Des outils pour calculer dans $\mathbb{R}$

1 - addition et multiplication des réels

Dans la suite de ce document , les lettres a,b,c désignent des nombres réels

les propriétés	de l'addition	de la multiplication
commutativité	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
associativité	$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c=a\times b\times c$
élément neutre	le réel 0, unique réel tel que : $a+0=0+a=a$	le réel 1, unique réel tel que : $a\times 1=1\times a=a$
élément symétrique	l'opposé de a, noté $-a$, unique réel tel que : $a+(-a)=(-a)+a=0$	l'inverse d'un réel a non nul, noté $\frac{1}{a}$, unique réel tel que : $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$

la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Pour tous réels a,b,c :

$\mathbf{a}\times(b+c)=\mathbf{a}\times b+\mathbf{a}\times c \quad (=(b+c)\times\mathbf{a})$

<u>**ses deux utilisations :**</u>

- **développer le produit** $a\times(b+c)$: c'est écrire l'égalité $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$
- **factoriser la somme de deux produits ayant en commun un même facteur** a :
  c'est écrire l'égalité $(\mathbf{a}\times b)+(\mathbf{a}\times c)=\mathbf{a}\times(b+c)$

les quatre opérations	le résultat de l'opération est appelé	le résultat de l'opération est noté
l'addition	somme de a et b	$a+b$
la soustraction	différence de a et b	$a-b$ défini par $a-b=a+(-b)$
la multiplication	produit de a et b	$a\times b$
la division	quotient de a par b (<u>b non nul</u>)	$\frac{a}{b}$ défini par $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

2 - calculer avec des opposés

le calcul à effectuer	la règle à utiliser	des exemples d'utilisation
l'opposé de l'opposé	$-(-a)=a$	$-(-5)=5$; $-(-x)=x$
l'opposé d'une somme	$-(a+b)=-a-b$	$-(x+2)=-x-2$; $-(x^2+2x+4)=-x^2-2x-4$
l'opposé d'une différence	$-(a-b)=-a+b$	$-(x-3)=-x+3$; $-(x^2+2x-4)=-x^2-2x+4$
le produit d'un réel par un opposé	$a(-b)=-(ab)=(-a)b$	$5\times(-3)=-15$; $-2\times 7=-14$ $-2x(x+2)=-2x^2-4x$
le produit de deux opposés	$(-a)\times(-b)=ab$	$(-2)\times(-4)=8$ $-3x(-2x^2-7x-4)=6x^3+21x^2+12x$
le carré de l'opposé d'un réel	$(-a)^2=a^2$	$(-1)^2=1^2=1$; $(-9)^2=9^2=81$ $(-x-2)^2=(x+2)^2$; $(-x+3)^2=(x-3)^2$
le cube de l'opposé d'un réel	$(-a)^3=-a^3$	$(-1)^3=-1^3=-1$; $(-9)^3=-9^3=-729$
le quotient d'un réel par un opposé	$\frac{a}{(-b)}=-\frac{a}{b}$ avec $b\neq 0$	$\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$; $\frac{x+2}{-5}=-\frac{x+2}{5}$
le quotient d'un opposé par un réel	$\frac{(-a)}{b}=-\frac{a}{b}$ avec $b\neq 0$	$\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$; $\frac{-5x}{3}=-\frac{5x}{3}$; $-\frac{2x+5}{7}=\frac{-2x-5}{7}$
le quotient d'un opposé par un opposé	$\frac{(-a)}{(-b)}=\frac{a}{b}$ avec $b\neq 0$	$\frac{-7}{-9}=\frac{7}{9}$; $\frac{-(4x-5)}{-(7x+3)}=\frac{4x-5}{7x+3}$

3 - calculer avec des inverses de réels non nuls

le calcul à effectuer	la règle à utiliser	des exemples d'utilisation
l'inverse de l' inverse d'un réel	$\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}} = a$	$\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$; $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$
le produit de deux inverses	$\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \times b}$	$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$
l'inverse d'un quotient	$\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$	$\dfrac{1}{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{5}{2}$; $\dfrac{1}{\dfrac{5}{x}} = \dfrac{x}{5}$

4 - calculer avec des quotients

deux vocabulaires associés à l'écriture du quotient $\dfrac{N}{D}$: **N** est appelé le **Numérateur du quotient** $\dfrac{N}{D}$ et **D** est appelé son **Dénominateur , D réel non nul**

le calcul à effectuer	la règle à utiliser	des exemples d'utilisation
changer l'écriture d'un quotient	$\dfrac{a \times N}{a \times D} = \dfrac{N}{D}$	$\dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4}$ car : $\dfrac{15}{12} = \dfrac{3 \times 5}{3 \times 4} = \dfrac{5}{4}$ $\dfrac{9}{7} = \dfrac{99}{77}$ car : $\dfrac{9}{7} = \dfrac{9 \times 11}{7 \times 11} = \dfrac{99}{77}$
ajouter, soustraire deux quotients ayant même dénominateur	• $\dfrac{a}{D} + \dfrac{b}{D} = \dfrac{a+b}{D}$ • $\dfrac{a}{D} - \dfrac{b}{D} = \dfrac{a-b}{D}$	• $\dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5} = \dfrac{8}{5}$; $\dfrac{2x+3}{7} + \dfrac{x-5}{7} = \dfrac{3x-2}{7}$ • $\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$; $\dfrac{2x+3}{7} - \dfrac{x-5}{7} = \dfrac{x+8}{7}$
ajouter deux quotients n'ayant pas même dénominateur	réduire au même dénominateur $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \boxed{\dfrac{a \times d}{b \times d} + \dfrac{b \times c}{b \times d}} = \dfrac{ad+bc}{bd}$	$\dfrac{7}{5} + \dfrac{3}{11} = \dfrac{77}{55} + \dfrac{15}{55} = \dfrac{92}{55}$ $\dfrac{7}{5} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{14}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{17}{10}$ $\dfrac{7}{5} + 3 = \dfrac{7}{5} + \dfrac{15}{5} = \dfrac{22}{5}$ $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{2(x+2)+3(2x-1)}{6} = \dfrac{8x+1}{6}$
multiplier deux quotients	$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ attention ! $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b^2}$	$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{21}{10}$; $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{21}{4}$
multiplier un réel par un quotient	$k \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{ka}{b}$	$2 \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{7}$; $-3 \times \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{-3(x-2)}{7} = \dfrac{-3x+6}{7}$
diviser un quotient par un réel	$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{k} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{k} = \dfrac{a}{bk}$	$\dfrac{\dfrac{5}{2}}{3} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$; $\dfrac{\dfrac{5}{2}}{2} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$; $\dfrac{\dfrac{x}{4}}{5} = \dfrac{x}{4} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{x}{20}$
diviser un réel par un quotient	$\dfrac{k}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{k}{1} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{kd}{c}$	$\dfrac{5}{\dfrac{2}{3}} = 5 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{15}{2}$; $\dfrac{7}{\dfrac{6}{5}} = 7 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{35}{6}$; $\dfrac{x}{\dfrac{4}{5}} = x \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{5x}{4}$
diviser un quotient par un quotient	$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$	$\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{8}$; $\dfrac{\dfrac{5}{3}}{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{5}{7}$; $\dfrac{\dfrac{x}{3}}{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{x}{3} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{2x}{21}$
égaler deux quotients	• $\dfrac{a}{D} = \dfrac{b}{D}$ signifie $a = b$ • $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ signifie $ad = bc$	• $\dfrac{2x+5}{\mathbf{3}} = \dfrac{-3x+4}{\mathbf{3}} \Leftrightarrow 2x+5 = -3x+4$ • $\dfrac{2x+5}{3} = \dfrac{-3x+4}{5} \Leftrightarrow 5\,(2x+5) = 3\,(-3x+4)$
égaler un quotient avec le réel 0	$\dfrac{N}{D} = 0$ signifie $N = 0$	avec $x \notin \{-1, 1\}$, $\dfrac{3x-5}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow 3x+5 = 0$
égaler un quotient avec un réel k	$\dfrac{N}{D} = k$ signifie $N = k \times D$	avec $x \notin \{-1, 1\}$, $\dfrac{3x-5}{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow 3x-5 = x^2-1$ et : $\dfrac{3x-5}{x^2-1} = 7 \Leftrightarrow 3x-5 = 7\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow 3x-5 = 7x^2-7$

5 - calculer avec des puissances

le réel a^n

- pour un réel a quelconque et un exposant strictement positif :
  $a^1 = a$; $a^2 = a \times a$; $a^3 = a \times a \times a$; ..... ; $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ fois}$
- pour un réel a non nul et un exposant strictement négatif :
  $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$; $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$; $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$; ...... ; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; n entier positif
- pour un réel a non nul : $a^0 = 1$

a^n se lit a exposant n

l'exposant n est un entier

le calcul à effectuer	la règle à utiliser	des exemples d'utilisation
la puissance d'un opposé avec un exposant positif non nul	si n pair : $(-a)^n = a^n$ si n impair : $(-a)^n = -(a^n)$	$(-1)^{2k} = 1$; $(-2)^2 = 4$; $(-x)^2 = x^2$ $(-1)^{2k+1} = -1$; $(-2)^3 = -8$; $(-x)^3 = -x^3$
la puissance d'un produit	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(2x)^2 = 4x^2$; $(-2x)^2 = 4x^2$; $(-2x)^3 = -8x^3$
la puissance d'un inverse	$\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1^4}{3^4} = \dfrac{1}{81}$; $\left(\dfrac{1}{2x+3}\right)^2 = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$
la puissance d'un quotient	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2} = \dfrac{9}{16}$; $\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^3 = \dfrac{(x+3)^3}{(x+1)^3}$
le produit de deux puissances d'un même nombre réel non nul	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$; $x^2(x + x^2 + x^3) = x^3 + x^4 + x^5$
le quotient de deux puissances d'un même nombre réel non nul	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\dfrac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3$; $\dfrac{2^{10}}{2^{-7}} = 2^{17}$; $\dfrac{x^5 + x^3}{x^2} = x^3 + x$
la puissance d'une puissance d'un nombre réel non nul	$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$; $(2^{-2})^3 = 2^{-2\times3} = 2^{-6}$ $\left[(\ x+2)^2\right]^2 = (x+2)^4$

6 - calculer avec des produits dits remarquables

le calcul à effectuer	la règle à utiliser	des exemples d'utilisation
• développer le carré d'une somme ▷ développer le carré d'une différence	• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ▷ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	• $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ • $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2} \times 1) + 1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ▷ $(3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$ ▷ $(\sqrt{2}-2)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2} \times 2) + 2^2 = 6 - 4\sqrt{2}$
développer • le produit d'une somme par une différence ▷ le produit d'une différence par une somme	• $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ▷ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	• $(2x+3)(2x-3) = 4x^2 - 9$ • $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = -1$ ▷ $(5x-1)(5x+1) = 25x^2 - 1$ ▷ $(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1) = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 1^2 = 17$
• reconnaître le carré d'une somme ▷ reconnaître le carré d'une différence	• $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ▷ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	• $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2(5x) + 5^2 = (x+5)^2$ ▷ $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2(6x) + 3^2 = (2x-3)^2$
factoriser la différence de deux carrés	• $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ▷ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	• $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$ • $(x+1)^2 - 16 = (x+1)^2 - 4^2$ $(x+1)^2 - 16 = [(x+1) - 4]\,[(x+1) + 4]$ $(x+1)^2 - 16 = (x-3)\,(x+5)$ ▷ $9x^2 - 5 = (3x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (3x+\sqrt{5})(3x-\sqrt{5})$ ▷ $9\,(x+1)^2 - 4(x-3)^2 = [3\,(x+1)]^2 - [2(x-3)]^2$ $= [3\,(x+1) + 2(x-3)]\,[3\,(x+1) - 2(x-3)]$ $= [3x+3+2x-6)]\,[3x+3-2x+6)]$ $= (5x-3)\,(x+9)$

7 - calculer avec des radicaux

le réel noté $\sqrt{a}$

C'est l'unique réel positif qui a pour carré a
Dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{a}$ n'existe que pour un réel a positif

$\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$; $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \geqslant 0$
$\forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{x})^2 = x$; $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$

Dans le tableau ci-dessous :

tous les réels écrits sous un radical (symbole $\sqrt{\ }$) sont des réels positifs

tous les réels utilisés comme dénominateurs d'un quotient sont des réels non nuls

le calcul à effectuer	la règle à utiliser	des exemples d'utilisation
le carré d'une racine carrée	avec $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$	$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$
la racine carrée d'un carré	*si* $a \geq 0$: $\sqrt{a^2} = a$ *si* $a \leq 0$: $\sqrt{a^2} = -a$ autrement dit : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = \|a\|$	$\sqrt{(7)^2} = 7$; $\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = 1+\sqrt{2}$ $\sqrt{(-7)^2} = 7$; $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}-1$ $\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2} = \|2-\sqrt{6}\| = \sqrt{6}-2$
extraire un carré situé sous un radical	avec $a \geq 0$: $\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$	$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ $\sqrt{9x^2+9} = \sqrt{9\,(x^2+1)} = 3\sqrt{x^2+1}$
la racine carrée d'un produit	avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$\sqrt{6} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$ $\sqrt{4x^2+4} = \sqrt{4}\sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}$
la racine carrée d'un quotient	avec $a \geq 0$ et $b > 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{\dfrac{x^2+7}{25}} = \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{5}$
écrire l' inverse d'une racine carrée sans radical au dénominateur	avec $a > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$
écrire un quotient ayant un dénominateur de la forme $c\sqrt{a}$ sans radical au dénominateur	**multiplier** le **numérateur et** le **dénominateur** du quotient **par** $\sqrt{a}$ $\dfrac{b}{c\sqrt{a}} = \dfrac{b \times \sqrt{a}}{c\sqrt{a} \times \sqrt{a}}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$	$\dfrac{4}{3\sqrt{5}} = \dfrac{4 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{3 \times 5} = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}$
écrire un quotient ayant un dénominateur de la forme $\sqrt{a}+b$ sans radical au dénominateur	utiliser l'**expression conjuguée** $\sqrt{a}-b$ du **dénominateur** en écrivant : $\dfrac{N}{\sqrt{a}+b} = \dfrac{N \times (\sqrt{a}-b)}{(\sqrt{a}+b) \times (\sqrt{a}-b)}$ d'où : $\dfrac{N}{\sqrt{a}+b} = \dfrac{N \times (\sqrt{a}-b)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-(b)^2} = \dfrac{N \times (\sqrt{a}-b)}{a-b^2}$	$\dfrac{7}{\sqrt{6}+1} = \dfrac{7 \times (\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1) \times (\sqrt{6}-1)}$ $\dfrac{7}{\sqrt{6}+1} = \dfrac{7 \times (\sqrt{6}-1)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-(1)^2} = \dfrac{7\sqrt{6}-7}{6-1}$ $\dfrac{7}{\sqrt{6}+1} = \dfrac{7\sqrt{6}-7}{5}$
écrire un quotient ayant un dénominateur de la forme $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sans radical au dénominateur	utiliser l'**expression conjuguée** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ du **dénominateur** en écrivant : $\dfrac{N}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{N \times \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \times \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$ d'où : $\dfrac{N}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{N(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \dfrac{N(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$	$\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$ $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{20}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$ $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{25 \times 2}+\sqrt{4 \times 5}}{5-2}$ $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$