(x)$ défini par : $\begin{cases} f(x)=3x^2+4x \Leftrightarrow x>-1 \\ f(x)=ax+7 \Leftrightarrow x\leq -1\end{cases}$, f est continue en -1 ssi a vaut 8	**VRAI**
énoncé 7	Avec $f(x)=\dfrac{4x^2+x+1}{9-x^2}$ on a : $\lim\limits_{3^+} f=+\infty$ et $\lim\limits_{3^-} f=-\infty$	**FAUX**
énoncé 8	Avec $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2-4x}$ on a : $\lim\limits_{0} f=-\dfrac{1}{4}$	**FAUX**
énoncé 9	si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$	**FAUX**
énoncé 10	si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$	**FAUX**

2) Justifier la réponse pour chacun des énoncés $2,4,6,8,10$.

énoncé 1 VRAI $f(x)=\dfrac{x^2+1}{4x^2+5x-9}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\left\{1,-\dfrac{9}{4}\right\}}$ En effet : pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow 4x^2+5x-9=0$.

Or : $4(1)^2+5(1)-9=4+5-9=0$. Donc 1 est racine de $4x^2+5x-9$ et $4x^2+5x-9$ est factorisable par $x-1$.

D'où : $4x^2+5x-9=(x-1)(4x+9)$ et : $x\notin D_f \Leftrightarrow (x-1)(4x+9)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $4x+9=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{9}{4}$.

situation $x\to 1$

$N(x)=x^2+1$	$N(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow} N(1)=2$ <u>réel non nul</u>
$D(x)=4x^2+5x-9$	$D(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow} \underline{0}$

Donc $\lim\limits_{1^-} f$ et $\lim\limits_{1^+} f$ infinies et D_1 : $x=1$ est une première droite asymptote à la courbe C_f

situation $x\to -\dfrac{9}{4}$

$N(x)=x^2+1$	$N(x)\underset{x\to -\frac{9}{4}}{\longrightarrow} N\left(-\dfrac{9}{4}\right)=\dfrac{97}{16}$ <u>réel non nul</u>
$D(x)=4x^2+5x-9$	$D(x)\underset{x\to -\frac{9}{4}}{\longrightarrow} \underline{0}$

Donc $\lim\limits_{-\frac{9}{4}^-} f$ et $\lim\limits_{-\frac{9}{4}^+} f$ infinies et D_2 : $x=-\dfrac{9}{4}$ est une deuxième droite asymptote à la courbe C_f

Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{x^2}{4x^2}$ soit à : $\dfrac{1}{4}$.

Donc : $\lim\limits_{-\infty} f=\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{+\infty} f=\dfrac{1}{4}$ et D_3 : $y=\dfrac{1}{4}$ est une troisième droite asymptote à la courbe C_f et l'énoncé 1 est vrai .

énoncé 2 VRAI $f(x)=\dfrac{2x^3+2x^2-2x}{x^2+x}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-1,0\}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\notin D_f \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

Pour justifier que la droite Δ : $y=2x$ est une droite asymptote à la courbe C_f il suffit de prouver : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=0 \end{cases}$

Avec x élément de D_f : $f(x)-2x=\dfrac{2x^3+2x^2-2x}{x^2+x}-2x=\dfrac{2x^3+2x^2-2x-2x(x^2+x)}{x^2+x}=\dfrac{2x^3+2x^2-2x-2x^3-2x^2}{x^2+x}$

$f(x)-2x=\dfrac{-2x}{x^2+x}=\dfrac{-2x}{x(x+1)}=\dfrac{-2}{x+1}=-2\times\dfrac{1}{x+1}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty \text{ entraîne } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty \text{ entraîne } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0 \end{cases}$.

Donc : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x+1}=-2(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x+1}=-2(0)=0 \end{cases}$ et l'énoncé 2 est vrai

énoncé 3 VRAI $f(x)=\dfrac{-4x^2+5x+4}{2\,|x|}$ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{0\}}$. En effet : pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$

Au voisinage de $-\infty$, on peut supposer $x<0$ et $|x|=-x$. D'où : $f(x)=\dfrac{-4x^2+5x+4}{-2x}=2x-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{x}$.

Ainsi : $f(x)-\left(2x-\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(2x-\dfrac{5}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-2\left(\dfrac{1}{x}\right)=-2(0)=0$.

La droite $\Delta_1 : y=2x-\dfrac{5}{2}$ est une droite asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x>0$ et $|x|=x$. D'où : $f(x)=\dfrac{-4x^2+5x+4}{2x}=-2x+\dfrac{5}{2}+\dfrac{2}{x}$.

Ainsi : $f(x)-\left(-2x+\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(-2x+\dfrac{5}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(\dfrac{1}{x}\right)=2(0)=0$.

La droite $\Delta_2 : y=-2x+\dfrac{5}{2}$ est une droite asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

L'énoncé 3 est vrai .

énoncé 4 VRAI $f(x)=\sqrt{\dfrac{9x^2+4}{4x^2+1}}$; on a $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=\dfrac{9x^2+4}{4x^2+1}$

$\boxed{D_f=\mathbb{R}}$ En effet : pour tout réel x , $x\in D_f \Leftrightarrow 4x^2+1\neq 0$ et $\dfrac{9x^2+4}{4x^2+1}\geq 0$. D'autre part :

$\rightarrow$ On a : $9>0$ et pour tout réel x , $x^2\geq 0$. Donc pour tout réel x , $9x^2\geq 0$ puis $9x^2+4\geq 4$.

Or : $4>0$. Donc : pour tout réel x , $9x^2+4>0$.

$\rightarrow$ On a : $4>0$ et pour tout réel x , $x^2\geq 0$. Donc pour tout réel x , $4x^2\geq 0$ puis $4x^2+1\geq 1$.

Or : $1>0$. Donc : pour tout réel x , $4x^2+1>0$ et $4x^2+1\neq 0$ vrai .

Par conséquent : pour tout réel x , $4x^2+1\neq 0$ et $\dfrac{9x^2+4}{4x^2+1}\geq 0$. D'où : $D_f=\mathbb{R}$.

comportement de $f(x)$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ $f(x)=\sqrt{u(x)}$

u étant une fonction rationnelle , aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, $u(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à $\dfrac{9x^2}{4x^2}$ soit à $\dfrac{9}{4}$. Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$.

En posant $X=u(x)$ on déduit ensuite :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{u(x)}=\lim\limits_{X\to\frac{9}{4}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{u(x)}=\lim\limits_{X\to\frac{9}{4}}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$.

Ainsi : $\lim\limits_{-\infty}f=\dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{+\infty}f=\dfrac{3}{2}$. Ces deux limites étant égales au réel $\dfrac{3}{2}$ on peut affirmer que la droite d'équation réduite $y=\dfrac{3}{2}$ est une droite asymptote à la courbe C_f . L'énoncé 4 est donc vrai .

énoncé 5 FAUX $f(x)=\dfrac{\left|2x^4+5x^2\right|+3}{x^2}$. $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{0\}}$. En effet : pour tout réel x , $x\notin D_f \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue x désigne un réel non nul . On a : $f(x)=\dfrac{\left|2x^4+5x^2\right|+3}{x^2}=\dfrac{\left|x^2(2x^2+5)\right|+3}{x^2}$

D'autre part : $\rightarrow$ pour tout réel x , $x^2\geq 0$

$\rightarrow$ Avec $2>0$ et pour tout réel x , $x^2\geq 0$ on obtient pour tout réel x , $2x^2\geq 0$ puis $2x^2+5\geq 5$.

Or : $5>0$. Donc : pour tout réel x , $2x^2+5>0$

Par conséquent : pour tout réel x , $x^2(2x^2+5)\geq 0$ et $\left|x^2(2x^2+5)\right|=x^2(2x^2+5)$

On déduit ensuite pour $f(x)$: $f(x)=\dfrac{x^2(2x^2+5)+3}{x^2}=2x^2+5+\dfrac{3}{x}$

courbes asymptotes à C_f

$\rightarrow$ l'axe $(Oy) : x=0$ est asymptote à C_f car : $\lim\limits_{0^+}f=+\infty$ et $\lim\limits_{0^-}f=+\infty$. En effet : avec $f(x)=\left(\left|2x^4+5x^2\right|+3\right)\times\dfrac{1}{x^2}$

• $\lim\limits_{x\to 0}\left|2x^4+5x^2\right|+3=\left|2(0)^4+5(0)^2\right|+3=3$ • $x\neq 0$ entraîne $x^2>0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet de déduire (avec $3>0$)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\left|2x^4+5x^2\right|+3\right)\times\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\left|2x^4+5x^2\right|+3\right)\times\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ soit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty$

→ la parabole d'équation : $y = 2x^2 + 5$ est une courbe asymptote à C_f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$. En effet :

Avec $f(x) = 2x^2 + 5 + \dfrac{3}{x}$ on a : $f(x) - \left(2x^2 + 5\right) = \dfrac{3}{x}$. Par conséquent :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \left(2x^2 + 5\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(2x^2 + 5\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3(0) = 0$

La parabole d'équation : $y = 2x^2 + 5$ répond bien à la définition d'une courbe asymptote à C_f et C_f ne possède qu'une seule parabole asymptote . L'énoncé 5 est donc faux .

énoncé 6 VRAI $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 4x \Leftrightarrow x > -1 \\ f(x) = ax + 7 \Leftrightarrow x \leq -1 \end{cases}$ Par définition f est continue en -1 si et seulement si f admet une limite en -1 vérifiant : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ ce qui est vrai si et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1)$

D'autre part : → $f(-1) = a(-1) + 7 = -a + 7$

→ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} ax + 7 = a(-1) + 7 = -a + 7$

→ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 3x^2 + 4x = 3(-1)^2 + 4(-1) = 3 - 4 = -1$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow -1 = -a + 7 \Leftrightarrow a = 7 + 1 \Leftrightarrow a = 8$

Ainsi : f est continue en -1 ssi a vaut 8 . L'énoncé 6 est vrai .

énoncé 7 FAUX Avec x élément de D_f , $f(x) = \dfrac{4x^2 + x + 1}{9 - x^2} = \dfrac{4x^2 + x + 1}{(3 - x)(3 + x)} = \dfrac{4x^2 + x + 1}{-(x - 3)(3 + x)} = \dfrac{4x^2 + x + 1}{-(3 + x)} \times \dfrac{1}{x - 3}$

→ déduction du comportement de $f(x)$ au voisinage de 3 . On a : **1)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 + x + 1}{-(3 + x)} = \dfrac{4(3)^2 + 3 + 1}{-(3 + 3)} = \dfrac{40}{-6} = -\dfrac{20}{3}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ car $x < 3$ entraîne $x - 3 < 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{1}{x - 3} = +\infty$ car $x > 3$ entraîne $x - 3 > 0$

Le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions permet ensuite de déduire $\left(\text{avec } -\dfrac{20}{3} < 0\right)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{4x^2 + x + 1}{-(3 + x)} \times \dfrac{1}{x - 3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{4x^2 + x + 1}{-(3 + x)} \times \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ soit : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{3^+} f = +\infty$ est donc faux et l'énoncé 7 est faux .

énoncé 8 FAUX $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}}$. En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$ et donc : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2 - 4x} = \dfrac{|x|}{x^2 - 4x}$

Pour écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue , on se place aux voisinages 0^- et 0^+ . On obtient ainsi :

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x < 0}$

$x < 0$ entraîne $|x| = -x$

Donc : $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 4x}$ devient : $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 4x}$

D'où : $f(x) = \dfrac{-x}{x(x - 4)} = \dfrac{-1}{x - 4}$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-1}{x - 4} = \dfrac{-1}{0 - 4} = \dfrac{1}{4}$

Ainsi : $\lim\limits_{0^-} f = \dfrac{1}{4}$

$\boxed{\text{avec } x \in D_f \text{ et } x > 0}$

$x > 0$ entraîne $|x| = x$

Donc : $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 4x}$ devient : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x}$

D'où : $f(x) = \dfrac{x}{x(x - 4)} = \dfrac{1}{x - 4}$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x - 4} = \dfrac{1}{0 - 4} = -\dfrac{1}{4}$

Ainsi : $\lim\limits_{0^+} f = -\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{0^-} f \neq \lim\limits_{0^+} f$ donc : f n'admet pas de limite en 0 . L'énoncé 8 est donc faux .

énoncé 9 FAUX **contre-exemple** : avec $f(x) = -x$ et $g(x) = -2x$ on a : $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ vrai . En effet :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ (car $-1 < 0$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ (car $-2 < 0$) .

Par contre : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x - (-2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$ est donc faux avec $f(x) = -x$ et $g(x) = -2x$. L'énoncé 9 est faux .

<u>**énoncé 10 FAUX**</u> **contre-exemple** : $f(x) = -x$ et $g(x) = x^3$ on a : $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ vrai . En effet :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ (car $-1 < 0$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Par contre : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = -(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ est donc faux avec $f(x) = -x$ et $g(x) = x^3$. L'énoncé 10 est faux .

exercice 2

1) Les énoncés proposés sont-ils vrais ou faux ? .

l'énoncé	son contenu (la lettre x désigne un réel quelconque)	vrai ? ou faux ?
énoncé 1	Avec $f(x) = \dfrac{5-3x}{x^2-4x+4}$, C_f possède trois droites asymptotes	**FAUX**
énoncé 2	Avec $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+1}{2x-1}$, C_f possède une droite asymptote oblique	**VRAI**
<u>énoncé 3</u>	Avec $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x}{x^2}$, la droite Δ : $y = x+2$ est asymptote à C_f	**VRAI**
énoncé 4	Avec $f(x) = \dfrac{5x^3+6x^2-2}{x^2+1}$, C_f possède une droite asymptote d'équation : $y = 5x$	**FAUX**
énoncé 5	Avec $f(x)$ défini par : $\begin{cases} f(x) = 3x^2+4x-2 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x-1} \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$, f est continue en 1	**FAUX**
<u>énoncé 6</u>	Avec $f(x) = \dfrac{-6x^2+x-1}{x^2-4}$ on a : $\lim\limits_{-2^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-2^-} f = -\infty$	**VRAI**
<u>énoncé 7</u>	Avec $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x-2}$ on a : $\lim\limits_{1} f = \dfrac{1}{6}$	**VRAI**
<u>énoncé 8</u>	si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = 0$	**FAUX**
<u>énoncé 9</u>	si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$	**FAUX**
énoncé 10	si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$	**FAUX**
<u>énoncé 11</u>	si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = 0$	**FAUX**
énoncé 12	f et g admettent une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	**VRAI**

2) Justifier votre réponse pour les énoncés soulignés dans le tableau précédent .

<u>**énoncé 1 FAUX**</u> $f(x) = \dfrac{5-3x}{x^2-4x+4}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$ En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2-4x+4 = 0$.

Et : $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2-4x+4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

situation $x \to 2$

$N(x) = 5-3x$	$N(x) \underset{x\to2}{\longrightarrow} N(2) = -1$ <u>réel non nul</u>
$D(x) = x^2-4x+4$	$D(x) \underset{x\to2}{\longrightarrow} \underline{0}$

Donc $\lim\limits_{2^-} f$ et $\lim\limits_{2^+} f$ infinies et D_1 : $x = 2$ est une première droite asymptote à la courbe C_f

Aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{-3x}{x^2} = -\dfrac{3}{x} = -3\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Donc : $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} -3\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} -3\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3(0) = 0$.

Ces deux limites étant égales à 0 , l'axe (Oy) : $y = 0$ est une deuxième droite asymptote à la courbe C_f . C_f ne possède que deux droites asymptotes et l'énoncé 1 est faux .

<u>**énoncé 2 VRAI**</u> $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+1}{2x-1}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$ En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

A savoir ! avec f fonction rationnelle telle que $\forall x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $deg(N) = deg(D)+1$, on peut toujours écrire $f(x)$ sous la forme $ax+b+R(x)$ avec $a \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} R(x)$ (ax n'est autre que le rapport des termes de plus haut degré de $f(x)$ après sa simplification) . La droite d'équation réduite $y = ax+b$ répond alors à la définition d'une droite asymptote oblique à la courbe C_f car : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b) = \lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = \lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0 \end{cases}$

Avec $f(x) = \dfrac{-4x^2+3x+1}{2x-1}$ on obtient $f(x) = -2x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2\,(2x-1)}$ donc : $R(x) = \dfrac{3}{2\,(2x-1)} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2x-1}$

$2 > 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$ ce qui entraîne : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x-1} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-2x+\dfrac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2\,(2x-1)} = \dfrac{3}{2}(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-2x+\dfrac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2\,(2x-1)} = \dfrac{3}{2}(0) = 0$

La courbe C_f possède bien une droite asymptote oblique d'équation : $y = -2x + \dfrac{1}{2}$. L'énoncé 2 est vrai .

énoncé 3 VRAI $\quad f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x}{x^2}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{0\}}$ En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Avec x élément de D$_f$, $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x}{x^2} = \dfrac{x^3}{x^2} + \dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{3x}{x^2} = x+2+\dfrac{3}{x} = x+2+3\left(\dfrac{1}{x}\right)$. D'où : $f(x)-(x+2) = 3\left(\dfrac{1}{x}\right)$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3(0) = 0$.

la droite Δ : $y = x+2$ est bien une droite asymptote à C_f et l'énoncé 3 est vrai .

énoncé 4 FAUX $\quad f(x) = \dfrac{5x^3+6x^2-2}{x^2+1}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ En effet : pour tout réel x , $x \notin D_f \Leftrightarrow x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

Or : $-1 < 0$ et pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Donc : pour tout réel x , $x^2 \neq -1$ et $x \in D_f$.

Avec x réel , $f(x) - 5x = \dfrac{5x^3+6x^2-2}{x^2+1} - 5x = \dfrac{5x^3+6x^2-2-5x(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{5x^3+6x^2-2-5x^3-5x}{x^2+1}$

$f(x) - 5x = \dfrac{6x^2-5x-2}{x^2+1}$ et au voisinage de $+\infty$ on peut supposer $x \neq 0$. Donc : $f(x) - 5x = \dfrac{x^2\left(6-\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{6-\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 5x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6-\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{6-5(0)-2(0)}{1+(0)} = 6$ et $6 \neq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 5x \neq 0$ donc $D : y = 5x$ n'est pas une droite asymptote à C_f . L'énoncé 4 est faux .

remarque : $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec $deg(N) = deg(D) + 1$: après simplification le rapport de ses termes de plus haut degré de $f(x)$ ne donne que le début "$5x$" de l'équation réduite de la droite asymptote oblique à C_f

pour l'exemple traité , on a en fait $f(x) = \dfrac{5x^3+6x^2-2}{x^2+1} = 5x+6-\dfrac{5x+8}{x^2+1} = 5x+6+R(x)$ avec $R(x) = \dfrac{5x+8}{x^2+1}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (5x+6) = \lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (5x+6) = \lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0 \end{cases}$ (en effet : aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, $R(x)$ se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré égal à : $\dfrac{5x}{x^2} = \dfrac{5}{x} = 5\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$)

énoncé 7 FAUX $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x-2}$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{1,-2\}}$ En effet : pour tout réel x , $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3 \geq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ entraîne pour tout réel x , $x^2+3 \geq 3$. Or : $3 > 0$. Donc : pour tout réel x , $x^2+3 > 0$

$\rightarrow$ 1 est une racine de x^2+x-2 car : $(1)^2+(1)-2 = 1+1-2 = 0$. Donc x^2+x-2 est factorisable par $x-1$

et pour tout réel x , $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$. D'où : $x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

Par conséquent : $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3 \geq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1,-2\}$

situation $x \to 1$

$N(x) = \sqrt{x^2+3}-2$	$N(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \sqrt{4}-2 = 0$
$D(x) = x^2+x-2$	$D(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$

méthode : multiplier $N(x)$ et $D(x)$ par la quantité conjuguée de $\sqrt{x^2+3}-2$ puis simplifier $f(x)$ par $x-1$

$\rightarrow$ une autre expression de $f(x)$ avec x élément de D$_f$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x-2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2)^2}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{x^2+3-4}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{(x+1)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

Ainsi : $f(x) = g(x)$ en posant : $g(x) = \dfrac{(x+1)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$

g est une fonction quotient définie et continue en 1 donc :

$\lim\limits_{1^-} g = \lim\limits_{1^+} g = \lim\limits_{1} g = g(1) = \dfrac{1+1}{(1+2)\left(\sqrt{1^2+3}+2\right)} = \dfrac{2}{3(4)} = \dfrac{1}{6}$. D'où : $\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{1^-} g = \dfrac{1}{6}$ et $\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{1^+} g = \dfrac{1}{6}$.

Ayant : $1 \notin D_f$, $\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{1^+} f = \dfrac{1}{6}$ on déduit : f admet une limite en 1 et $\lim\limits_{1} f = \dfrac{1}{6}$. L'énoncé 7 est vrai .

<u>**énoncé 8 FAUX**</u> **contre-exemple** : avec $f(x) = x$ et $g(x) = -x+1$ on a : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ vrai . En effet :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty$ (car $-1 < 0$) .

Par contre : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + (-x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $1 \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = 0$ est donc faux avec $f(x) = x$ et $g(x) = -x+1$. L'énoncé 8 est faux .

<u>**énoncé 9 FAUX**</u> **contre-exemple** : avec $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ on a : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ vrai . En effet :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par contre : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $0 \neq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ est donc faux avec $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. L'énoncé 9 est faux .

<u>**énoncé 10 FAUX**</u> **contre-exemple** : avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ on a : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ vrai . En effet :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Par contre : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ est donc faux avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. L'énoncé 10 est faux .

<u>**énoncé 11 FAUX**</u> **contre-exemple** : avec $f(x) = x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ on a : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ vrai . En effet :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Par contre : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \times \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times g(x) = 0$ est donc faux avec $f(x) = x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. L'énoncé 11 est faux .

<u>**énoncé 12 VRAI**</u> <u>une remarque en préalable :</u> le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est défini au voisinage de $+\infty$ avec $f(x)$ et $g(x)$ définis au voisinage de $+\infty$ (soit sur un intervalle du type $]A, +\infty[$) et $g(x)$ ne s'annulant pas sur cet intervalle .

On se place ensuite dans ces conditions et on note : $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$. On a donc : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + R(x)$ puis $f(x) = g(x)\left[1 + R(x)\right]$

D'autre part : si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$ soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

On peut donc construire l'égalité suivante : $f(x) = g(x)\left[1 + R(x)\right]$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

<u>comparaison des limites de f et de g en $+\infty$</u>

Avec le théorème concernant la limite d'une somme de deux fonctions on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + R(x) = 1 + 0 = 1$.

Cette limite n'étant pas nulle le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions est toujours applicable au produit $g(x)\left[1 + R(x)\right]$ et permet d'obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\left[1 + R(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

L'égalité $f(x) = g(x)\left[1 + R(x)\right]$ permet ensuite de déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

L'énoncé 12 est donc vrai .

<u>remarque :</u> de telles fonctions sont dites fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.