Des outils pour le dénombrement

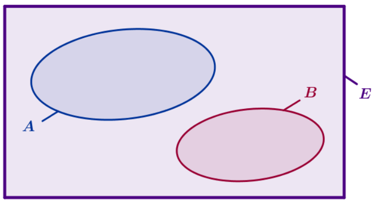
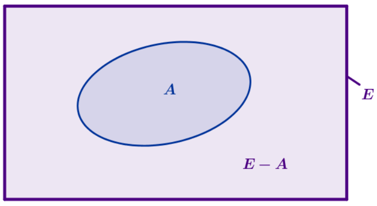
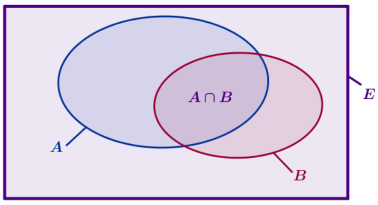
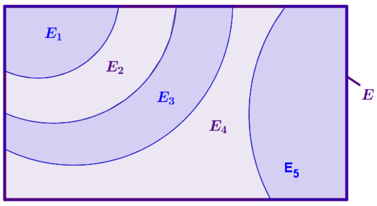
1) la notion de cardinal pour un ensemble

définition Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé le **cardinal de E** et est noté $Card(E)$ ou $Card\,E$

exemples : avec $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ on a $Card\,E = 5$; $Card\,\varnothing = 0$

remarque : Dans certains exercices de probabilités , il est souvent utile pour calculer la probabilité d'un évènement A d'un espace fondamental Ω de calculer en préalable les cardinaux respectifs de A et de Ω .

des propriétés à connaître (dans la suite l'ensemble de référence est noté E)

ce que l'on peut faire	la situation illustrée	la propriété à utiliser
calculer le cardinal d'une réunion de deux ensembles disjoints inclus dans E		avec $A \cap B = \varnothing$: $Card\,A \cup B = Card\,A + Card\,B$
calculer le cardinal du complémentaire pris dans E d'un sous-ensemble A de E noté $\overline{A}$ ou $E - A$ ou $\complement_E A$		$Card\,\overline{A} = Card\,E - Card\,A$ En effet : A et $\overline{A}$ disjoints et $A \cup \overline{A} = E$ donc : $Card\,A + Card\,\overline{A} = card\ E$
calculer le cardinal de la réunion de deux sous-ensembles de E		$Card\,A \cup B = Card\,A + Card\,B - Card\,A \cap B$ En ajoutant les cardinaux des ensembles A et B , les éléments communs à A et à B appartenant à $A \cap B$ sont comptés deux fois ; enlever $Card\,A \cap B$ à $Card\,A + Card\,B$ permet de ne compter les éléments communs à A et à B qu'une seule fois
utiliser une partition de E pour calculer son cardinal		$Card\,E = Card\,E_1 + Card\,E_2 + \ldots + Card\,E_n$ avec $E_1, E_2, \ldots, E_n$ formant une partition de E soit tels que : $E_1, E_2, \ldots, E_n$ deux à deux disjoints et vérifiant $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = E$

2) dénombrement direct avec des tableaux , des diagrammes

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

exemple 1 On lance deux dés cubiques , l'un de couleur rouge , l'autre de couleur noire . On examine les deux numéros que l'on peut lire lorsque chacun de ces deux dés s'est immobilisé . Un quelconque lancer de ces deux dés peut s'identifier à un couple (a, b) en décidant que a est le numéro du dé rouge et b celui du dé noir .

L'ensemble Ω de tous les lancers possibles de ces deux dés peut se représenter à l'aide d'un tableau à double entrée qui fait apparaître 36 couples distincts et on dénombre directement : $Card\,\Omega = 36$.

Trois utilisations de ce tableau

1) On note A l'ensemble des lancers de Ω pour lesquels les deux dés s'immobilisent sur la même face . A est représenté par l'ensemble des six couples situés sur la diagonale "jaune" . D'où : $Card\,A = 6$.

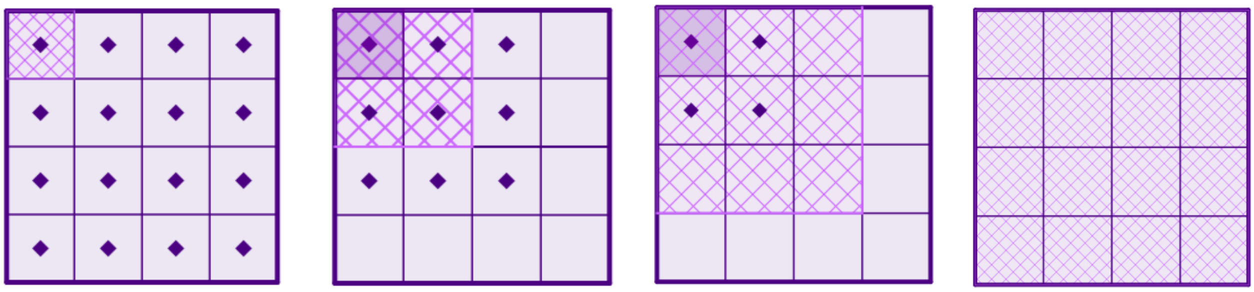
2) On note B l'ensemble des lancers de Ω pour lesquels le dé rouge s'immobilise sur une face dont le numéro est strictement supérieur à celui du dé noir . Les couples situés en dessous de la diagonale "jaune" définissent tous les lancers de cet ensemble B . Le tableau permet d'en dénombrer quinze . D'où : $Card\,B = 15$.

3) On note C l'ensemble des lancers de Ω pour lesquels la somme des numéros des deux faces sur lesquelles s'immobilisent les deux dés est supérieure à 10 . Le tableau permet d'observer : $C = \{(6,4), ((5,5), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)\}$. D'où : $Card\,C = 6$.

exemple 2 En utilisant une partition , dénombrer tous les carrés existant dans un carré de côté de longueur 4 cm

Un carré inclus dans un carré de côté 4 cm peut avoir un côté de longueur 1 cm ou 2 cm ou 3 cm ou 4 cm . On peut donc réaliser une partition de l'ensemble E des carrés inclus dans un carré de côté de longueur 4 cm selon la dimension du carré inclus .

16 carrés de côté 1 cm **9 carrés de côté 2 cm** **4 carrés de côté 3 cm** **1 carré de côté 4 cm**



En utilisant les quatre figures ci-dessus on obtient :

1) 16 carrés de côté 1 cm et un seul carré de côté 4 cm (évident)

2) 9 carrés de côté 2 cm . En effet : construire un carré de côté 2 cm contenant 4 petits carrés de côté 1 cm revient à choisir la position du petit carré de 1 cm placé en haut et à gauche , en laissant une place disponible pour le petit carré situé en haut et à droite et une place disponible pour le petit carré placé en bas et à gauche . La figure met en évidence les neuf positions possibles de ce petit carré de 1 cm placé en haut et à gauche dans un tel carré de côté 2 cm .

3) 4 carrés de côté 3 cm . Construire un carré de côté 3 cm contenant 9 petits carrés de côté 1 cm revient à choisir la position du petit carré de 1 cm placé en haut et à gauche , en laissant deux places disponibles à sa droite et deux places disponibles en dessous . La figure met en évidence les quatre positions possibles de ce petit carré de 1cm placé en haut et à gauche .

Au total : $16 + 1 + 9 + 4$ soit 30 carrés distincts peuvent être inclus dans le carré de côté de longueur 4 cm .

exemple 3 On lance simultanément trois dés de couleur différente à six faces (rouge , vert , noir) . Chaque lancer est représenté par un triplet (a, b, c) où a, b, c sont des entiers compris entre 1 et 6 représentant respectivement les numéros sur lesquels s'immobilise le dé vert , le dé rouge , le dé noir .

On considère l'ensemble A des lancers pour lesquels le numéro b obtenu par le dé vert vérifie $4ac \leq b^2$, a et c étant les numéros obtenus respectivement par les dés rouge et noir

Un lancer de l'ensemble A est représenté par un triplet (a, b, c) vérifiant $4ac \leq b^2$. On peut réaliser une partition de l'ensemble de ces triplets selon la valeur de b et dénombrer les triplets (a, b, c) vérifiant soit : $4ac \leq 1^2$, soit : $4ac \leq 2^2$, soit : $4ac \leq 3^2$, soit $4ac \leq 4^2$, soit $4ac \leq 5^2$, soit $4ac \leq 6^2$.
Un tableau à double entrée donnant les valeurs du produit $4ac$ permet de faire ce dénombrement assez rapidement .
En effet : en notant $n\,(b)$ le nombre de couples (a, c) vérifiant : $4ac \leq b^2$, on obtient avec ce tableau les différentes valeurs de $n(b)$ pour b compris entre 1 et 6 .

valeur de b	1	2	3	4	5	6
valeur de b^2	1	4	9	16	25	36
nombre $n\,(b)$	0	1	3	8	14	17

On déduit ensuite : $CardA = 0 + 1 + 3 + 8 + 14 + 17 = 43$

a \ c	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	40	48
3	12	24	36	48	60	72
4	16	32	48	64	80	96
5	20	40	60	80	100	120
6	24	48	72	96	120	144

exemple 4 Une enquête auprès des 1500 élèves d'un lycée où les élèves sont soit externes soit demi-pensionnaires .

Trois questions sont posées à chaque élève du lycée et pour chacune des trois questions l'élève interrogé répond soit oui soit non .

$Q1$: l'élève possède-t-il un ordinateur ? $Q2$: l'élève possède-t-il un téléphone portable ? $Q3$: l'élève est-il demi-pensionnaire ?

A l'issue de cette enquête , on obtient les résultats suivants :

→ 213 élèves sont demi-pensionnaires et ne possèdent ni ordinateur , ni portable → 120 élèves répondent oui aux trois questions
→ 660 élèves possèdent un ordinateur et parmi ces élèves , 250 sont demi-pensionnaires → 700 élèves possèdent un téléphone portable et parmi ces élèves , 103 sont externes et n'ont pas d'ordinateur → 610 élèves sont demi-pensionnaires

1) utiliser un diagramme pour illustrer cette situation et le compléter

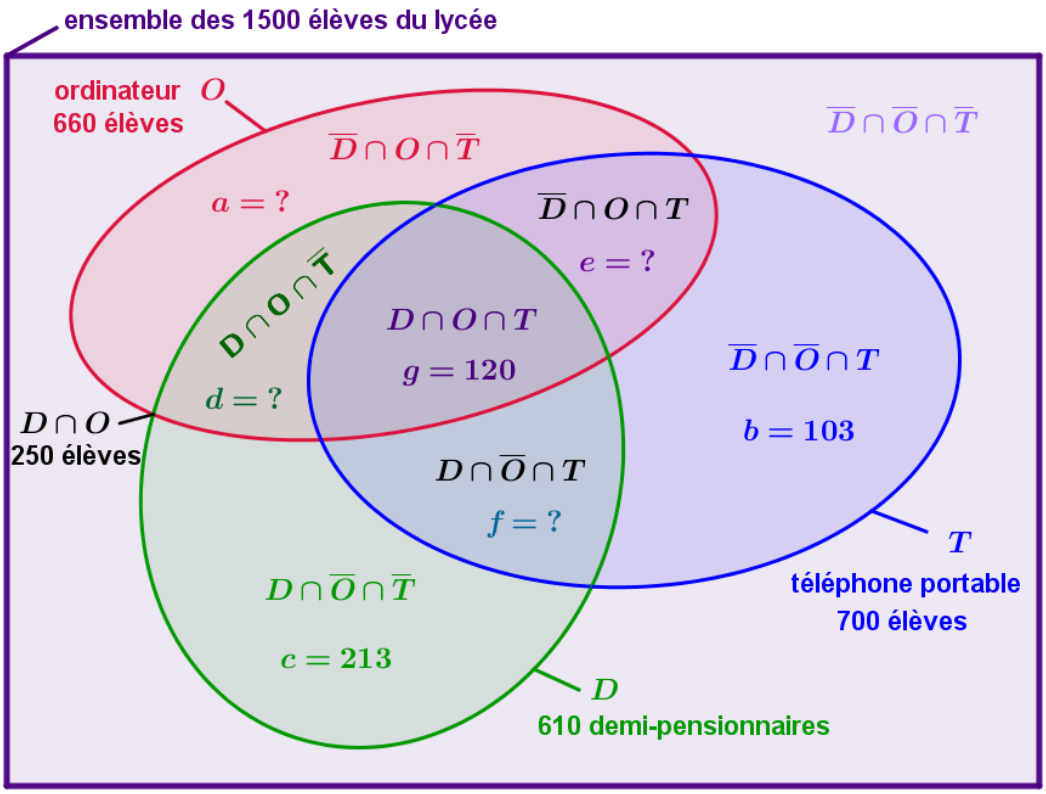
On note : O l'ensemble des élèves qui possèdent un ordinateur, T l'ensemble des élèves qui possèdent un téléphone portable et D l'ensemble des élèves demi-pensionnaires .

→ Dans la figure ci-dessous on représente chaque ensemble par une figure géométrique (ellipse , cercle ,..) en faisant apparaître les différentes intersections possibles . Selon le nombre de réponses oui données pour chaque élève à l'ensemble des trois questions posées , on peut réaliser une partition de l'ensemble des 1500 élèves à l'aide de huit régions définies comme l'indique le schéma ci-dessous appelé Diagramme de Venn : par exemple l'ensemble $D\cap O\cap T$ est constitué des demi-pensionnaires du lycée qui ont un téléphone portable et un ordinateur .

→ On indique ensuite sur ce schéma les données numériques provenant des résultats de l'enquête (Les cardinaux des différents ensembles sont désignés par des lettres) .

les résultats en langage courant	leur traduction en termes de cardinal d'ensemble
213 élèves sont demi-pensionnaires et ne possèdent ni ordinateur , ni téléphone portable	$213 = Card\, D\cap\overline{O}\cap\overline{T} = c$
120 élèves ont répondu oui aux trois questions	$120 = Card\, D\cap O\cap T = g$
660 élèves possèdent un ordinateur et parmi ces élèves , 250 sont demi-pensionnaires	$660 = Card\, O = a+d+e+g$ $250 = Card\, D\cap O = d+g$
700 élèves ont un téléphone portable et parmi ces élèves , 103 sont externes et n'ont pas d'ordinateur	$700 = Card\, T = e+b+f+g$ $103 = Card\,\overline{D}\cap\overline{O}\cap T = b$
610 élèves sont demi-pensionnaires	$610 = Card\, D = c+d+f+g$

→ On déduit ensuite et pas à pas les cardinaux des autres ensembles en utilisant des partitions .
Pour cet exemple on calcule :
1) d puis **2)** f puis **3)** e puis **4)** a .
1) avec $D\cap O\cap T$ et $D\cap O\cap\overline{T}$ réalisant une partition de $D\cap O$:
On a : $250 = Card\, D\cap O = d+g$
et $Card\, D\cap O\cap T = g = 120$
Donc : $250 = d+g = d+120$
Puis : $d = 250-120 = 130$
puis 2) avec l'ensemble D ,on a :
$610 = Card\, D = c+d+f+g$
$c = 213$, $g = 120$, $d = 130$.
Donc : $610 = 213+130+f+120$
Puis : $f = 610-(213+130+120)$
Soit : $f = 610-463 = 147$
puis 3) avec l'ensemble T , on a :



$700 = Card\, T = e+b+f+g$, $g = 120$, $b = 103$, $f = 147$. Donc : $e = 700-(b+f+g) = 700-(120+103+147) = 330$
puis 4) avec l'ensemble O , on a : $660 = Card\, O = a+d+e+g$; $d = 130$; $g = 120$; $e = 330$. On déduit :
$a = 660-(d+e+g) = 660-(130+120+330) = 660-580 = 80$

Déterminer le nombre d'élèves

2-1 qui ont répondu oui à exactement deux des trois questions ?

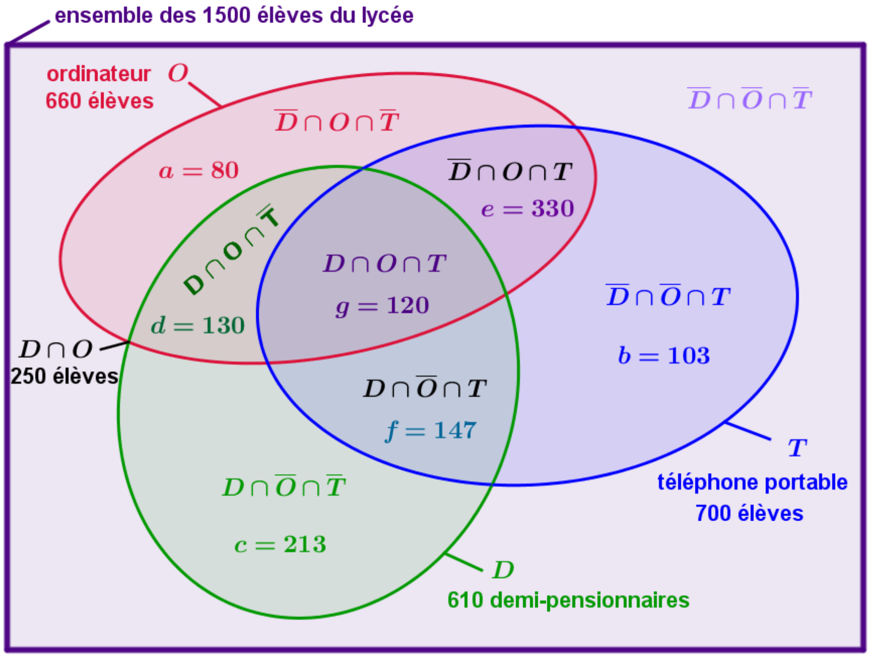
Une partition de l'ensemble E_1 de ces élèves est réalisée par les trois ensembles suivants : $D \cap O \cap \overline{T}$, $\overline{D} \cap O \cap T$, $D \cap \overline{O} \cap T$. D'où :

$Card\, E_1 = d + e + f = 130 + 330 + 147 = 607$

Ainsi : 607 élèves ont répondu oui à exactement deux des trois questions posées .

2-2 qui ont répondu oui à au moins deux des trois questions ?

Une partition de l'ensemble E_2 de ces élèves est réalisée par les deux ensembles suivants : E_1 et $D \cap O \cap T$.



Donc : $Card\, E_2 = Card\, E_1 + g = 607 + 120 = 727$. Et : 727 élèves ont répondu oui à au moins deux des trois questions posées .

2-3 qui ont répondu oui à au moins une des trois questions ? L'ensemble de ces élèves est la réunion $D \cup O \cup T$. Une partition de $D \cup O \cup T$ est réalisée par exemple par les quatre ensembles O , $D \cap \overline{O} \cap \overline{T}$, $D \cap \overline{O} \cap T$, $\overline{D} \cap \overline{O} \cap T$.

Donc : $D \cup O \cup T = Card\, O + c + f + b = 660 + 213 + 147 + 103 = 1123$

Ainsi : 1123 élèves ont répondu oui à au moins une des trois questions posées .

2-4 qui sont externes , n'ont pas d'ordinateur et n'ont pas de téléphone portable ? L'ensemble $\overline{D} \cap \overline{O} \cap \overline{T}$ de ces élèves est le complémentaire de la réunion $D \cup O \cup T$ pris dans l'ensemble des 1500 élèves .

Et : $Card\, \overline{D} \cap \overline{O} \cap \overline{T} = 1500 - Card\, D \cup O \cup T = 1500 - 1123 = 377$

Ainsi : 377 élèves de ce lycée sont externes , n'ont pas d'ordinateur et n'ont pas de téléphone portable .

3) dénombrement avec ordre , arbres et principe multiplicatif

un exemple Anna , Bella et Clara commandent respectivement une limonade , un jus d'orange et un coca cola . Le serveur revient avec les boissons : ayant oublié les commandes respectives des trois amies , il leur donne au hasard une boisson à chacune . Pour réaliser une telle distribution , le serveur peut suivre la démarche suivante :

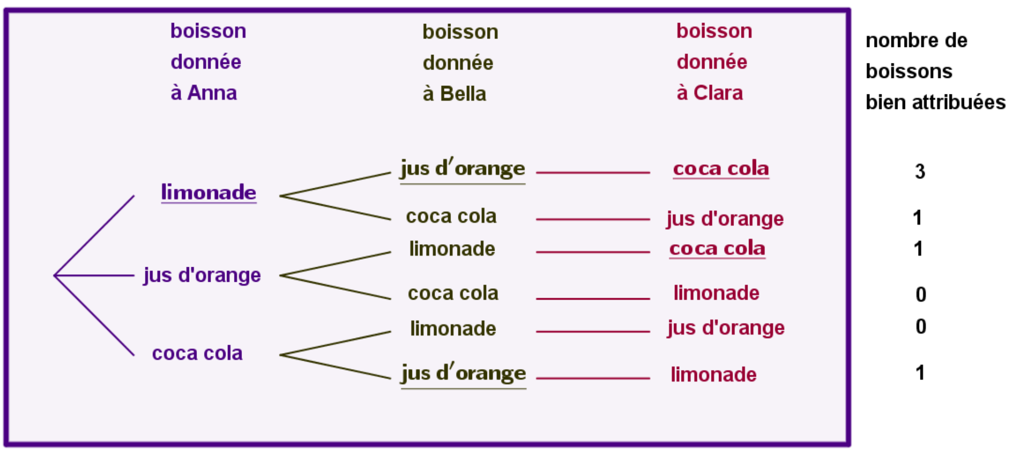
- étape 1 : choisir la boisson qu'il donne à Anna : 3 possibilités de choix
- puis étape 2 : choisir parmi les deux boissons restant sur son plateau la boisson qu'il donne à Bella : 2 possibilités de choix
- puis étape 3 : donner à Clara la seule boisson restant sur son plateau : 1 possibilité de choix

figure : l'ensemble des distributions que peut effectuer le serveur se représente très bien avec un arbre à six branches mettant en évidence les trois choix sucessifs que fait le serveur pour donner les trois boissons aux trois amies , chaque boisson ne pouvant être donnée qu'à une seule des trois amies .

Avec les six branches de cet arbre on obtient : $3 \times 2 \times 1$ soit 6 distributions distinctes possibles

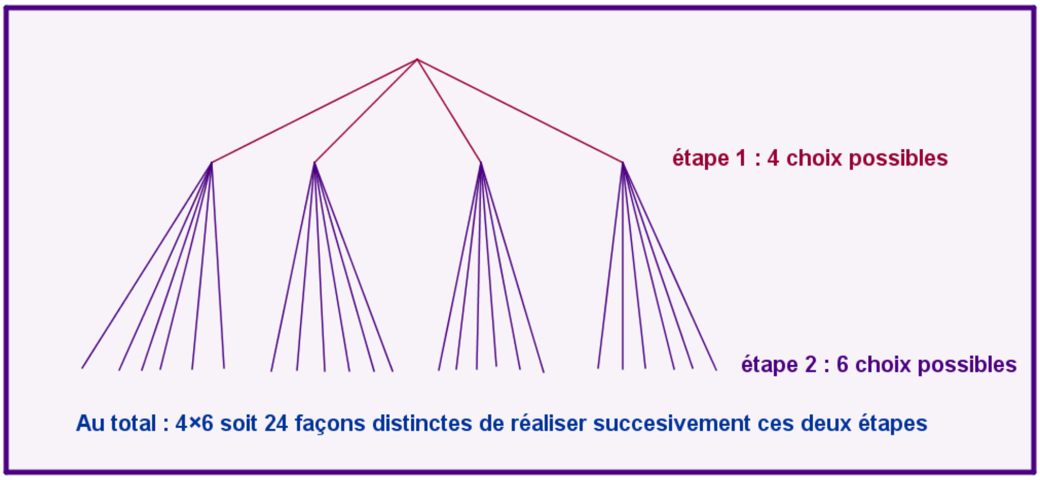
→ En soulignant pour chaque étape la boisson commandée par la personne servie , l'arbre montre :

- 1 seule possibilité pour que le serveur respecte la commande des trois amies
- 3 possiblités pour qu'une seule des trois amies ait la boisson qu'elle a commandée
- 2 possibilités pour qu'aucune des trois amies n'ait sa commande



Intuitivement , lorsque l'arbre a une taille raisonnable , faire du dénombrement revient à compter des branches de l'arbre !

Si la construction d'une éventualité ω nécessite p étapes , la $1^{ère}$ étape pouvant se réaliser de n_1 manières différentes , la $2^{ème}$ de n_2 manières différentes , etc. . . , la $p^{ème}$ étape de n_p manières différentes , alors le nombre d'éventualités distinctes pouvant être ainsi construites est égal au produit des possibilités de ces choix successifs soit à : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.



Ce principe s'utilise notamment dans les quatre situations de référence suivantes :

situation 1

la construction de ω nécessite de choisir et ordonner p éléments distincts (objets ou individus) d'un ensemble à n éléments

exemple 1 pour établir au hasard un **tiercé** pour une course de chevaux (15 chevaux prennent le départ ; tous les chevaux franchissent la ligne d'arrivée et pas d'ex-aequo) on doit :

- étape 1 : choisir le cheval gagnant : 15 possibilités de choix
- puis étape 2 : choisir le cheval classé second (distinct du cheval gagnant !) : $15 - 1$ soit 14 possibilités de choix
- puis étape 3 : choisir le cheval classé $3^{ème}$(distinct des 2 chevaux déja classés) : $15 - 2$ soit 13 possibilités de choix

On peut donc établir ainsi : $15 \times 14 \times 13$ soit 2730 tiercés distincts

exemple 2 effectuer un **tirage dit sans remise** de quatre boules dans une urne en contenant 10 . Pour effectuer un tel tirage : on tire la $1^{ère}$ boule , puis sans la remettre dans l'urne , on tire la $2^{ème}$ boule ; on procède de la même façon pour tirer successivement les $3^{ème}$ et $4^{ème}$ boules . Pour réaliser un tel tirage il faut :

- étape 1 : choisir la $1^{ère}$ boule parmi 10 boules : 10 possibilités de choix
- puis étape 2 : choisir la $2^{ème}$ boule parmi $10 - 1$ soit 9 boules : 9 possibilités de choix
- puis étape 3 : choisir la $3^{ème}$ boule parmi $10 - 2$ soit 8 boules : 8 possibilités de choix
- puis étape 4 : choisir la $4^{ème}$ boule parmi $10 - 3$ soit 7 boules : 7 possibilités de choix

Au total on peut réaliser $10 \times 9 \times 8 \times 7$ soit 5040 tirages distincts

situation 1 : cas général

Pour réaliser une éventualité ω dans cette situation , on est amené à choisir et ordonner p éléments deux à deux distincts dans un ensemble à n éléments (un même élément ne peut donc être choisi qu'une seule fois , ce qui impose $p \leq n$) .
Dans cette situation , les p éléments se choisissent successivement et le nombre de possibilités de choix diminue de 1 à chacune des étapes nécessaires pour choisir ces p éléments distincts .

vocabulaires et notation : Une telle éventualité est appelée **arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments** ou une liste de p éléments distincts de E .

Le **nombre d'arrangements** de p éléments d'un ensemble E à n éléments est **noté :** A_n^p

En utilisant le schéma ci-dessous on obtient l'expression de A_n^p en fonction de n et de p ($0 \leq p \leq n$)

pour construire ω : **choisir l'élément classé en**		1^{er}		$2^{ème}$		$3^{ème}$		$p^{ème}$
(nombre d'éléments déjà choisis et classés)	:	(0)	puis	(1)	puis	(2)	. . . puis	$(p-1)$
nombre de choix possibles pour cet élément		n		$n-1$		$n-2$		$n-(p-1) = n-p+1$

Au total on peut réaliser : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times (n-p+1)$ éventualités distinctes . Donc :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots \times (n-p+1)}_{\text{produit de p entiers décroissant à partir de n}}$$

exemples : $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$; $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

situation 2

la construction de ω nécessite d'attribuer à tous les éléments d'un ensemble à n éléments un ordre de classement ou une fonction précise (sans cumul)

Cette situation est un cas particulier de la situation 1 . Construire une éventualité ω revient à établir une bijection de l'ensemble des n éléments sur l'ensemble des n ordres de classements possibles ou des n fonctions distinctes à attribuer .

vocabulaires et notation : Une telle éventualité est appelée une **permutation d'un ensemble à n éléments**

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est noté $n!$

Avec $n \geq 2$ on a : $n! = A_n^n = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1}_{\text{produit de tous les entiers compris entre 1 et n}}$. On pose : $0! = 1$ et $1! = 1$.

remarques : **1)** pour calculer $(n+1)!$ en connaissant n ! : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

2) pour exprimer A_n^p avec des factorielles : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots. \times (n-p+1)$ donc :

$$A_n^p = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots. \times (n-p+1) \times \boxed{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1}}{\boxed{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1}} \text{ soit : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

exemples : 1) Chaque anagramme du mot sapin correspond à une permutation de l'ensemble des cinq lettres du mot sapin . Le nombre d'anagrammes distinctes du mot sapin est donc égal à $5!$ et : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

2) Ranger six enfants en file indienne revient à mettre en bijection l'ensemble des six enfants sur l'ensemble des six emplacements d'une telle file indienne . On peut donc ranger ces six enfants de $6!$ manières différentes et : $6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$

3) Un tirage sans remise de toutes les boules d'une urne en contenant 12 est une permutation de l'ensemble de ces 12 boules . De tels tirages sont en nombre égal à $12!$ et : $12! = 479\,001\,600$

situation 3

la construction de ω nécessite d'attribuer p ordres ou p fonctions à au plus p éléments d'un ensemble à n éléments (le cumul de fonction étant autorisé)

exemple 1 Effectuer un **tirage dit avec remise** de quatre boules dans une urne en contenant 10 . Pour effectuer un tel tirage : on tire la $1^{ère}$ boule , puis on la remet dans l'urne et on tire la $2^{ème}$ boule ; on procède de la même façon pour tirer successivement les $3^{ème}$ et $4^{ème}$ boules (à chaque tirage on dispose de l'urne de 10 boules) .

Pour faire un tel tirage de quatre boules avec remise , il faut :

- étape 1 : choisir la $1^{ère}$ boule parmi 10 boules : 10 possibilités de choix
- puis étape 2 : choisir la $2^{ème}$ boule parmi 10 boules : 10 possibilités de choix
- puis étape 3 : choisir la $3^{ème}$ boule parmi 10 boules : 10 possibilités de choix
- puis étape 4 : choisir la $4^{ème}$ boule parmi 1010 boules : 10 possibilités de choix

Au total on peut réaliser $10 \times 10 \times 10 \times 10$ soit 10^4 soit $10\,000$ soit tirages distincts

exemple 2 On doit désigner un président , un trésorier , un secrétaire dans un groupe de 8 personnes . Le cumul de fonction étant autorisé une personne donnée peut assurer soit aucune , soit une, soit deux soit trois de ces fonctions et donc peut être désignée plusieurs fois . Pour attribuer ces trois fonctions dans ces conditions , il faut :

- étape 1 : choisir la personne qui exerce la fonction de président parmi 8 personnes : 8 choix possibles
- puis étape 2 : choisir la personne qui exerce la fonction de trésorier parmi 8 personnes : 8 choix possibles
- puis étape 3 : choisir la personne qui exerce la fonction de secrétaire parmi 8 personnes : 8 choix possibles

Au total on peut attribuer ces 3 fonctions de $8 \times 8 \times 8$ soit de 8^3 soit de 512 manières distinctes .

situation 3 : cas général Pour réaliser une éventualité ω dans cette situation , on est amené à choisir et ordonner p éléments dans un ensemble à n éléments (un même élément peut être choisi plusieurs fois , ce qui autorise $p \geq n$) .

vocabulaire : Une telle éventualité est appelée une **liste à p éléments ou encore une $p-$liste**

Le nombre de $p-$listes d'un ensemble à n éléments est égal à : $n^p = \underbrace{n \times n \times \ldots. \times n}_{\text{p entiers égaux à n}}$

4) dénombrement sans notion d'ordre : choisir seulement p éléments parmi n

cas général Choisir p éléments distincts d'un ensemble E à n éléments pour construire une éventualité ω revient à construire un sous-ensemble de E contenant p éléments .

vocabulaire :une telle éventualité ω est appelée une **combinaison de p éléments distincts de E parmi n** .

Par exemple : Un tirage simultané de p objets distincts d'une urne en contenant n est une combinaison de p éléments parmi n .

Le nombre de combinaisons distinctes de p éléments choisis parmi n est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$

$\boxed{\text{valeur de } C_n^p = \binom{n}{p}}$ • avec $p > n$: $C_n^p = \binom{n}{p} = 0$ car : un sous-ensemble de E ne peut pas contenir plus d'éléments que E

• $C_n^0 = \binom{n}{0} = 1$ car : $\varnothing$ est la seule partie de E à 0 élément ; • $C_n^n = \binom{n}{n} = 1$ car : E est la seule partie de E à n éléments

• $C_n^1 = \binom{n}{1} = n$ car chaque élément de E permet de créer une partie à 1 élément de E (évènement élémentaire)

• pour donner la valeur de $C_n^p = \binom{n}{p}$ avec $2 \leq p < n$, il suffit d'établir le lien suivant entre les listes à p éléments distincts de E et les combinaisons de p éléments de E . Pour construire une liste à p éléments distincts de E on peut :

- étape 1 : choisir une combinaison de p éléments distincts dans E : $C_n^p = \binom{n}{p}$ choix possibles
- puis étape 2 : classer tous les p éléments de cette combinaison à p éléments : $p!$ classements possibles

Chaque combinaison à p éléments de E permettant de créer $p!$ listes < ordonnées > , les C_n^p combinaisons à p éléments permettent de créer au total $\underbrace{p! + p! + ... + p!}_{C_n^p \text{ nombres égaux à } p!}$ soit $C_n^p \times p!$ listes à p éléments distincts deux à deux dans E .

Le nombre de ces listes étant égal à A_n^p , on obtient : $A_n^p = C_n^p \times p!$ entraînant : $\dfrac{A_n^p}{p!} = C_n^p$.

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments vaut : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

exemples : 1) Un tirage simultané de cinq cartes d'un jeu de 32 cartes est une combinaison de 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments . On peut donc réaliser C_{32}^5 tirages distincts de ce type et :

$C_{32}^5 = \dfrac{A_{32}^5}{5!} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 32 \times 31 \times 29 \times 7 = 201\,376$

2) Le nombre de segments distincts que l'on peut tracer avec huit points d'un cercle est égal à $\binom{8}{2}$. En effet : tracer un tel segment revient à choisir ses deux extrémités soit à choisir 2 points parmi les 8 points mis en évidence sur ce cercle . Et : $\binom{8}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2 \times 1} = 4 \times 7 = 28$.

5) Des propriétés concernant les coefficients $\binom{n}{p}$ avec n et p entiers vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$

1) symétrie des coefficients : $C_n^p = C_n^{n-p}$ ou $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

En effet : choisir un sous-ensemble à p éléments dans un ensemble E à n éléments revient à choisir les $n - p$ éléments de son complémentaire pris dans E . Cette propriété permet de :

→ simplifier les calculs dans certaines situations : pour calculer la valeur de C_{32}^{28} on peut utiliser : $C_{32}^{30} = C_{32}^2 = \dfrac{32 \times 31}{2 \times 1} = 496$

→ retrouver : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ou $C_n^0 = C_n^n = 1$; $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ ou $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$

2) la formule du binôme de Newton : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{ou} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n} a^{n-k} b^k}$

En effet : pour construire le terme général du type $a^k b^{n-k}$ (ou du type $b^k a^{n-k}$) en développant le produit des n facteurs égaux à $a + b$, on est amené à choisir le réel a (ou le réel b) dans k des n facteurs de ce produit , b (ou a) étant choisi dans les $n - k$ facteurs non déjà utilisés . On peut donc construire $\binom{n}{k}$ termes du type $a^k b^{n-k}$ (ou bien $\binom{n}{k}$ termes du type $b^k a^{n-k}$) .

Les coefficients $\binom{n}{k}$ intervenant dans ce développement sont appelés coefficients binômiaux .

remarque : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ donne un développement de $(a+b)^n$ selon les puissances croissantes de a et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ donne un développement de $(a+b)^n$ selon les puissances décroissantes de a .

3) la relation de Pascal : $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$ ou $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

En considérant un élément particulier a d'un ensemble E à n éléments , les $\binom{n}{p}$ sous ensembles à p éléments de E peuvent se partager en deux catégories :

$\rightarrow$ les sous-ensembles contenant l'élément a . Pour construire un tel sous-ensemble , il reste à choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a . Ces sous-ensembles sont en nombre égal à $\binom{n-1}{p-1}$.

$\rightarrow$ les sous-ensembles ne contenant l'élément a . Pour construire un tel sous-ensemble , on doit choisir p éléments parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a . Ces sous-ensembles sont en nombre égal à $\binom{n-1}{p}$ (ce qui suppose $p \leq n-1$) .

Avec cette partition on déduit :
$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
Cette égalité permet de construire pas à pas les valeurs des nombres $\binom{n}{p}$ comme le montre le schéma ci-contre appelé triangle de Pascal

n \ p≤n	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Construire le triangle de Pascal

$\rightarrow$ diagonale : $\binom{n}{n} = 1$

$\rightarrow$ première colonne : $\binom{n}{1} = 1$ $(n \geq 1)$

$\rightarrow$ déduire les autres valeurs de $\binom{n}{p}$ en utilisant la relation de Pascal :

ligne $n-1$	$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$	1	1
ligne n	$= \binom{n}{p}$		1+1=2

remarque : utiliser ce triangle de Pascal pour développer plus rapidement $(a+b)^4$. Avec la formule du binôme on obtient :

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + \binom{4}{4} b^4$$

La $5^{ème}$ ligne du triangle de Pascal (correspondant à $n = 4$) donne les valeurs des coefficients $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$.

D'où le développement de $(a+b)^4$: $\underline{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4}$

6) récapitulatif : outils de dénombrement

Construire une éventualité ω revient à effectuer un tirage de p éléments parmi n pour construire une éventualité ω . La méthode utilisée pour effectuer ce tirage détermine sa description et le nombre de tirages distincts que l'on peut effectuer .

notion d'ordre ? **éléments deux à deux distincts ?**	**description de l'éventualité ω**	**nombre d'éventualités distinctes possibles ?**
pas de notion d'ordre éléments distincts deux à deux	On choisit p éléments parmi n sans les classer les uns par rapport aux autres : ω est une **combinaison** de p éléments parmi n exemples : tirage simultané , sous-ensemble	$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$
notion d'ordre éléments distincts deux à deu	On choisit p éléments distincts parmi n en les classant les uns par rapport aux autres : ω est un **arrangement** de p éléments choisis parmi n éléments exemples : tirage sans remise , attribuer p fonctions le cumul de fonction étant interdit , **permutation** (classer tous les éléments, $p = n$)	A_n^p Avec $p = n$ $n! = A_n^n$
notion d'ordre un élément peut être choisi plusieurs fois	ω est une **p-liste** ou une une liste ordonnée de p éléments non forcément distincts exemples : tirage avec remise , attribuer p fonctions le cumul de fonction étant autorisé .	n^p