Produit Scalaire - corrigés feuille 2

L'outil du produit scalaire pour démontrer

exercice 1

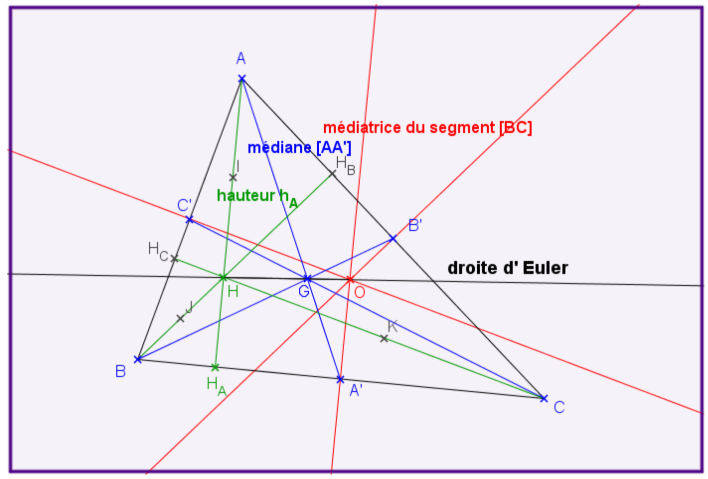
Objet : $\begin{cases}\textbf{utiliser le produit scalaire pour justifier}\\ \textbf{un alignement de trois points}\end{cases}$

La situation : ABC est un triangle non aplati et non équilatéral

→ O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle ABC)

→ G est le centre de gravité du triangle ABC (point de concours des trois médianes du triangle ABC)

→ H est l'orthocentre du triangle ABC (point de concours des trois hauteurs du triangle ABC)



La figure permet de conjecturer : O , G et H alignés

1) Supposons que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Deux cas sont possibles selon que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{o}$ ou $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{o}$

→ Avec $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{o}$: $\overrightarrow{o}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ est vrai car le vecteur $\overrightarrow{o}$ est orthogonal à tout vecteur

→ Avec $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{o}$: $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ entraîne $\overrightarrow{u}$ normal aux droites (AB) et (AC) .

Par conséquent : les droites (AB) et (AC) sont parallèles et ont en commun le point A . Elles sont donc confondues .

D'où : $\overrightarrow{u}$ vecteur non nul et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ entraîne A , B et C alignés ce qui contredit : ABC triangle non aplati

Et $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{o}$ ne convient donc pas comme vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi : <u>Avec A , B et C non alignés : si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ alors : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{o}$</u>

2) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{HO})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}))\cdot\overrightarrow{AB}$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB})$

H étant l'orthocentre du triangle ABC , (HC) est la hauteur de ce triangle issue de C et $\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2=OB^2-OA^2$

O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , O est équidistant de A , B et C et $OA=OB$

Donc : $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=OB^2-OA^2=OA^2-OA^2=0$

De même en utilisant la hauteur (HB) perpendiculaire à (AC) , $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{HB}$ on obtient :

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{AC}+0$ car $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}$ entraîne $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2=OC^2-OA^2$

O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , O est équidistant de A , B et C et $OC=OA$

Donc : $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=OC^2-OA^2=OA^2-OA^2=0$

3) alignement des trois points O , G et H .

Pour justifier cet alignement , il suffit de prouver la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$

On a prouvé précédemment : $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

En posant $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}$ on a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et donc $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$

La question 1) permet d'affirmer : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{o}$. D'autre part :

→ $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{o}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{o}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

→ Comme centre de gravité du triangle ABC , G est défini vectoriellement par : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{o}$

d'où : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}$ (en utilisant la relation de Chasles)

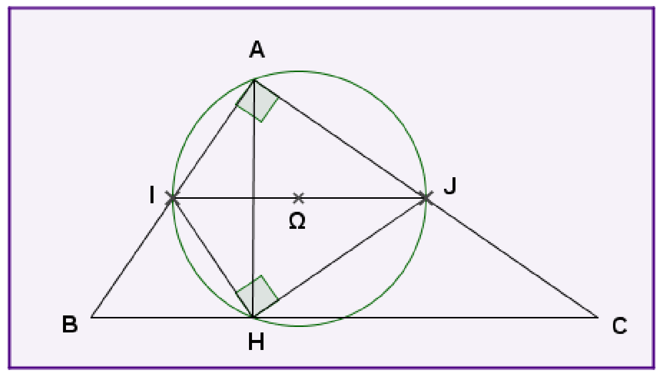
puis : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=3\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{o})=3\overrightarrow{OG}$

Par conséquent : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{o}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$ et l'égalité $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$ prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$. Les trois points O , G et H sont donc alignés .

exercice 2

Objet : utiliser le produit scalaire pour justifier l'appartenance de quatre points à un même cercle

La situation : ABC est un triangle rectangle en A ; H est le pied de la hauteur issue de A ; I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et de [AC]



1) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=-AH^2$? deux types de solutions selon la méthode choisie pour exprimer $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$.

solution 1 : on utilise l'expression de $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$ en fonction des longueurs HB , HC , BC : $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\dfrac{1}{2}(HB^2+HC^2-BC^2)$

H étant le pied de la hauteur issue de A , les triangles AHB et AHC sont rectangles en H et ABC est rectangle en A .

Le théorème de Pythagore est applicable dans ces trois triangles et permet d'obtenir :

$HB^2=AB^2-AH^2$; $HC^2=AC^2-AH^2$; $BC^2=AB^2+AC^2$

D'où : $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\dfrac{1}{2}(AB^2-AH^2+AC^2-AH^2-AB^2-AC^2)=\frac{1}{2}(-2AH^2)=-AH^2$

solution 2 : On décompose les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ avec la relation de Chasles pour faire apparaître des vecteurs orthogonaux et on utilise des projetés orthogonaux

$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$ égalité 1

D'autre part : → $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ car ABC rectangle en A entraîne $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

→ $(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AH})$ car $\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{AH}$ sur (AH)

→ $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA})=(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HA})$ car $\overrightarrow{AB}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{AH}$ sur (AH)

L'égalité 1 devient donc : $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AH})+(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HA})+0$. D'où :

$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HA})^2+(-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH})+(\overrightarrow{AH}\cdot-\overrightarrow{AH})=(\overrightarrow{HA})^2-(\overrightarrow{AH})^2-(\overrightarrow{AH})^2=(\overrightarrow{AH})^2-(\overrightarrow{AH})^2-(\overrightarrow{AH})^2=-(\overrightarrow{AH})^2=-AH^2$

2) Justifions $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}=0$. Comme I et J sont des milieux , on peut utiliser deux fois la propriété caractéristique du milieu :

$\forall M\in\mathcal{P}$, $\overrightarrow{MI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ car I milieu de [AB] et $\forall M\in\mathcal{P}$, $\overrightarrow{MJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ car J milieu de [AC] .

En remplaçant M par H on obtient : $\overrightarrow{HI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

Donc : $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC})$

Et : $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC})$

D'autre part : $\rightarrow$ H étant le pied de la hauteur issue de A on a : $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$ et $H \in (BC)$ donc :

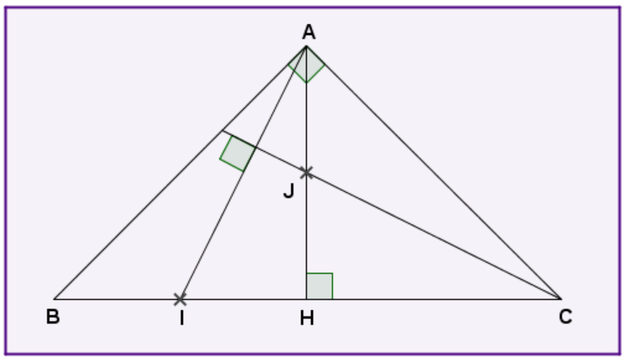
$\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HB}$ ce qui entraîne : $(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}) = 0$ et $(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}) = 0$

$\rightarrow (\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}) = -AH^2$ d'après la question 1)

Par conséquent : $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}HA^2 + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(-AH^2) = \frac{1}{4}AH^2 - \frac{1}{4}AH^2 = 0$

Ayant prouvé : $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$, on peut affirmer : $\overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{HJ}$.

conséquence : les triangles AIJ et HIJ sont rectangles respectivement en A et en H . Ils sont donc inscriptibles dans le cercle de diamètre [IJ] et **les quatre points A , I , J , H sont cocycliques et appartiennent au cercle de diamètre [IJ]** .



exercice 3

Objet : utiliser le produit scalaire pour justifier la perpendicularité de deux droites

La situation : ABC est un triangle rectangle en A ; H est le pied de la hauteur issue de A ; I et J sont les milieux respectifs des segments [HB] et de [HA]

1) $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AH}$ et de $\overrightarrow{AB}$.

I étant le milieu de [HB] , on peut utiliser la propriété caractéristique du milieu : $\forall M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

Avec $M = A$ on obtient : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) Que vaut $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ}$? En utilisant au point C la propriété caractéristique du milieu pour J milieu de[HA] on obtient comme à la question 1) : $\forall M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MA}$ puis $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ avec $M = C$

Donc : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA})$

D'autre part : $\rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}) = 0$ car ABC est rectangle en A entraîne : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CA}$

$\rightarrow$ H étant le pied de la hauteur issue de A on a : $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CB}$ et $H \in (BC)$ donc : $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$

$\rightarrow (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA})$ car $\overrightarrow{CA}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{HA}$ sur (HA)

$\rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}) = (\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH})$ car $\overrightarrow{AB}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{HB}$ sur (BC) qui est aussi (CH)

d'où : $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH}) = (\overrightarrow{HB} \cdot -\overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}) = -(-AH^2)$ (démonstration de $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -AH^2$faite à l'exo 2 - 1)

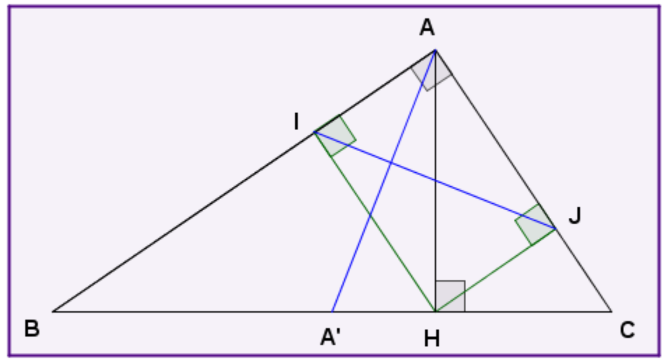
Donc : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA}) + \frac{1}{4}(-(-AH^2)) + \frac{1}{4}(0) = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH}) + \frac{1}{4}(AH^2)$

Et : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}(AH^2) - \frac{1}{4}(AH^2) = 0$.

On déduit avec $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$: $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{CJ}$.

Les droites (AI) et (CJ) sont donc perpendiculaires

exercice 4 **Objet : utiliser le produit scalaire pour justifier la perpendicularité de deux droites**



La situation : ABC est un triangle rectangle en A ; A' est le mileu de [BC] ; H est le pied de la hauteur issue de A ; I et J sont les projetés respectifs de H sur les segments [AB] et de [AC]

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ est vrai . En effet :

I étant le projeté orthogonal de H sur [AB] , le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est le projeté orthogonal des deux vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{AH}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot -\overrightarrow{JI} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

De même $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$ est vrai . En effet : J étant le projeté orthogonal de H sur [AC] , le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est le projeté orthogonal des deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AH}$ sur $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$

2) Pour justifier la perpendicularité des droites (IJ) et (AA') il suffit de prouver l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AA'}$ en montrant : $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$. En utilisant la propriété caractéristique du milieu on a :

$\forall M \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA'}$ car A' est le milieu du segment [BC] . En ayant $M = A$ on obtient : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$

Donc : $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}\right)$

D'autre part : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$ (d'après la question 1) . Donc :

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\right) = \left(-\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) = \left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}\right)$

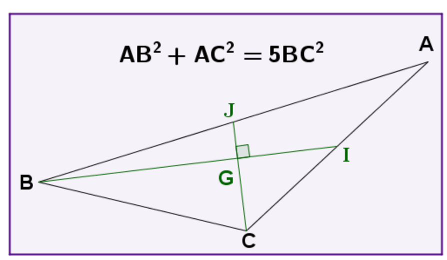
De plus : H est le pied de la hauteur issue de A donc : $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$

D'où : $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}\right) = \frac{1}{2}(0) = 0$ et $\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{IJ}$ est démontré .

Ainsi : (IJ) et (AA') sont bien perpendiculaires .

exercice 5 **utiliser le produit scalaire trouver une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que deux médianes d'un triangle soient perpendiculaires**

La situation : ABC est un triangle de centre de gravité noté G et I et J sont les milieux respectifs des segments [AC] et [AB] .



Les médianes (GI) et (GJ) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont orthogonaux soit si et seulement si : $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ} = 0$

expression de $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}$ en fonction des longueurs AB , AC et BC

En utilisant la position du centre de gravité de ABC sur chaque médiane de ce triangle on a : $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CJ}$

D'autre part : $\rightarrow \overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)$ (relation de Chasles ; I milieu de [CA] donc : $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Et : $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{6}\left(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$

→ De même en utilisant la relation de Chasles et J milieu de [BA] qui entraîne : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, on construit :

$\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BJ}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{6}\left(2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\left(\frac{1}{6}\left(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\left(2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\right)=\frac{1}{36}\left(\left(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{36}\left[\left(2\overrightarrow{BC}\cdot 2\overrightarrow{CB}\right)+\left(2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\cdot 2\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{36}\left[4\left(\overrightarrow{BC}\cdot -\overrightarrow{BC}\right)+2\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right)+2\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\right]$$

En utilisant ensuite l'expression suivante du produit scalaire : $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(MN^2+MP^2-NP^2\right)$ on obtient :

$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{36}\left[-4\left(\overrightarrow{BC}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\left(BC^2+BA^2-CA^2\right)+2\times\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)+\frac{1}{2}\left(AC^2+AB^2-CB^2\right)\right]$$

$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{36}\left[-4BC^2+\left(BC^2+BA^2-CA^2\right)+\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)+\frac{1}{2}\left(AC^2+AB^2-CB^2\right)\right]$$

$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{36}\left[-4BC^2+BC^2+CB^2-\frac{1}{2}CB^2+BA^2-AB^2+\frac{1}{2}AB^2-CA^2+CA^2+\frac{1}{2}AC^2\right]$$

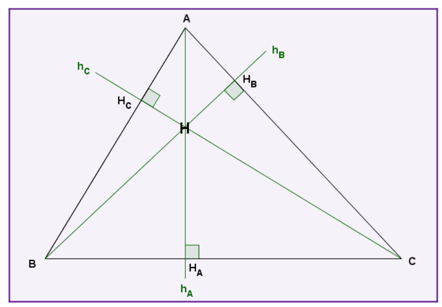
$$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=\frac{1}{36}\left[-\frac{5}{2}BC^2+\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2\right]=\frac{1}{72}\left(AB^2+AC^2-5BC^2\right)$$

CNS pour que (GI) et (GJ) soient perpendiculaires . en utilisant ce qui précède on déduit :

$$\overrightarrow{GI}\perp\overrightarrow{GJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{GJ}=0\Leftrightarrow\frac{1}{72}\left(AB^2+AC^2-5BC^2\right)=0\Leftrightarrow AB^2+AC^2-5BC^2=0\Leftrightarrow AB^2+AC^2=5BC^2$$

Donc : $\boxed{\text{les médianes du triangle ABC issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si : } AB^2+AC^2=5BC^2}$

exercice 6 utiliser le produit scalaire que les hauteurs d'un triangle sont concourrantes



Préalable : A , B , C , D points quelconques du plan . Alors

$x=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$x=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

$x=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$x=\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\left(-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$x=-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$x=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

$x=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}==-\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

Ainsi : Avec A , B , C , D points quelconques du plan on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

La situation : ABC sont trois points non alignés du plan et ABC est un triangle non rectangle .

Les hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A , B et C sont notées h_A , h_B et h_C .

1) Supposons que les hauteurs h_A et h_B ne soient pas sécantes . Elles sont donc parallèles et vérifient : $h_A\perp(BC)$ et $h_B\perp(AC)$.

Or : deux droites perpendiculaires à deux droites parallèles sont parallèles .

Par conséquent : $h_A//h_B$, $h_A\perp(BC)$ et $h_B\perp(AC)$ entraîne $(BC)//(AC)$

D'autre part : deux droites parallèles ayant un point en commun sont confondues . Par conséquent :

Ayant : $(BC)//(AC)$ et $C\in(BC)\cap(AC)$ on déduit : $(BC)//(AC)$. Les points A , B et C sont donc alignés ce qui contredit l'hypothèse : A , B et C non alignés . Les hauteurs h_A et h_B ne peuvent donc être parallèles .

Ainsi : les hauteurs h_A et h_B sont sécantes en un point noté H .

2) On dispose à présent de quatre points : A , B , C et H . En utilisant le préalable avec $D=H$ on obtient :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

D'autre part : comme hauteurs sécantes en H et issues respectivement de A et de B on a :

→ $h_A = (AH)$ et $h_A \perp (BC)$ d'où : $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

→ $h_B = (BH)$ et $h_B \perp (AC)$ d'où : $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$

Par conséquent : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ devient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + 0 + 0 = 0$ soit : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$

(CH) est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par C : on reconnaît en (CH) la hauteur h$_C$ du triangle ABC issue de C

Avec : $(CH) = h_C$ on déduit : la hauteur h$_C$ contient le point H .

Ainsi : <u>les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H (point appelé orthocentre du triangle ABC)</u>

Remarque : avec ABC rectangle par exemple en A : $h_B = (BA)$ et $h_C = (CA)$ car $(BA) \perp (CA)$. Les trois hauteurs de ABC recatngle en A sont naturellement concourantes en A .

3) On note H$_A$, H$_B$ et H$_C$ les pieds respectifs des hauteurs h$_A$, h$_B$ et h$_C$.

3-1 <u>$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$ est vrai</u> . En effet :

→ $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} \cdot \left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CA}\right)$ (symétrie du produit scalaire et relation de Chasles)

$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} + 0$ car $(BH) = h_B$ entraîne $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

D'où : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$

→ De même : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} \cdot \left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} + 0$ car $(HA) = h_A$ entraîne $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

D'où : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$ par symétrie du produit scalaire

3-2 <u>$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HH_A} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HH_B} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HH_C}$ est vrai</u> . En effet :

→ le projeté orthogonal de B sur h$_A = (HA)$ est le pied de la hauteur h$_A$. En effet : comme pied de la hauteur h$_A$, H$_A$ est le point d'intersection de h$_A$ et de (BC) . D'où : $(BH_A) = (BC)$ entraînant : $(BH_A) \perp (AH)$

Par conséquent : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HH_A}$ avec H$_A$ projeté orthogonal de B sur (HA)

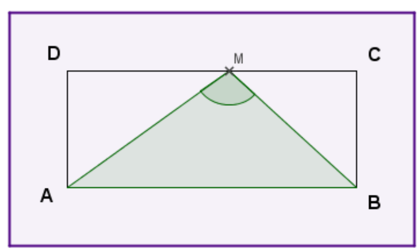
→ De même comme pied de la hauteur h$_B = (HB)$, H$_B$ est le projeté orthogonal de C sur (HB) et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HH_B}$

→ De même comme pied de la hauteur h$_C = (HC)$, H$_C$ est le projeté orthogonal de A sur (HC) et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HH_A}$

Ayant prouvé en 3-1 : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$ on déduit : $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HH_A} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HH_B} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HH_C}$

exercice 7

ABCD est un rectangle tel que $AB = 15$ et $BC = 6$.



M est un point intérieur au segment [CD] tel que $CM = x$ avec $x \in]0, 15[$

1) <u>$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}$ en fonction de x</u> . En utilisant la relation de Chasles on obtient :

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

D'autre part :

→ ABCD est un rectangle donc B est le projeté orthogonal de A sur (BC) et :

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CB}\right)^2 = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = CB^2 = 6^2 = 36$

→ M est un point de (CD) on a $(CM) = (CD)$; ABCD est un rectangle donc : $(CD) \perp (AD)$. Par conséquent :

D est le projeté orthogonal de A sur (CM) et : $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(-\overrightarrow{CM}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = -\left(\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD}\right)$

De plus : M ést intérieur au segment [CD] donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens et

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD} = \left\|\overrightarrow{CM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = CM \times CD = x \times 15 = 15x$ et : $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\left(\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD}\right) = -15x$

Par conséquent : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ devient : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = -15x + 36$ ou <u>$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 36 - 15x$</u>

2) <u>déduction de $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de x</u>

En utilisant la relation de Chasles on obtient : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB}$

D'autre part : $\rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}=36-15x$ en utilisant la symétrie du produit scalaire et la question **1)**

$\rightarrow (CM)=(CD)$; ABCD rectangle entraîne : $(CD)\perp(BC)$. Donc C est projeté orthogonal de B sur (CM) et :
$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MC}\right)^2=MC^2=x^2$

Par conséquent : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB}$ devient : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2+36-15x$ soit : $\underline{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2-15x+36}$

3) Le triangle MAB est rectangle en M si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux .

Or : $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ avec $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2-15x+36$ d'après la question **2) .**

Donc : $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow x^2-15x+36=0$

3 est une racine de $x^2-15x+36$ car $3^2-15\,(3)+36=9-45+36=0$.

Donc $x^2-15x+36$ est factorisable par $x-3$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2-15x+36=(x-3)\,(x-12)$.

D'où : $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow x^2-15x+36=0\Leftrightarrow(x-3)\,(x-12)=0\Leftrightarrow x=3$ ou $x=12$

Les valeurs 3 et 12 conviennent pour la longueur $x=CM$ car : $3\in\,]0,15[$ et $12\in\,]0,15[$.

Ainsi : <u>deux positions de M ($CM=3$ ou $CM=12$) sur le segment [CD] rendent le triangle MAB rectangle en M</u>

exercice 8

ABCD est un quadrilatère quelconque ; I est le milieu de [AC] et J est le milieu de [BD]

1) 1-1 $\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)=2\left(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$? . On note : $a=\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)$. On a :
$a=\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)=AB^2-AD^2+CD^2-CB^2=\left(AB^2-AD^2\right)-\left(CB^2-CD^2\right)$

Un des trois théorèmes de la médiane permet d'obtenir avec J milieu de [BD] : $\forall M\in\mathcal{P}$, $MB^2-MD^2=2(\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BD})$

En utilisant deux fois ce théorème avec $M=A$ et $M=C$ on construit :

$a=AB^2+CD^2-AD^2-CB^2=\left(AB^2-AD^2\right)-\left(CB^2-CD^2\right)=2(\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{BD})-2(\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{BD})$

$a=2(\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JC})\cdot\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{CJ})\cdot\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JA})\cdot\overrightarrow{BD}=2\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}\right)$

$a=2\left(-\overrightarrow{CA}\cdot-\overrightarrow{BD}\right)=2\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\right)=2\left(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$ (avec $(-\overrightarrow{u}\cdot-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et la symétrie du produit scalaire)

Ainsi : $\underline{\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)=2\left(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}$

1-2 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$? $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=\left(BA^2+BC^2\right)+\left(DA^2+DC^2\right)$

Un deuxième théorème permet d'obtenir avec I milieu de [AC] : $\forall M\in\mathcal{P}$, $MA^2+MC^2=2MI^2+\dfrac{1}{2}AC^2$

En utilisant deux fois ce théorème avec $M=B$ et $M=D$ on construit :

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=\left(BA^2+BC^2\right)+\left(DA^2+DC^2\right)=2BI^2+\dfrac{1}{2}AC^2+2DI^2+\dfrac{1}{2}AC^2=AC^2+2\left(IB^2+ID^2\right)$

Le même théorème avec J milieu de [BD] permet d'obtenir : $\forall M\in\mathcal{P}$, $MB^2+MD^2=2MJ^2+\dfrac{1}{2}BD^2$

En remplaçant M par I on obtient : $IB^2+ID^2=2IJ^2+\dfrac{1}{2}BD^2$. D'où :

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+2\left(IB^2+ID^2\right)=AC^2+2\left(2IJ^2+\dfrac{1}{2}BD^2\right)=AC^2+4IJ^2+BD^2$

Ainsi : $\underline{AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2}$

2) 2-1 condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère ABCD ait ses diagonales perpendiculaires

Les diagonales du quadrilatère ABCD sont [AC] et [BD] . Elles sont perpendiculaires si et seulement si : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

Or : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=0$

On a démontré en 1-1 : $\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)=2\left(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$. Donc :

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\left(AB^2+CD^2\right)-\left(AD^2+CB^2\right)=0\Leftrightarrow\left(AB^2+CD^2\right)=\left(AD^2+CB^2\right)$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère ABCD ait ses diagonales perpendiculaires est que ses quatre côtés verifient : $AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$

2-2 condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme

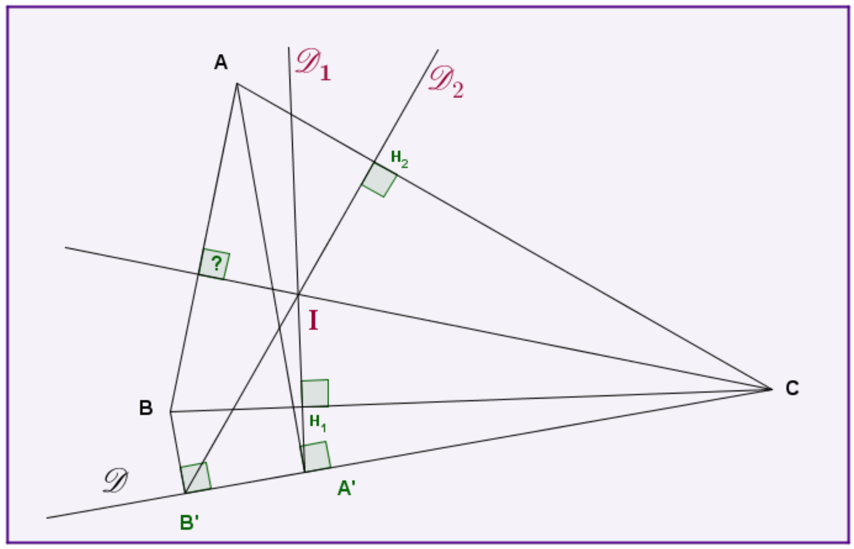
Le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme si et seulement si ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu soit si et seulement si : $I=J$. Or : $I=J\Leftrightarrow IJ=o$. D'après 1-2 : $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$.

Donc : $4IJ^2=\left(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\right)-\left(AC^2+BD^2\right)$. D'où :

$I=J\Leftrightarrow IJ=o\Leftrightarrow 4IJ^2=o\Leftrightarrow\left(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\right)-\left(AC^2+BD^2\right)\Leftrightarrow AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme est que la somme des carrés des longueurs de ses quatre côtés est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales

exercice 9 **utiliser le produit scalaire et les projetés orthogonaux pour montrer que deux droites sont perpendiculaires**



La situation : ABC est un triangle non aplati et $\mathcal{D}$ est une droite contenant seulement le sommet C de ce triangle . A' , B' sont les projetés orthogonaux respectifs des sommets A , B sur la droite $\mathcal{D}$.

On considère les deux droites suivantes :

→ $\mathcal{D}_1$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A'

→ $\mathcal{D}_2$ est la perpendiculaire à (CA) passant par B'

On note I le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

Pour justifier $(CI)\perp(AB)$ il suffit de justifier $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{AB}$ en montrant : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CI}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$

D'autre part : → $\mathcal{D}_2$ est la perpendiculaire à (CA) et contient les points I et B' . En notant H_2 le point d'intersection de $\mathcal{D}_2$ et (CA) on a donc H_2 projeté orthogonal des points B' et I et : $\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CB'}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CH_2}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

→ $\mathcal{D}_1$ est la perpendiculaire à (BC) et contient les points I et A' . En notant H_1 le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et (BC) on a donc H_1 projeté orthogonal des points A' et I et : $\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CH_1}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$

→ A' , B' sont les projetés orthogonaux respectifs des sommets A , B sur la droite $\mathcal{D}$ contenant C , A' et B'. Donc :

$\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CB'}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CB'}\cdot\overrightarrow{A'C}\right)$

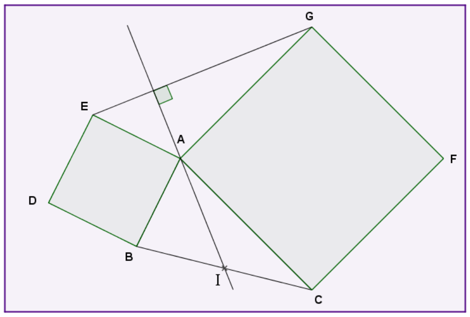
Par conséquent : $\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CB'}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)+\left(\overrightarrow{CB'}\cdot\overrightarrow{A'C}\right)$

Puis : $\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)+\left(\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)$ par symétrie du produit scalaire

Et : $\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)+\left(-\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)=\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)-\left(\overrightarrow{CA'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right)=0$

Ainsi : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$ devient : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Ayant prouvé $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{AB}$ on peut affirmer : les droites (CI) et (AB) sont perpendiculaires .



exercice 10 **Objet : utiliser le produit scalaire et sa formule utilisant un cosinus pour justifier que deux droites sont perpendiculaires**

La situation : ABDE et ACFG sont deux carrés construits extérieurement à un triangle ABC . I est le milieu de [BC] .

Pour justifier $(AI) \perp (EG)$ il suffit de prouver : $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{EG}$ en montrant : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$.

En utilisant la propriété caractéristique du milieu pour I milieu de [BC] on a : $\forall M \in \mathcal{P}$, $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

En remplaçant M par A on obtient : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ puis : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. D'où :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}\right)$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EA}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}\right)$

ABDE et ACFG étant des carrés on a : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AG}$ puis : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$. D'où :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}(0) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EA}\right) + \dfrac{1}{2}(0) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EA}\right)$.

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot -\overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}\right)$

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2} \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AG}\right\| \times \cos\alpha - \dfrac{1}{2} \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos\beta$ en notant α une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}}\right)$ et β une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right)$.

ABDE et ACFG étant des carrés on a : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AE}\right\| = AB\ et\ \left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC$ donc :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \cos\alpha - \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \cos\beta$

Il reste à comparer $\cos\alpha$ et $\cos\beta$. Pour cela on utilise une mesure a de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ et la relation de chasles concernant les angles orientés et les angles droits associés aux sommets des carrés ABDE et ACFG

$\rightarrow$ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}}\right)$ est la somme d'une mesure a de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ et somme d'une mesure $\dfrac{\pi}{2}$de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}}\right)$ donc : $\alpha \equiv \left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) [2\pi]$ et $cos\alpha = \cos\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos a$

$\rightarrow$ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right)$ est l'opposé d'une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}}\right)$. Une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}}\right)$ est la somme d'une mesure $\dfrac{\pi}{2}$ de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}}\right)$ et d'une mesure a de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ soit : $\dfrac{\pi}{2} + a$. Donc :

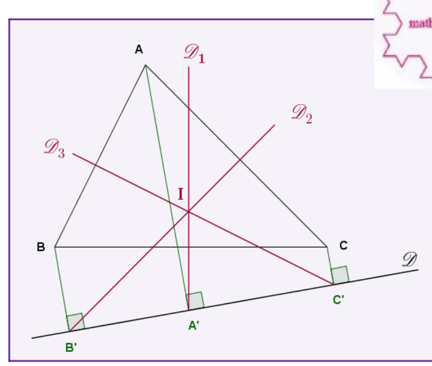
$\beta \equiv -\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) [2\pi]$ et $cos\beta = \cos\left[-\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos a$ et $cos\alpha = -\cos a$ donc : $cos\beta = cos\alpha$

En utilisant ce qui précède on déduit ensuite :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times cos\alpha - \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \cos\beta = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times cos\alpha - \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \cos\alpha = 0$

Ayant prouvé : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$ on peut affirmer : (AI) et (EG) sont deux droites perpendiculaires .

exercice 11 **Objet : utiliser le produit scalaire pour justifier que trois droites sont concourantes**



La situation : ABC est un triangle non aplati et $\mathcal{D}$ est une droite ne contenant aucun des trois sommets de ce triangle . A' , B' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs des trois sommets A , B et C sur la droite $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}_1$: perpendiculaire à (BC) passant par A' ; $\mathcal{D}_2$: perpendiculaire à (CA) passant par B' et $\mathcal{D}_3$: perpendiculaire à (AB) passant par C'

1) Supposons $\mathcal{D}_1$ // $\mathcal{D}_2$. $\mathcal{D}_1$ est perpendiculaire à (BC) et lorsque deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre . Donc : $\mathcal{D}_1$ // $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \perp (BC)$ permet de déduire : $\mathcal{D}_2 \perp (BC)$

D'autre part : $\mathcal{D}_2$ est perpendiculaire à (AC) et deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles .

Donc : $(BC) \perp \mathcal{D}_2$ et $(AC) \perp \mathcal{D}_2$ permet de déduire : $(BC)//(CA)$

D'autre part : les droites parallèles (BC) et (CA) ont en commun le point C .

Par conséquent : (BC) et (CA) sont confondues et les trois points A , B et C sont alignés .

Ainsi l'hypothèse $\mathcal{D}_1$ // $\mathcal{D}_2$ conduit à l'alignement des trois sommets du triangle ABC ce qui contredit ABC non aplati .

Donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne peuvent être parallèles . Ainsi : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont bien sécantes en un point qui est noté I .

remarque : un même raisonnement permet de justifier : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sécantes puis $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sécantes .

2) A justifier : $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}$

$\rightarrow \overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'I}) \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{B'I} \cdot \overrightarrow{AC})$

D'autre part : $\mathcal{D}_2$ est la perpendiculaire à (CA) passant par B' et contient I donc : $\mathcal{D}_2 = (B'I)$ et $\overrightarrow{B'I} \perp \overrightarrow{AC}$

Donc : $(\overrightarrow{B'I} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0$ et $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}) + 0 = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC})$

$\rightarrow \overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'I}) \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{A'I} \cdot \overrightarrow{CB})$

D'autre part : $\mathcal{D}_1$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A' et contient K donc : $\mathcal{D}_1 = (A'I)$ et $\overrightarrow{A'I} \perp \overrightarrow{CB}$

Donc : $(\overrightarrow{A'I} \cdot \overrightarrow{CB}) = 0$ et $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{A'I} \cdot \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}) + 0 = (\overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB})$

3) déductions : $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AB} = ?$ puis d_1 ,d_2 et d_3 concourantes en I

Ayant prouvé : $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}$ on obtient :

$\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'I} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\ \overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\ \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB})$

D'autre part : A' , B' , C' sont les projetés orthogonaux respectifs des trois sommets A , B et C sur la droite $\mathcal{D}$.

Donc : $(\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'})$ car $\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{A'C'}$ sur $\mathcal{D} = (C'B')$

Et : $(\ \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB}) = (\ \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{C'B'})$ car $\overrightarrow{CB}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{C'B'}$ sur $\mathcal{D} = (C'A')$

D'où : $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\ \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{CB})$ devient $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}) + (\ \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{C'B'})$

Et : $\overrightarrow{C'I} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}) + (\ \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{C'A'}) = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}) + (\ \overrightarrow{C'B'} \cdot -\overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}) - (\ \overrightarrow{C'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}) = 0$

Ainsi : $\overrightarrow{C'I} \perp \overrightarrow{AB}$ et $(C'I) \perp (AB)$.

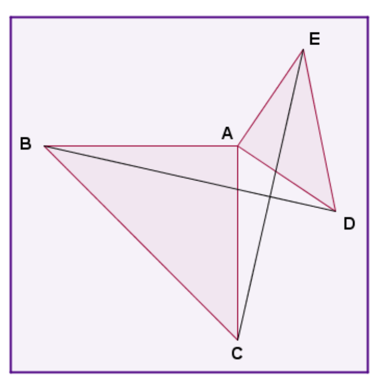
Comme droite perpendiculaire à (AB) et passant par C' , la droite $(C'I)$ est donc confondue avec la droite $\mathcal{D}_3$.

Par conséquent la droite $\mathcal{D}_3$ contient I qui est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sont donc bien concourantes en I .

exercice 12

Objet : utiliser le produit scalaire et sa formule utilisant un cosinus pour justifier que deux droites sont perpendiculaires



La situation : ABC et ADE sont deux triangles rectangles isocèles .

Prouver que (BD) et (CE) sont perpendiculaires .

Pour justifier $(BD) \perp (CE)$ il suffit de justifier $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{CE}$ en montrant : $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}\right)$ en utilisant la relation de Chasles

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}\right)$

ABC et ADE étant rectangles en A on a : $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AE}$ et donc : $\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}\right)=0$ et $\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}\right)=0$. D'où :

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=0+\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}\right)+0=\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AD}\cdot-\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}\right)-\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\times\cos\alpha-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\beta$ en notant α une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right)$

et β une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-AB\times AE\times\cos\alpha-AD\times AC\times\cos\beta$

D'autre part : → ABC et ADE étant isocèles de sommet parincipal A : $AB=AC$ et $AE=AD$.

→ en utilisant une mesure a de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$ et la relation de chasles concernant les angles orientés et les angles droits associés au sommet A des triangles rectangles ABC et ADE on obtient :

· une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right)$ est la somme des mesures des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{2}+a+\dfrac{\pi}{2}soit\ \pi+a$

· une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)$ est l'opposée d'une mesure a de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)$ soit : $-a$

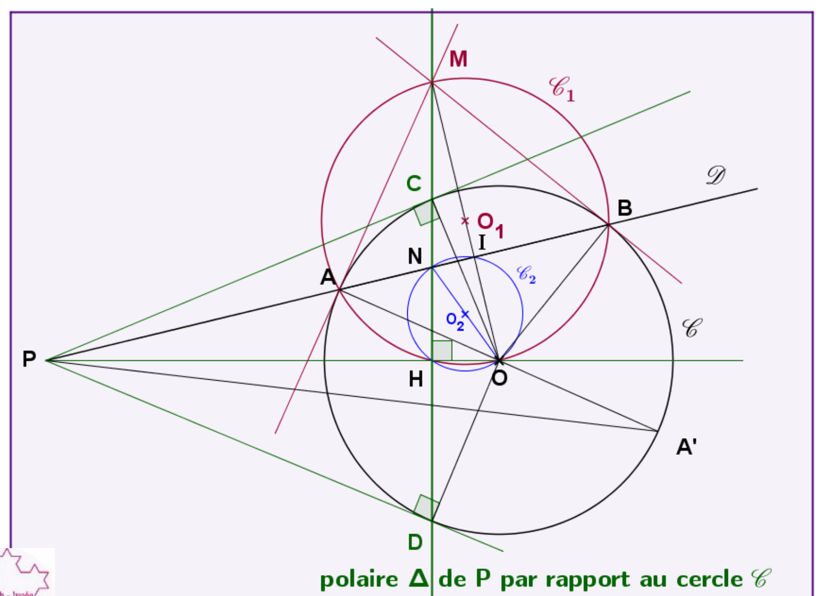
par conséquent : $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-AB\times AE\times\cos\overline{\alpha}-AD\times AC\times\cos\beta$ devient :

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-AC\times AD\times\cos\left(\pi+a\right)-AD\times AC\times\cos\left(-a\right)$ et $\cos\left(\pi+a\right)=-\cos a$; $\cos\left(-a\right)=\cos a$. D'où :

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-AC\times AD\times\left(-\cos a\right)-AD\times AC\times\cos a=AC\times AD\times\cos a-AD\times AC\times\cos a=0$.

Ayant prouvé : $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ on peut affirmer : les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires .

exercice 13 Objet : Puissance d'un point P par rapport à un cercle



$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r , P est un point n'appartenant pas au cercle $\mathcal{C}$ et distinct de O .

$\mathcal{D}$ est une droite contenant P coupant $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B .

1) 1-1 A justifier : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}=OP^2-r^2$.

A' étant le point diamétralement opposé au point A , le segment [AA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et pour tout point M de $\mathcal{C}$ on a par théorème : $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MA'}$.

B est un point de $\mathcal{C}$ donc : $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BA'}$.

B est donc le projeté orthogonal de A' sur (AB) qui est aussi (PA) avec A , B et P sont alignés . On déduit alors : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$.

D'autre part : → $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA'}\right)$ (relation de Chasles)

→ [AA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc O milieu de [AA'] et : $\overrightarrow{OA'}=-\overrightarrow{OA}$

Par conséquent : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}=\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA}\right)=\left\|\overrightarrow{PO}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2=PO^2-OA^2$

Et : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}=OP^2-r^2$ (A étant un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r : $OA=r$)

On a donc prouvé avec ce qui précède : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PA'}=OP^2-r^2$

1-2 le nombre $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ égal à OP^2-r^2 ne dépend que de la distance du point P au centre du cercle $\mathcal{C}$ et de la valeur du rayon de ce cercle . Le choix de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ et donc des points d'intersection A et B de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}$ n'intervient pas dans le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$.

vocabulaire : ce réel $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ est appelé la **puissance du point P par rapport au cercle** $\mathcal{C}$; il est noté $p(P,\mathcal{C})$.

Ainsi : $\boxed{p(P,\mathcal{C})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=OP^2-r^2}$

1-3 signe de $p(P,\mathcal{C})$ selon la position du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$

position de P par rapport au cercle $\mathcal{C}$	P intérieur à $\mathcal{C}$	P extérieur à $\mathcal{C}$
comparaison entre OP et le rayon r de $\mathcal{C}$	$OP<r$	$OP>r$
signe de $p(P,\mathcal{C})$	$OP^2<r^2$ et $p(P,\mathcal{C})<0$	$OP^2>r^2$ et $p(P,\mathcal{C})>0$

remarque : pour la dernière ligne de ce tableau on utilise : OP et r étant positifs les comparer revient à comparer leurs carrés

2) On note M le point d'intersection , quand il existe , des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ en A et en B et H le projeté orthogonal de M sur la droite (OP) .

Préalable : Les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ en A et en B sont perpendiculaires respectivement à (OA) et (OB) . Les supposer parallèles conduit au parallélisme des droites (OA) et (OB) soit à (OA) et (OB) confondues (comme doites parallèles ayant en commun le point O) .

On obtient alors l'alignement des points O , A et B sur la droite $\mathcal{D}$ contenant A et B . Autrement dit : supposer les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ en A et en B parallèles conduit à : $\mathcal{D}$ contient le centre O de $\mathcal{C}$.

<u>Dans la suite de l'exercice on suppose que $\mathcal{D}$ ne contient pas le centre O de $\mathcal{C}$</u> . Les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ en A et en B sont alors sécantes en un point noté M et on note H est le projeté orthogonal de M sur la droite (OP) ; (MA) est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A et est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en B

2-1 Justifier que les cinq points O, M , H , A , B sont situés sur un même cercle que l'on notera $\mathcal{C}_1$.

Comme tangentes respectives en A et en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre O on a : (MA) perpendiculaire à (OA) et (MB) perpendiculaire à (OB) . les triangles MOA et MOB sont donc rectangles respectivement en A et en B et d'hypothénuse [OM] . Par conséquent ces deux triangles sont inscriptibles dans le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [OM] . De même avec H projeté orthogonal de M sur la droite (OP) , le triangle OMH est rectangle en H et d'hypothénuse [OM] donc également inscriptible dans le cercle $\mathcal{C}_1$.

Ainsi : <u>les cinq points O, M , H , A , B sont situés sur le même cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [OM]</u> .

2-2 la droite (OP) coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ défini précédemment en O et en H . par conséquent le nombre $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}$ peut se définir comme la puissance du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [OM] . En utilisant le résultat de la question **1-2** on obtient :

$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}=p(P,\mathcal{C}_1)=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ car A et B également situés sur $\mathcal{C}_1$ et $(AB)=\mathcal{D}$

Et en utilisant la puissance du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$ *on* a : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=p(P,\mathcal{C})=OP^2-r^2$ d'après **1-2**

D'où : $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ devient : $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}=OP^2-r^2$

$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}$ est donc indépendant du choix de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ en A et B .

<u>position du point M</u> H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (OP) , le point M se situe sur une droite Δ perpendiculaire à (OP) en H . O , P , H étant alignés , $\overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{PH}$ sont colinéaires et $\left|\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}\right|=PO\times PH$ ou $\left|\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}\right|=OP\times PH$.

Donc : $PH=\dfrac{\left|\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}\right|}{OP}$ ($P\neq O$ entraîne $OP\neq 0$) avec : $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}=OP^2-r^2$. D'où : $PH=\dfrac{\left|OP^2-r^2\right|}{OP}$

La position de H projeté orthogonal de M sur (OP) ne dépend que de la distance de P au centre O du cercle $\mathcal{C}$ et du rayon r de ce cercle :

→ avec P extérieur à $\mathcal{C}$: $OP^2 > r^2$ d'où : $OP^2 - r^2 > 0$. On a alors : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH} > 0$ et $PH = \dfrac{\left|OP^2 - r^2\right|}{OP} = \dfrac{OP^2 - r^2}{OP}$

Les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{PH}$ sont donc de même sens (car : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH} > 0$) et $PH = \dfrac{OP^2 - r^2}{OP}$

→ avec P intérieur à $\mathcal{C}$: $OP^2 < r^2$ d'où : $OP^2 - r^2 < 0$. On a alors : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH} < 0$ et $PH = \dfrac{\left|OP^2 - r^2\right|}{OP} = \dfrac{r^2 - OP^2}{OP}$

Les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{PH}$ sont donc de sens contraires (car : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH} < 0$) et $PH = \dfrac{r^2 - OP^2}{OP}$

La position de H est donc bien indépendante du choix de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ en A et B .

Ainsi : la droite Δ perpendiculaire à (OP) en H (point fixe) et contenant M est bien une droite fixe .

vocabulaire : cette droite fixe Δ est appelée la polaire du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

2-3 Dans cette question on suppose P extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et on note C *et* D les points de contacts des droites tangentes au cercle $\mathcal{C}$ menées par P . Pour justifier que C est un point de Δ (droite perpendiculaire à (OP) passant par M) il suffit de montrer $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{PO}$ en prouvant : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.

C étant le point de contact de la droite tangente au cercle $\mathcal{C}$ menée par P , les droites (PC) et (OC) sont perpendiculaires et le triangle OCP est rectangle en C . On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle et obtenir ainsi :

$OP^2 = OC^2 + PC^2$. D'où : $PC^2 = OP^2 - OC^2 = OP^2 - r^2$ (C situé sur $\mathcal{C}$ donc : $OC = r$)

D'autre part : → $PC^2 = \left(\overrightarrow{PC}\right)^2 = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC}$ et donc : $OP^2 - r^2 = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC}$

→ d'après 2-1 : $OP^2 - r^2 = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PM}$ car H est le projeté orthogonal de M sur (OP)

Par conséquent : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PC}$ puis : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PM} = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \overrightarrow{PC} = \left(\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC}\right) + \left(\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PC}\right)$

Or : OCP est rectangle en C donc : $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$

D'où : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PM} = \left(\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC}\right) + 0 = \left(\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC}\right)$

On obtient ensuite $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ puis $\overrightarrow{PO} \cdot \left(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PC}\right) = 0$ puis $\overrightarrow{PO} \cdot \left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PM}\right) = 0$ d'où : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

Ayant prouvé : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ on peut affirmer : C est un point de Δ .

De même on montre : le point de contact D de la deuxième droite tangente au cercle $\mathcal{C}$ menée par P est un point de Δ .

remarque : avec P extérieur au cercle $\mathcal{C}$, la polaire du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$ peut se définir comme la droite passant par les points de contact des droites tangentes au cercle $\mathcal{C}$ menées par P .

3) Dans cette question on suppose P extérieur au cercle $\mathcal{C}$. On note N le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ .

3-1 A justifier : $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PI}$ avec I milieu de [AB] .

N étant sur Δ (perpendiculaire à (OP) en H), son projeté othogonal sur (OP) est H et le triangle OHN est rectangle en H .

Le triangle OAB est isocèle de sommet principal O car O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ avec A et B points de $\mathcal{C}$. I étant le milieu de [AB] , la médiane (OI) de ce triangle isocèle en O est perpendiculaire à (AB) (droite contenant N) et le triangle ONI est rectangle en I . Les deux triangles OHN et OIN rectangles de même hypothénuse [ON] sont donc inscriptibles dans le cercle de diamètre [ON] noté $\mathcal{C}_2$. Les points O , H , I , N sont donc situés sur un même cercle qui est $\mathcal{C}_2$. Les droites $\mathcal{D}$ et (OP) contiennent P et sont respectivement sécantes au cercle $\mathcal{C}_2$ en N , I et en O , H .

La puissance du point P utilisée par rapport à ce cercle $\mathcal{C}_2$ permet d'obtenir : $p(P, \mathcal{C}_2) = \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH}$

D'autre part : $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ d'après **2-2 .** Par conséquent : $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est vrai .

3-2 En déduire : $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IA^2=IB^2$.

En utilisant les propriétés du produit scalaire et la relation de Chasles on construit :

$\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IP}\cdot\left(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}\right)=\left(\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IP}\right)+\left(\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{PN}\right)=\left(\overrightarrow{IP}\right)^2+\left(-\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{PN}\right)=IP^2-\left(\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{PN}\right)=IP^2-\left(\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PI}\right)$

D'où : $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IP^2-\left(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\right)$ (on a prouvé en **3-1** : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PI}$)

D'autre part : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IB}\right)$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PI}-\overrightarrow{IA}\right)$ (I milieu de [AB] entraîne : $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$)

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left\|\overrightarrow{PI}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2$ (pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$)

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PI^2-IA^2=IP^2-IA^2$

Par conséquent l'égalité $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IP^2-\left(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\right)$ devient : $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IP^2-\left(IP^2-IA^2\right)=IP^2-IP^2+IA^2=IA^2$

Et I milieu de [AB] entraîne : $IA=IB$. Donc : $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IA^2=IB^2$ est justifié .

3-3 En déduire : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NP}$ puis : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\left(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}\right)$

→ En utilisant la relation de Chasles avec le milieu I de [AB] et les propriétés du produit scalaire on construit :

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NI}-\overrightarrow{IA}\right)$ ($\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ car I milieu de [AB])

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\left(\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{NI}\right)+\left(\overrightarrow{PI}\cdot\left(-\overrightarrow{IA}\right)\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\left(-\overrightarrow{IA}\right)\right)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\left(\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}\right)-\left(\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}\right)-\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA}\right)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\left(\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}\right)-\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{PI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}\right)-\left(\overrightarrow{IA}\right)^2$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=IA^2-\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{PI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}\right)-IA^2$ (en utilisant : $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IA^2$ prouvé en **3-2**)

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\left(\overrightarrow{IA}\cdot-\overrightarrow{PI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}\right)=\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NI}\right)+\left(\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IP}\right)=\overrightarrow{IA}\cdot\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IP}\right)$ et : $\underline{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NP}\text{ vrai}}$

→ De manière analogue on construit :

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)=\left(\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NI}-\overrightarrow{IB}\right)$ ($\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ car I milieu de [AB])

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{NI}\right)+\left(\overrightarrow{PI}\cdot\left(-\overrightarrow{IB}\right)\right)+\left(\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NI}\right)+\left(\overrightarrow{IB}\cdot\left(-\overrightarrow{IB}\right)\right)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}\right)-\left(\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NI}\right)-\left(\overrightarrow{IB}\right)^2$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=IB^2-\left(\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NI}\right)-IB^2$ (en utilisant : $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IN}=IB^2$ prouvé en **3-2**)

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IP}\right)+\left(\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NI}\right)=\overrightarrow{IB}\cdot\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IP}\right)$ et : $\underline{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NP}}$

→ On a prouvé : $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NP}$ et I milieu de [AB] entraîne : $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. Donc :

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{NP}=\left(-\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{NP}=-\left(\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{NP}\right)=-\left(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}\right)$

L'égalité $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\left(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{NA}\right)$ est vraie

3-4 A justifier : $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=r^2$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}\right)=\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}\right)+\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PN}\right)=\left(\overrightarrow{OP}\right)^2+\left(-\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PN}\right)=OP^2-\left(\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PN}\right)$

D'autre part : → Comme point situé sur Δ , N se projette orthogonalement en H sur (OP) et $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}$

→ D'après la question **2-2** : $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PH}=OP^2-r^2$

Par conséquent : $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=OP^2-\left(\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PN}\right)$ devient : $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=OP^2-\left(OP^2-r^2\right)=OP^2-OP^2+r^2$

Ainsi : les points O , P et n vérifient : $\underline{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=r^2}$

vocabulaire : les points O et N sont dits conjugués harmoniquement par rapport au cercle $\mathcal{C}$ de rayon r .