Calculer des limites - des méthodes

f est une fonction polynôme **on demande :** $\lim\limits_{-\infty} f$ **et** $\lim\limits_{+\infty} f$	**utiliser le théorème :** f étant une fonction polynôme , aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, f(x) se comporte comme son terme de plus haut degré **et utiliser les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions puissances** du type : $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$
f est une fonction polynôme **on demande :** $\lim\limits_{x_0} f$ **avec** x_0 **réel**	**utiliser le théorème :** une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ autrement dit : avec f fonction polynôme : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$
f est une fonction rationnelle **situation 1 :** $x_0 \in D_f$ **on demande :** $\lim\limits_{x_0} f$	**utiliser le théorème :** une fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition autrement dit : avec f fonction rationnelle : $\forall x_0 \in D_f$, $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$
f est une fonction rationnelle **situation 2 :** **en** $-\infty$ **et en** $+\infty$ **on demande :** $\lim\limits_{-\infty} f$ **et** $\lim\limits_{+\infty} f$	**utiliser le théorème :** f étant une fonction rationnelle , aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, f(x) se comporte comme le rapport de ses termes de plus haut degré **après simplication , ce rapport est de l'une des trois formes suivantes (avec** $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ **et** $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ **)** forme 1 : $k\ x^n$. Dans ce cas : $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ sont infinies forme 2 : k . Dans ce cas : $\lim\limits_{+\infty} f = k = \lim\limits_{-\infty} f$ et $\Delta : y = k$ est une droite asymptote à la courbe C_f forme 3 : $k \times \dfrac{1}{x^n}$. Dans ce cas : $\lim\limits_{+\infty} f = 0 = \lim\limits_{-\infty} f$ et $\Delta : y = 0$ est une droite asymptote à la courbe C_f
f est une fonction rationnelle f est définie par : $\forall x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ **situation 3 - 1 :** $\begin{cases} x_0 \notin D_f \text{ soit } D(x_0) = 0 \\ N(x_0) \neq 0 \end{cases}$ **on demande :** $\lim\limits_{x_0^-} f$ **et** $\lim\limits_{x_0^+} f$ tableau de situation lorsque x tend vers x_0 : $N(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} N(x_0)$ réel non nul $D(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} D(x_0) = 0$ **cette situation conduit à :** $\lim\limits_{x_0^-} f$ **et** $\lim\limits_{x_0^+} f$ **infinies** **et à l'existence d'une droite asymptote à la courbe Cf d'équation réduite :** $x = x_0$	**Dans cette situation 3-1 où :** $x_0 \notin D_f$ **soit** $D(x_0) = 0$ **et** $N(x_0) \neq 0$ le polynôme D(x) , ayant x_0 comme racine est factorisable par $x - x_0$ et peut s'écrire sous la forme $(x - x_0)^n Q(x)$ avec $\begin{cases} \text{n entier naturel supérieur à 1} \\ \text{Q(x) ne s'annulant pas en } x_0 \end{cases}$. **D'où la démarche suivante :** 1) **factoriser au mieux** D(x) par $x - x_0$ pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}$, $D(x) = (x - x_0)^n Q(x)\ avec\ Q(x_0) \neq 0$ 2) en déduire une **expression " produit " pour f(x)** : $\forall x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{N(x)}{Q(x)} \times \dfrac{1}{(x - x_0)^n}\ avec\ Q(x_0) \neq 0$ 3) **calculer** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{N(x)}{Q(x)}$ (• cette limite existe car $Q(x_0) \neq 0$ entraîne : $x \longmapsto \dfrac{N(x)}{Q(x)}$ définie et continue en x_0 ; • cette limite réelle, égale à $\dfrac{N(x_0)}{Q(x_0)}$, est non nulle car $N(x_0) \neq 0$ 4) **en tenant compte du signe de** $(x - x_0)^n$, préciser : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{1}{(x - x_0)^n}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{1}{(x - x_0)^n}$ (limites infinies) 5) **déduire les deux limites demandées** ($\lim\limits_{x_0^+} f$ et $\lim\limits_{x_0^-} f$) en tenant compte du signe de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{N(x)}{Q(x)}$ et en utilisant le théorème concernant la limite d'un produit de deux fonctions (qui est utilisable) . **conséquence :** ces deux limites étant infinies , la droite D : $x = x_0$ est une droite asymptote à C_f

Calculer des limites - des méthodes

f est une fonction rationnelle

f est définie par : $\forall x \in D_f \ , \ f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

situation 3 - 2 : $\begin{cases} x_0 \notin D_f \text{ soit } D(x_0) = 0 \\ N(x_0) = 0 \end{cases}$

on demande : $\lim\limits_{x_0^-} f$ **et** $\lim\limits_{x_0^+} f$

tableau de situation lorsque x tend vers x_0 :

$N(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} N(x_0) = 0$
$D(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} D(x_0) = 0$

Dans cette situation $3 - 2$:

→ Le théorème concernant la limite d'un quotient n'est pas applicable

→ x_0 étant une racine commune à N(x) et D(x) , N(x) et D(x) sont factorisables par $x - x_0$ et le quotient f(x) est simplifiable par $x - x_0$

ayant $N(x_0) = 0$ et $D(x_0) = 0$, N(x) et D(x) sont factorisables par $x - x_0$. **D'où la démarche suivante :**

1) **factoriser au mieux N(x) et D(x) par $x - x_0$** pour obtenir : $\begin{cases} N(x) = (x - x_0)^k P(x) \text{ avec } P(x_0) \neq 0 \\ D(x) = (x - x_0)^n Q(x) \text{ avec } Q(x_0) \neq 0 \end{cases}$

écrire ensuite : $\forall x \in D_f \ , \ f(x) = \dfrac{(x - x_0)^k P(x)}{(x - x_0)^n Q(x)}$ **puis simplifier au mieux** le quotient $\dfrac{(x - x_0)^k P(x)}{(x - x_0)^n Q(x)}$

pour obtenir une expression simplifiée de f(x) notée g(x)

Ayant : $\forall x \in D_f \ , \ f(x) = g(x)$ on a : $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^+} g$, $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0^-} g$

2) **étudier le comportement de g(x)** au voisinage de x_0 pour déduire les deux limites demandées pour f .

Selon les valeurs de n et de k , trois cas peuvent se produire :

<u>1^{er} **cas :** $n = k$</u> . **Alors :** $g(x) = \dfrac{(x - x_0)^n P(x)}{(x - x_0)^n Q(x)} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *avec* $Q(x_0) \neq 0$; g est donc définie et continue en x_0

ainsi : $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^+} g = g(x_0)$ et $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0^-} g = g(x_0)$ avec $g(x_0) = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

Ayant : $x_0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^-} f = g(x_0)$ on peut affirmer : **f admet une limite réelle en x_0 et $\lim\limits_{x_0} f = g(x_0)$**

<u>2^{me} **cas :** $n > k$</u> . **Alors :** $n - k > 0$ et $g(x) = \dfrac{P(x)}{(x - x_0)^{n-k} Q(x)}$ avec $\underset{x \to x_0}{situation}$

$P(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} P(x_0)$ réel non nul
$(x - x_0)^{n-k} Q(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

On retrouve la situation 3 -1 : $\lim\limits_{x_0^+} g$ et $\lim\limits_{x_0^-} g$ sont donc infinies .

On déduit alors pour f : $\lim\limits_{x_0^-} f$ **et** $\lim\limits_{x_0^+} f$ **infinies et $x = x_0$ droite asymptote à C_f**

<u>3^{me} **cas :** $n < k$</u> . **Alors :** $k - n > 0$ et $g(x) = \dfrac{(x - x_0)^{k-n} P(x)}{Q(x)}$ avec $\underset{x \to x_0}{situation}$

$(x - x_0)^{k-n} P(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$
$Q(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} Q(x_0)$ réel non nul

comme dans le 1^{er} *cas* , g est définie et continue en x_0 ; d'où : $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^+} g = g(x_0) = 0$ et $\lim\limits_{x_0^-} f = \lim\limits_{x_0^-} g = g(x_0) = 0$

Ayant : $x_0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x_0^+} f = \lim\limits_{x_0^-} f = 0$ on peut affirmer : **f admet une limite réelle en x_0 et $\lim\limits_{x_0} f = 0$**

f est une fonction du type : $x \to \sqrt{u(x)}$

on demande : $\lim\limits_{?} f$ **avec ? symbolisant**

x_0 réel de D_f ou $+\infty$ ou $-\infty$

<u>**un rappel :**</u> $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout réel x on a :} \\ x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_u \\ u(x) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Démarche à suivre : 1) examiner le **comportement de u(x) au voisinage de ?**

2) utiliser le comportement trouvé pour u(x) et les limites de $X \longmapsto \sqrt{X}$ pour **déduire $\lim\limits_{?} f$ en posant X=u(x)**

trois cas sont possibles:

<u>1^{er} **cas**</u> **:** $\lim\limits_{x \to ?} u(x) = a$ **avec** $a > 0$. **Alors :** $\lim\limits_{?} f = \lim\limits_{x \to ?} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{\underline{X \to a}} \sqrt{X} = \sqrt{a}$

<u>$X \to a$</u> codifie u(x) tend vers a lorsque x tend vers ?

<u>2^{me} **cas**</u> **:** $\lim\limits_{x \to ?} u(x) = 0$ **avec** $u(x) > 0$. **Alors :** $\lim\limits_{?} f = \lim\limits_{x \to ?} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \sqrt{X} = \sqrt{0} = 0$

<u>3^{me} **cas**</u> **:** $\lim\limits_{x \to ?} u(x) = +\infty$. **Alors :** $\lim\limits_{?} f = \lim\limits_{x \to ?} \sqrt{u(x)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$