Ordre sur $\mathbb{R}$ - Manipuler des inégalités

A propos de la relation $\leqslant$

1) l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

Dans $\mathbb{R}$ on distingue **deux catégories de réels** : $\begin{cases} \text{les réels dits } \textbf{réels positifs} \text{ dont l'ensemble est noté } \mathbb{R}^+ \\ \text{les réels dits } \textbf{réels négatifs} \text{ dont l'ensemble est noté } \mathbb{R}^- \end{cases}$

les ensembles $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ sont tels que :

→ $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ (un réel est positif ou négatif) ; $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ (0 est le seul réel qui soit à la fois positif et négatif)

→ la somme de deux réels positifs est un réel positif ; le produit de deux réels positifs est un réel positif

→ $\mathbb{R}^-$ est l'ensemble des opposés des réels positifs

2) la relation $\leqslant$

définition 1 : un réel a est dit inférieur à un réel b si et seulement si la différence b − a est positive .

On note **:** $a \leqslant b \iff b - a \in \mathbb{R}^+$

remarques : → Avec $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$, la différence $b - a$ est positive ou négative et permet donc d'écrire : $a \leq b$ ou $b \leq a$

→ $a - b$ est l'opposé de $b - a$ donc : $a \leq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^-$

→ Avec $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ on déduit : $a \leq b$ et $b \leq a \Leftrightarrow a = b$

→ Avec : $a \leq b$ et $b \leq c$ on déduit : $a \leq c$

autres vocabulaires associés à la relation $\leq$

comparaison entre les réels a et b	son écriture symbolique	ce qu'elle signifie
a est **supérieur** à b	$a \geqslant b$	$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$
a est **strictement inférieur** à b	$a < b$	$a < b \Leftrightarrow a \leq b$ et $a \neq b$
a est **strictement supérieur** à b	$a > b$	$a > b \Leftrightarrow a \geq b$ et $a \neq b$

définition 2 : étudier le signe d'un réel x revient à le comparer au réel 0 .

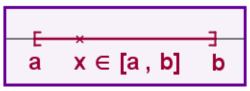
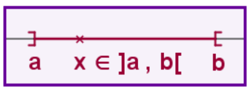
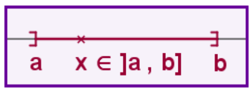
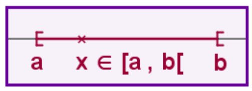
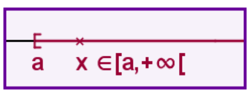
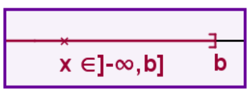
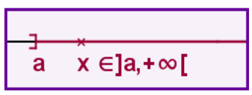
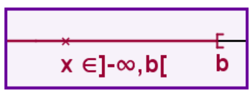
signe possible pour un réel x	écriture symbolique
x est **positif**	$x \geqslant 0$ ou bien : $0 \leq x$
x est **négatif**	$x \leqslant 0$ ou bien : $0 \geq x$
x est **strictement positif** (soit positif non nul)	$x > 0$ ou bien : $0 < x$
x est **strictement négatif** (soit négatif non nul)	$x < 0$ ou bien : $0 > x$
x est nul	$x = 0$

utile pour les exos ! comparer deux réels distincts a et b revient à étudier le signe de leur différence :

→ elle est positive lorsque cette différence est écrite dans le sens le "plus grand" − "le plus petit"

→ elle est négative lorsque cette différence est écrite dans le sens le "plus petit" − "le plus grand"

3) sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis avec des inégalités : les intervalles

l'intervalle	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	$]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$	$]\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}[$
sa propriété caractéristique	$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$	$x \in]a, b[\Leftrightarrow a < x < b$	$x \in]a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$	$x \in [a, b[\Leftrightarrow a \leq x < b$
sa représentation graphique				
l'intervalle	$[\ \mathbf{a}\ ,\ +\infty\ [$	$]-\infty\ ,\ \mathbf{b}\ ]$	$]\ \mathbf{a}\ ,\ +\infty\ [$	$]-\infty\ ,\ \mathbf{b}\ [$
sa propriété caractéristique	$x \in [a, +\infty[\Leftrightarrow x \geq a$ $x \in [a, +\infty[\Leftrightarrow a \leq x$	$x \in]-\infty, b] \Leftrightarrow x \leq b$ $x \in]-\infty, b] \Leftrightarrow b \geq x$	$x \in]a, +\infty[\Leftrightarrow x > a$ $x \in]a, +\infty[\Leftrightarrow a < x$	$x \in]-\infty, b[\Leftrightarrow x < b$ $x \in]-\infty, b[\Leftrightarrow b > x$
sa représentation graphique				

manipuler une inégalité avec l'addition des réels

Préalable : pour chacune des manipulations indiquées dans le tableau ci-dessous l'inégalité construite est de même sens que l'inégalité précédente dont elle se déduit (ou de même sens que les inégalités précédentes)

la manipulation autorisée	la règle à utiliser	des exemples d'application
ajouter ou retrancher un même réel aux deux membres d'une inégalité	$a \leqslant b \iff a+c \leqslant b+c$ $a \leqslant b \iff a-c \leqslant b-c$	• $x \leq y \Leftrightarrow x+4 \leq y+4$ • $x \leq y \Leftrightarrow x-1 \leq y-1$ • $x \leq 3 \Leftrightarrow x+5 \leq 8$ • $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+5 \geq 0+5$ soit : $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+5 \geq 5$
transférer un réel d'un des deux membres d'une inégalité vers son autre membre (c'est ajouter l'opposé de ce réel à chacun de ses deux membres)	$a+b \leqslant c \iff a \leqslant c-b$ $a-b \leqslant c \iff a \leqslant c+b$	• $2x+1 \leq 4 \Leftrightarrow 2x \leq 4-1 \Leftrightarrow 2x \leq 3$ • $3x-5 \leq 1 \Leftrightarrow 3x \leq 1+5 \Leftrightarrow 3x \leq 6$ • $7x-2 \geq 4x+5 \Leftrightarrow 7x-4x \geq 5+2$ donc : $7x-2 \geq 4x+5 \Leftrightarrow 3x \geq 7$
ajouter membre à membre deux inégalités de même sens	**si** $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ **alors :** $a+c \leqslant b+d$	avec $x \leq 3$ *et* $y \leq 5$ on construit : $x+y \leq 3+5$ soit $x+y \leq 8$

manipuler une inégalité avec la multiplication des réels

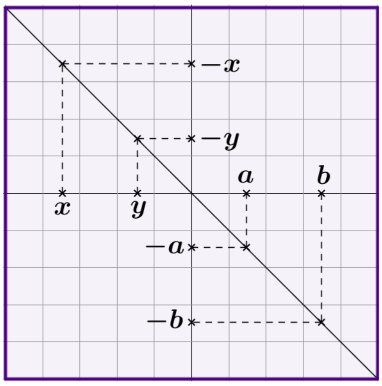
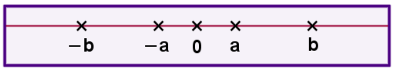
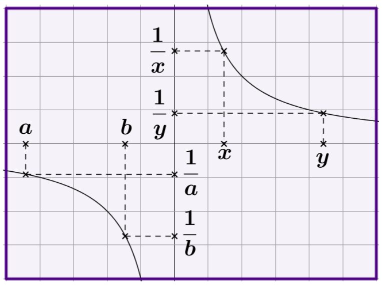
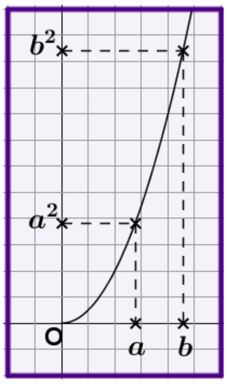
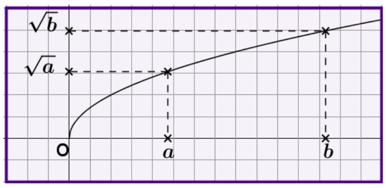
la manipulation autorisée	la règle à utiliser	des exemples d'application
multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un réel strictement positif	**Avec** $a>0$ **on a :** $\begin{cases} x<y \iff ax<ay \\ x \leqslant y \iff \frac{x}{a} \leqslant \frac{y}{a} \end{cases}$	• $x<y \Leftrightarrow 2x<2y$ • $x<5 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x<\frac{5}{4}$ • $x \leq y \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq \frac{y}{2}$
multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un réel strictement négatif	**Avec** $a<0$ **on a :** $\begin{cases} x \leqslant y \iff ax \geqslant ay \\ x>y \iff \frac{x}{a} > \frac{y}{a} \end{cases}$	• $x<y \Leftrightarrow -2x>-2y$ • $x<4 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x>-4\sqrt{3}$ • $x \leq y \Leftrightarrow \frac{x}{-2} \geq \frac{y}{-2}$
transférer un réel non nul d'un des deux membres de l'inégalité vers l'autre membre (c'est multiplier les deux membres de cette inégalité par l'inverse de ce réel non nul)	**Avec** $a>0$ **on a :** $ax<y \iff x<\frac{y}{a}$ **Avec** $a<0$ **on a :** $ax<y \iff x>\frac{y}{a}$	• $2x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$ • $\frac{3}{4}x<5 \Leftrightarrow x<5\times\frac{4}{3} \Leftrightarrow x<\frac{20}{3}$ • $-2x<5 \Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}$ • $-\frac{3}{4}x<-5 \Leftrightarrow x>-5\times-\frac{4}{3}$ donc : $\frac{3}{4}x<-5 \Leftrightarrow x>\frac{20}{3}$
multiplier membre à membre deux inégalités de même sens et à membres tous positifs	**Avec quatre réels a , b , c , d positifs :** **si** $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$ **alors :** $ac \leqslant bd$	avec x et y réels positifs vérifiant $x<5$ et $y<4$ on déduit : $xy<20$

A retenir : si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un réel négatif , on construit une nouvelle inégalité de sens contraire à celui de l'inégalité précédente .

quatre manipulations interdites

retrancher membre à membre deux inégalités de même sens	**mutiplier membre à membre deux inégalités de même sens**	**diviser membre à membre deux inégalités de même sens**	**ranger les carrés de deux réels quelconques dans le même ordre que ces deux réels**
contre - exemple : $\ominus\begin{cases} 5<6 \text{ est vrai} \\ 3<5 \text{ est vrai} \end{cases}$ mais $2<1$ est FAUX	**contre - exemple :** $\otimes\begin{cases} -1<2 \text{ est vrai} \\ -8<3 \text{ est vrai} \end{cases}$ mais $8<6$ est FAUX	**contre - exemple :** $\boxed{\div}\begin{cases} 5<6 \text{ est vrai} \\ 1<2 \text{ est vrai} \end{cases}$ mais $5<3$ est FAUX	**contre - exemple :** $-3<-2$ est vrai mais $(-3)^2<(-2)^2$ est FAUX $(-3)^2=9, (-2)^2=4$ et $9>4$

comparer des opposés , des inverses , des carrés , des racines carrées

ce qu'il faut comparer	la règle à utiliser	des exemples d'application
les opposés de deux réels  la fonction affine : $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	$x < y \iff -x > -y \iff -y > -x$ • Avec deux réels x et y , c'est le plus petit de ces deux réels qui a le plus grand opposé . Autrement dit : passer à l'opposé change l'ordre • Avec deux réels positifs a et b , c'est le réel le plus proche du réel 0 qui a le plus grand opposé 	• $x < 1 \Leftrightarrow -x > -1$ • $4 < x < 9 \Leftrightarrow -9 < -x < -4$ • pour comparer $-4,7$; 3 *et* $-2,5$ on peut adopter la démarche suivante : 1) comme seul nombre positif , 3 est le plus grand de ces trois nombres 2) on compare -4.7 et $-2,5$: 2,5 est plus proche de 0 que 4,7 donc c'est 2,5 qui a le plus grand opposé et on déduit : $-4,7 < -2,5$ Finalement : $-4,7 < -2,5 < 3$
les inverses de deux réels non nuls  la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et sur l'intervalle $]0, +\infty[$	Avec deux réels non nuls et de même signe , c'est le plus petit de ces deux réels qui a le plus grand inverse . Autrement dit : Passer à l'inverse avec deux réels de même signe change l'ordre Mathématiquement (voir figure) : avec $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$: $a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ avec $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$: $x < y \iff \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$	• $4 < 5$ donc $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ • $\frac{3}{2} < \frac{7}{4}$ donc $\frac{4}{7} < \frac{2}{3}$ • $2 < x < \frac{5}{2}$ donc $\frac{2}{5} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ • $-\frac{5}{2} < y < -2$ donc $-\frac{1}{2} < \frac{1}{y} < -\frac{2}{5}$ • pour comparer $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{7}$: on peut adopter la démarche suivante : 1) comparer 6 et 7 : $6 < 7$ 2) puis déduire par passage à l'inverse : $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$
les carrés de deux réels positifs  la fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$	Deux réels positifs se comparent comme leurs carrés : c'est le plus petit de ces deux réels qui a le plus petit carré . Mathématiquement : avec $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$: $a < b \iff a^2 < b2$	• avec $2 \leq x \leq 3$ on a : $2^2 \leq x^2 \leq 3^2$ soit : $4 \leq x^2 \leq 9$ • avec n entier naturel : n et n+1 sont positifs et vérifient : $n < n+1$ on déduit par passage au carré : $n^2 < (n+1)^2$
les racines carrées de deux réels positifs  la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$	Deux réels positifs se comparent comme leurs racines carrées : c'est le plus petit de ces deux réels qui a la plus petite racine carrée . Mathématiquement : avec $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$: $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$	• $2 < x < 3$ donc : $\sqrt{2} < \sqrt{x} < \sqrt{3}$ • pour comparer $\sqrt{2}$ et$\sqrt{6}$: on peut adopter la démarche suivante : 1) comparer 2 et 6 : $2 < 6$ 2) puis déduire par passage à la racine carrée : $\sqrt{2} < \sqrt{6}$