A propos des limites à connaître et des droites asymptotes

⟶ Des comportements infinis à connaître

1) fonctions puissances : $x \to x^n$ avec $n \in \mathbb{N}-\{0\}$

au voisinage de $+\infty$ on a : $x>0$ et $x^n>0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

au voisinage de $-\infty$ on a : $x<0$ et donc le signe de x^n dépend de la parité de n . k étant un entier naturel non nul on a :

$x^n>0$ ssi n est pair soit ssi : $n=2k$ et : $x^n<0$ ssi n est impair soit ssi : $n=2k+1$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k}=+\infty$ et : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty$

2) inverses des fonctions puissances : avec n non nul : → **en 0^+ :** $x^n>0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^n}=+\infty$;

→ **en 0^- :** pour n pair : $x^n>0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^n}=+\infty$; pour n impair : $x^n<0$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^n}=-\infty$

3) fonction racine carrée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ **4) fonction valeur absolue :** : $\lim\limits_{x\to+\infty} |x|=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|=+\infty$

5) inverses des fonctions du type $x\to x-x_0$ et $x\to(x-x_0)^n$ avec $n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Au voisinage de x_0 :

utile ! avec n impair $\dfrac{1}{(x-x_0)^n}$ se comporte comme $\dfrac{1}{x-x_0}$ et avec n pair $\dfrac{1}{(x-x_0)^n}$ se comporte comme $\dfrac{1}{(x-x_0)^2}$.

D'autre part : • $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \dfrac{1}{x-x_0}=-\infty$ $(x<x_0 \Rightarrow x-x_0<0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \dfrac{1}{x-x_0}=+\infty$ $(x>x_0 \Rightarrow x-x_0>0)$

• avec $x\neq x_0$ on a : $(x-x_0)^2>0$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \dfrac{1}{(x-x_0)^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \dfrac{1}{(x-x_0)^2}=+\infty$

⟶ Des comportements finis à connaître aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$

1) inverses des fonctions puissances : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ ($n\in\mathbb{N}-\{0\}$)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ ($n\in\mathbb{N}-\{0\}$)

2) fonction constante : $x\to k$ On a : $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} k=k$ et : $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} k=k$

⟶ Des comportements de f(x) à connaître au voisinage d'un réel x_0 donné

1) avec f définie en x_0 : une fonction f continue en $\mathbf{x}_0$ est une fonction vérifiant : $\lim\limits_{x\to\mathbf{x}_0} f(x)=f(\mathbf{x}_0)$. Autrement dit :

f est continue en $\mathbf{x}_0$ ssi f admet une limite à droite de $\mathbf{x}_0$, une limite à gauche de $\mathbf{x}_0$ vérifiant : $\lim\limits_{\mathbf{x}_0^+} f=\lim\limits_{\mathbf{x}_0^-} f=f(\mathbf{x}_0)$

2) avec f non définie en x_0 : f admet une limite en $\mathbf{x}_0$ si et seulement si f admet une limite à droite de $\mathbf{x}_0$, une limite à gauche de $\mathbf{x}_0$ vérifiant : $\lim\limits_{\mathbf{x}_0^+} f=\lim\limits_{\mathbf{x}_0^-} f$

⟶ A propos des trois types de droites asymptotes

type 1 : La droite $\mathcal{D}_1$ d'équation réduite : $x=\mathrm{x}_0$ $(\mathcal{D}_1//(Oy))$ est dite droite asymptote à la courbe C_f représentant f ssi l'une au moins des deux limites suivantes $\lim\limits_{x_0-} f$, $\lim\limits_{x_0+} f$ est infinie

type 2 : La droite $\mathcal{D}_2$ d'équation réduite : $y=k$ $(\mathcal{D}_2//(Ox))$

est dite : → droite asymptote à C_f ssi : $\lim\limits_{+\infty} f=k$ et $\lim\limits_{-\infty} f=k$

→ droite asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ ssi : $\lim\limits_{+\infty} f=k$

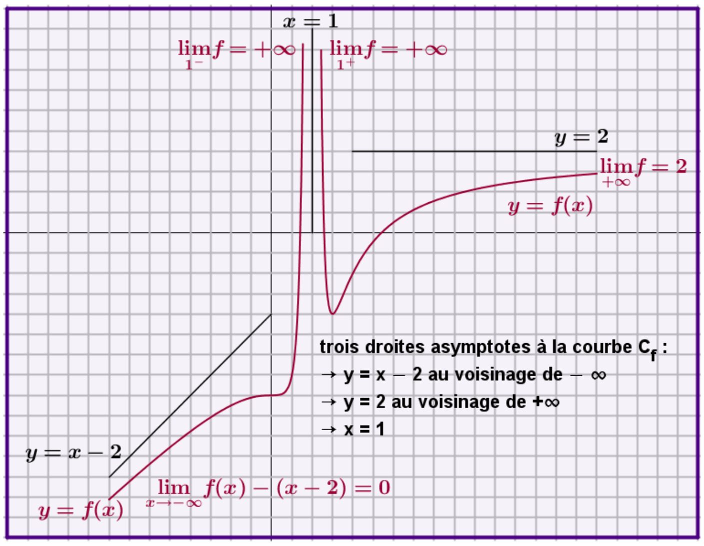
→ droite asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ ssi : $\lim\limits_{-\infty} f=k$

type 3 : Avec $a\neq0$, La droite Δ : $y=ax+b$

est dite droite asymptote < oblique > à la courbe C_f

→ au voisinage de $+\infty$ ssi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$

→ au voisinage de $-\infty$ ssi : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$



Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite asymptote Δ : $y=ax+b$ revient à comparer les ordonnées de deux points de même abscisse x ($x\in D_f$) : $\begin{cases} \to \text{l'un , noté M , situé sur } C_f \text{ et d'ordonnée : } y_M=f(x) \\ \to \text{l'autre , noté P , situé sur } \Delta \text{ et d'ordonnée : } y_p=ax+b \end{cases}$