Produit Scalaire - corrigés feuille 3

exercice 1

1) **situation 1** : $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AN}$ donc : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \left(-\frac{3}{8}\overrightarrow{AN}\right)\cdot\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{8}\left(\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AN}\right) = -\frac{3}{8}\left(\overrightarrow{AN}\right)^2 = -\frac{3}{8}AN^2$

Or : $AN = 4$ donc : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{8}(4)^2 = -6$

situation 2 : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AN}\right\| \times \cos\overline{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN})} = AM \times AN \times \cos\overline{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = 3\times\sqrt{2}\times\cos 5\pi$ car : $AM = 3$; $AN = \sqrt{2}$ et $\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}}$ de mesure 5π

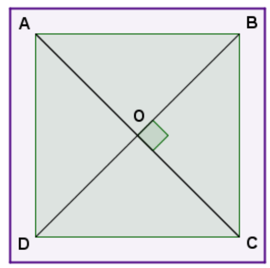
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = 3\times\sqrt{2}\times(-1)$ car $\cos 5\pi = \cos(\underbrace{4\pi}_{2k\pi\ ,\ k=2} + \pi) = \cos\pi = -1$. Ainsi : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = -3\sqrt{2}$

situation 3 : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}[AM^2 + AN^2 - MN^2] = \frac{1}{2}[(10)^2 + (7)^2 - (8)^2] = \frac{85}{2}$

situation 4 : A$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$; M$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; N $\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ donc : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2+3\\1+1\end{pmatrix}$ *soit* $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}-4+3\\5+1\end{pmatrix}$ *soit* $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$

D'où : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{AN}} + y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{AN}} = (5\times -1) + (6\times 2) = 7$

2) → ABCD étant un carré de centre O , le projeté orthogonal de C sur (AB) est B et :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = AB^2 = 3^2 = 9$

→ ABCD étant un carré , $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

→ Comme centre du carré ABCD , O est le milieu de [AC] et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{2}AC^2$

D'autre part en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle isocèle en B , on obtient :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$. D'où : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{18}{2} = 9$

→ O est le milieu de [AC] donc : $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Par conséquent :

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = -\frac{1}{4}AC^2 = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}$

→ Comme centre du carré ABCD , O est le milieu de [BD] et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Donc :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = (-\overrightarrow{DA})\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}\right)$

D'autre part : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}$ car A est le projeté orthogonal de B sur (DA) . Donc :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}\right)^2 = -\frac{1}{2}DA^2 = -\frac{1}{2}\times 3^2 = -\frac{9}{2}$

3) $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$; $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ de mesure $\frac{4\pi}{3}$ donc : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = 3{\times}2\times\cos\frac{4\pi}{3}$

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 6\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = 6\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = -6\times\frac{1}{2} = \underline{-3 = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}$

→ $x = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) = 3^2 + 2^2 - 2(-3) = 19$

→ $y = (-2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})\cdot(-3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 6(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}) + 2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) - 9(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}) - 3(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})$

$y = 6(\overrightarrow{u})^2 + 2(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) - 9(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) - 3(\overrightarrow{v})^2$ car $(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})$ (symétrie du produit scalaire)

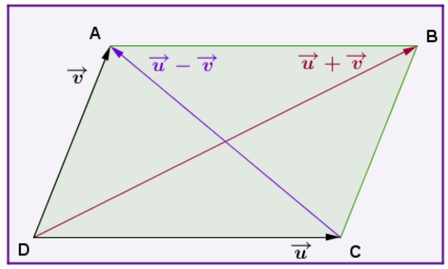
$y = 6\|\overrightarrow{u}\|^2 - 7(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) - 3\|\overrightarrow{v}\|^2 = 6(3)^2 - 7(-3) - 3(2)^2 = 63$

→ pour déterminer le réel z (qui est positif comme norme d'un vecteur) on commence par calculer son carré

$z^2 = \|3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}\|^2 = \|3\overrightarrow{u}\|^2 + \|2\overrightarrow{v}\|^2 - 2(3\overrightarrow{u}\cdot 2\overrightarrow{v}) = 9\|\overrightarrow{u}\|^2 + 4\|\overrightarrow{v}\|^2 - 12(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) = 9(3)^2 + 4(2)^2 - 12(-3) = 133$

Ayant $z^2 = 133$ et $z > 0$ on déduit : $z = \sqrt{133}$

exercice 2 On donne $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 2$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure $\dfrac{\pi}{3}$



$\to \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$ avec α mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 3 \times 2 \times \dfrac{1}{2} = 3$

$\to \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = (3)^2 + 2(3) + (2)^2 = 19$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 19$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| > 0$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{19}$

$\to \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 = (3)^2 - 2(3) + (2)^2 = 7$; $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 7$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| > 0$ donc $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{7}$

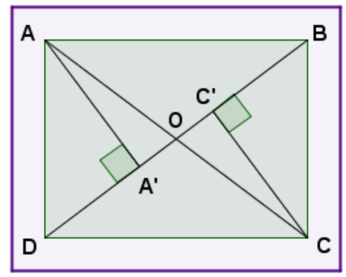
$\to x = (2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-\vec{u}+3\vec{v}) = -2\,(\vec{u})^2 + 6\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\vec{u}) + 3\,(\vec{v})^2$ et $(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{u})$

$x = -2\,(\vec{u})^2 + 5\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) + 3\,(\vec{v})^2 = -2\,(3)^2 + 5\,(3) + 3\,(2)^2 = 9$ car $(\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$, $(\vec{v})^2 = \|\vec{v}\|^2$

$\to y = \left(\frac{2}{3}\vec{u} - 5\vec{v}\right)\cdot(-3\vec{u}+4\vec{v}) = -2\,(\vec{u})^2 + \dfrac{53}{3}\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) - 20\,(\vec{v})^2 = -2\,(3)^2 + \dfrac{53}{3}\,(3) - 20\,(2)^2 = -45$

$\to z = (3\vec{u}-2\vec{v})^2 = (3)^2\,(\vec{u})^2 - 12\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (-2)^2\,(\vec{v})^2 = 9\,(3)^2 - 12\times(3) + 4\,(2)^2 = 61$

exercice 3 ABCD est un rectangle de centre O tel que : $AB = DC = 4$ et $AD = BC = 3$;



A'et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et de C sur (BD) .

1) $\to \left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = AC^2$; $\left(\overrightarrow{BD}\right)^2 = BD^2$. ABCD étant un rectangle , les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en B et A . Le Théorème de Pythagore est applicable dans chacun de ces deux triangles et permet d'obtenir :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ et $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Or : $AB = 4$ et $AD = BC = 3$. Donc :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ et $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ et ainsi : $\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{BD}\right)^2 = 25$

<u>remarque</u> : $AC = BD = \sqrt{25} = 5$. On retrouve une propriété connue : un rectangle a ses diagonales de même longueur

$\to \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ car ABCD rectangle entraîne $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ orthogonaux

$\to \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$ car O centre de ABCD et donc O milieu de [AC] ce qui entraîne $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

D'où : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{2}\times\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{1}{2}\times\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = -\dfrac{1}{2}\times 25 = \dfrac{25}{2}$ (car : $\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = 25$)

$\to \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA}\cdot\left(-\overrightarrow{CD}\right) = -\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}\right) = -\left(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}\right)$ car A se projette orthogonalement sur (CD) en D ($(CD)\perp(AD)$)

Donc : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC} = -\left(\overrightarrow{CD}\right)^2 = -\left(CD^2\right) = -\left(4^2\right) = -16$

2) D'une part : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \times cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})} = BA \times BD \times cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})} = 4 \times 5 \times cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})} = 20cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})}$

D'autre part : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{2}[BA^2 + BD^2 - AD^2] = \dfrac{1}{2}[4^2 + 5^2 - 3^2] = \dfrac{1}{2}[16 + 25 - 9] = 16$

Donc : $20cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})} = 16$ puis : $cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})} = \dfrac{16}{20}$ soit : $cos\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})} = \dfrac{4}{5}$

3) $\to$ En utilisant la relation de Chasles on obtient : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$

D'autre part : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ car le rectangle ABCD est un parallélogramme particulier . Donc :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = AB^2 - BC^2$

$\to$ déduction de la longueur A'C' . On vient de prouver : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2$

En utilisant la valeur des longueurs AB et BC on obtient : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

Les points A' et C' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD) . Donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{A'C'}$ sur (BD) et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{DB}$ avec $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{DB}$ colinéaires et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 7$. Donc $\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{DB} = 7$ et $7 > 0$.

Les deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{DB}$ ayant un produit scalaire positif sont colinéaires de même sens et $\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{DB} = A'C' \times DB$

D'où : $A'C' \times DB = 7$ puis $A'C' = \dfrac{DB}{7} = \dfrac{5}{7}$ ($BD = 5$ d'après **1)**)

exercice 4 ABC est un triangle vérifiant : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

2-1 En utilisant la relation de Chasles on a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Donc : $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$ car : $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$ par symétrie du produit scalaire .

D'autre part : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.

Donc : $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = (5)^2 + (2)^2 - 2(6) = 25 + 4 - 12 = 17$ et $BC^2 = 17$

Ayant $BC^2 = 17$ et $BC > 0$ on déduit : $\underline{BC = \sqrt{17}}$.

2-2 Pour calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ on utilise : $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{17} et$ le théorème suivant :

Pour tous points M , N et P , $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(MN^2 + MP^2 - NP^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(BC^2 + BA^2 - CA^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{17}\right)^2 + (2)^2 - (5)^2\right) = \frac{1}{2}(17 + 4 - 25) = -2$

Et : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left((5)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 - (2)^2\right) = \frac{1}{2}(25 + 17 - 4) = 19$

Ainsi : $\underline{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -2 \text{ et } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19}$.

2-3 I le milieu de [AB] donc : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}(6) = 3$. Et :

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 + \left(\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 + \left(-\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}AB^2 - \left(\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}(2)^2 - (3) = -2$ en utilisant : $AB = 2$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$

2-4 On note G le centre de gravité de ABC et A' , B' , C' les milieux respectifs des segments [BC] , [CA] et [AB] ($C' = I$) .

En utilisant la position du centre de gravité G sur chacune des trois médianes [AA'] , [BB'] , [CC'] on a :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

D'autre part en utilisant trois fois la propriété caractéristique du milieu on a pour tout point M :

$2\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ car A' milieu de [BC] ; $2\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$ car B' milieu de [AC] ; $2\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ car C' milieu de [AB]

Donc : $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (avec $M = A$) ; $2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (avec $M = B$) ; $2\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ (avec $M = C$)

Et : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ devient : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AA'}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

De même : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ devient : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{BB'}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ devient : $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{CC'}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Donc : $AG^2 = \left\|\overrightarrow{AG}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$AG^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{1}{9}AC^2 - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{1}{9}AC^2 - \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$

De même : $BG^2 = \left\|\overrightarrow{BG}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \frac{1}{9}BA^2 + \frac{1}{9}BC^2 - \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$

Et : $CG^2 = \left\|\overrightarrow{CG}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \frac{1}{9}CA^2 + \frac{1}{9}CB^2 - \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right)$

En utilisant la symétrie du produit scalaire et les valeurs numériques suivantes : $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = \sqrt{17}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

$\left(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}\right) = -2$; $\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = 19$ .on déduit :

$AG^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{1}{9}AC^2 - \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{9}(2)^2 + \frac{1}{9}(5)^2 - \frac{2}{9} \times (6) = \frac{29}{9} - \frac{12}{9} = \frac{17}{9}$

$BG^2 = \frac{1}{9}BA^2 + \frac{1}{9}BC^2 - \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{9}(2)^2 + \frac{1}{9}\left(\sqrt{17}\right)^2 - \frac{2}{9} \times (-2) = \frac{25}{9}$

$CG^2 = \frac{1}{9}CA^2 + \frac{1}{9}CB^2 - \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{9}(5)^2 + \frac{1}{9}\left(\sqrt{17}\right)^2 - \frac{2}{9} \times (19) = \frac{4}{9}$

exercice 5 **1)** Démontrons le théorème de la médiane : $\forall M \in \mathcal{P}$, $ME^2 + MF^2 = 2MP^2 + \frac{1}{2}EF^2$ avec P milieu de [EF]

Soit M un point quelconque du plan . $ME^2 + MF^2 = \left\|\overrightarrow{ME}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MF}\right\|^2$. D'autre part :

$\rightarrow \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE}$ donc : $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{PE}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PE}\right) = MP^2 + PE^2 + 2\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PE}\right)$

$\rightarrow \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PE}$ car P milieu de [EF] entraîne : $\overrightarrow{PF} = -\overrightarrow{PE}$. D'où :

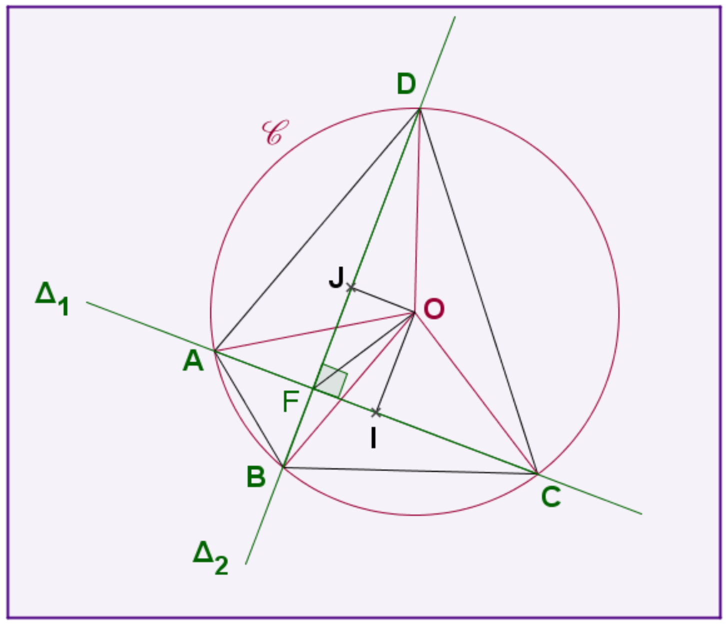
$\left\|\overrightarrow{MF}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PE}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{PE}\right\|^2 - 2\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PE}\right) = MP^2 + PE^2 - 2\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PE}\right)$

Par conséquent : $ME^2 + MF^2 = MP^2 + PE^2 + 2\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PE}\right) + MP^2 + PE^2 - 2\left(\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PE}\right) = 2MP^2 + 2PE^2$

Or : P milieu de [EF] entraîne : $PE = \dfrac{1}{2}EF$ et $PE^2 = \dfrac{1}{4}EF^2$. D'où : $ME^2 + MF^2 = 2MP^2 + 2\left(\dfrac{1}{4}EF^2\right) = 2MP^2 + \dfrac{1}{2}EF^2$

Ainsi : $\forall M \in \mathcal{P}$, $ME^2 + MF^2 = 2MP^2 + \frac{1}{2}EF^2$ avec P milieu de [EF] .

2) Application : $\mathcal{C}$ est un cercle centré en O et de rayon r . F est un point distinct de O et intérieur au cercle $\mathcal{C}$. On mène par ce point F deux droites perpendiculaires notées Δ_1 et Δ_2 qui coupent le cercle C respectivement en A , C et en B , D . On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD] .



2-1 A justifier : $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 4r^2$

$FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = \left(FA^2 + FC^2\right) + \left(FB^2 + FD^2\right)$

En utilisant deux fois le théorème de la médiane au point F on obtient :

$FA^2 + FC^2 = 2FI^2 + \dfrac{1}{2}AC^2$ car I milieu de [AC]

$FB^2 + FD^2 = 2FJ^2 + \dfrac{1}{2}BD^2$ car J milieu de [BD]

D'où : $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2FI^2 + \dfrac{1}{2}AC^2 + 2FJ^2 + \dfrac{1}{2}BD^2 = 2\left(FI^2 + FJ^2\right) + \dfrac{1}{2}AC^2 + \dfrac{1}{2}BD^2$

Le triangle FIJ est rectangle en F car $(IF) = \Delta_1$, $(JF) = \Delta_2$ et Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en F . Le théorème de Pythagore est applicable dans ce triangle et $FI^2 + FJ^2 = IJ^2$.

D'où : $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2\left(IJ^2\right) + \dfrac{1}{2}AC^2 + \dfrac{1}{2}BD^2$

I milieu de [AC] donc : $AC = 2AI$ et : $\dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2}(2AI)^2 = \dfrac{1}{2} \times 4AI^2 = 2AI^2$

J milieu de [BD] donc : $BD = 2BJ$ et : $\dfrac{1}{2}BD^2 = \dfrac{1}{2}(2BJ)^2 = \dfrac{1}{2} \times 4BJ^2 = 2BJ^2$

D'où : $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2IJ^2 + 2AI^2 + 2BJ^2$

A , B , C et D étant situés sur le cercle $\mathcal{C}$, les triangles OAC et OBD sont isocèles de sommet principal O . I et J étant les milieux respectifs de [AC] et de [BD] , les médianes [OI] et [OJ] issues de O pour chacun de ces deux triangles sont les médiatrices respectives des segments [AC] et de [BD] et les triangles OAI et OBJ sont rectangles respectivement en I et en J .

Le théorème de Pythagore est applicable dans chacun de ces triangles .

D'où : $OA^2 = OI^2 + AI^2$ et $OB^2 = OJ^2 + BJ^2$. D'autre part : $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}$ donc : $OA = OB = r$.

D'où : $r^2 = OI^2 + AI^2$ et $r^2 = OJ^2 + BJ^2$

Ainsi : $AI^2 = r^2 - OI^2$ et $BJ^2 = r^2 - OJ^2$.

L'égalité $FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=2IJ^2+2AI^2+2BJ^2$ devient ainsi :

$FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=2IJ^2+2\left(r^2-OI^2\right)+2\left(r^2-OJ^2\right)$

D'où : $FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=4r^2+2IJ^2-2OI^2-2OJ^2=4r^2-2\left(IJ^2-OI^2-OJ^2\right)$

Le triangle OIJ est rectangle en O . En effet :

$\rightarrow (OJ)\perp(BD)$ et $(AC)\perp(BD)$ entraîne $(OJ)//(AC)$

$\rightarrow (OJ)//(AC)$ et $(AC)\perp(OI)$ entraîne $(OJ)\perp(OI)$

Le théorème de Pythagore est applicable dans le triangle OIJ et : $IJ^2=OI^2+OJ^2$ puis $IJ^2-OI^2-OJ^2=0$

L'égalité $FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=4r^2-2\left(IJ^2-OI^2-OJ^2\right)$ devient ainsi :

$FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=4r^2-2(0)$ soit $\underline{FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=4r^2}$

2-2 En déduire : $AB^2+CD^2=AD^2+CB^2=4r^2$

Avec Δ_1 et Δ_2 perpendiculaires en F et contenant respectivement A , C et B , D , les quatre triangles FAB , FBC , FAD et FDC sont rectangles en F . Le théorème de Pythagore est applicable dans chacun de ces triangles .

D'où : $FA^2+FB^2=AB^2$, $FB^2+FC^2=BC^2$, $FA^2+FD^2=AD^2$, $FC^2+FD^2=CD^2$.

Par conséquent : $AB^2+CD^2=\left(FA^2+FB^2\right)+\left(FC^2+FD^2\right)=FA^2+FB^2+FC^2+FD^2$

Et : $AD^2+BC^2=\left(FA^2+FD^2\right)+\left(FB^2+FC^2\right)=FA^2+FD^2+FB^2+FC^2=FA^2+FB^2+FC^2+FD^2$

D'autre part : $FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=4r^2$ d'après **2-1**

Donc : $AB^2+CD^2=AD^2+CB^2=FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=4r^2$

exercice 6

ABC est un triangle et I est le milieu de [AB] .

En utilisant un théorème de la médiane on a pour tout point M du plan : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ car I est le milieu de [AB] .

Avec $M=C$ on obtient : $CA^2+CB^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

D'où : $CA^2+CB^2-\frac{1}{2}AB^2=2CI^2$ puis : $CI^2=\frac{1}{2}CA^2+\frac{1}{2}CB^2-\frac{1}{4}AB^2$ soit : $\boxed{CI^2=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{4}AB^2}$ <u>égalité 1</u>

<u>**situation 1**</u> : ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $AB=AC=7$; $BC=5$

L'égalité 1 devient : $CI^2=\frac{1}{2}(7)^2+\frac{1}{2}(5)^2-\frac{1}{4}(7)^2=\frac{49}{2}+\frac{25}{2}-\frac{49}{4}=37-\frac{49}{4}=\frac{148}{4}-\frac{49}{4}=\frac{99}{4}=\frac{9}{4}\times 11$

Ayant : $CI^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{11}\right)^2$ et $CI>0$ on déduit : $CI=\frac{3}{2}\sqrt{11}$

<u>**situation 2**</u> : ABC est un triangle rectangle isocèle en B tel que : $AB=4$

Le triangle ABC étant isocèle en B avec $AB=4$, on a : $BA=BC=4$.

ABC étant un triangle rectangle isocèle en B , le théorème de Pythagore est applicable .

D'où : $AC^2=BA^2+BC^2=4^2+4^2=32$

L'égalité 1 devient : $CI^2=\frac{1}{2}(32)+\frac{1}{2}(4)^2-\frac{1}{4}(4)^2=16+8-4=20=(2\sqrt{5})^2$

Ayant : $CI^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$ et $CI>0$ on déduit : $CI=2\sqrt{5}$

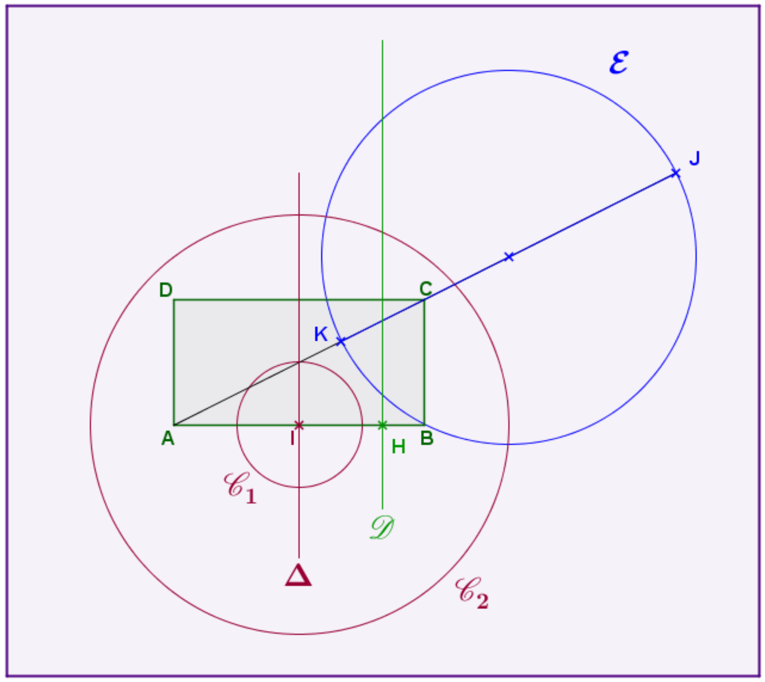
<u>**situation 3**</u> : ABC est un triangle équilatéral tel que : $AB=5$. Donc : $AB=AC=BC=5$

L'égalité 1 devient : $CI^2=\frac{1}{2}(5)^2+\frac{1}{2}(5)^2-\frac{1}{4}(5)^2=\frac{3}{4}(5)^2=\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2$

Ayant : $CI^2=\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2$ et $CI>0$ on déduit : $CI=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

 ABCD est un rectangle vérifiant : $AB = 6$ et $BC = 3$

1) ensemble $\Delta = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \right\}$



M désigne un point du plan . Alors :

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$M \in \Delta \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

En utilisant la propriété caractéristique du milieu on a :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ avec I milieu de [AB] .

Donc : $M \in \Delta \Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MI}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$M \in \Delta \Leftrightarrow 2 \times \left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = 0$

et $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{AB}$

L'équivalence $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{AB}$ permet d'affirmer :

Δ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par I

milieu de [AB] .

Autrement dit : Δ est la médiatrice du segment [AB] .

ensemble $\mathcal{C}_1 = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / MA^2 + MB^2 = \dfrac{45}{2} \right\}$

M désigne un point du plan . Alors : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = \dfrac{45}{2}$

En utilisant un théorème de la médiane on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ avec I milieu de [AB] .

Donc : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = \dfrac{45}{2} \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}(6)^2 = \dfrac{45}{2}$ car : $AB = 6$

$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = \dfrac{45}{2} \Leftrightarrow 2MI^2 = \dfrac{45}{2} - 18 \Leftrightarrow 2MI^2 = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow MI = \dfrac{3}{2}$ $(MI > 0)$

L'équivalence $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow MI = \dfrac{3}{2}$ permet d'affirmer : $\mathcal{C}_1$ est le cercle de rayon $\dfrac{3}{2}$ centré en I milieu de [AB] .

ensemble $\mathcal{C}_2 = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 \right\}$

M désigne un point du plan . Alors : $M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$

En utilisant un théorème de la médiane on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ avec I milieu de [AB] .

Donc : $M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 + 16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}(6)^2 + 16$ car : $AB = 6$

$M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow MI^2 = 25 \Leftrightarrow MI^2 = (5)^2 \Leftrightarrow MI = 5$ $(MI > 0)$

L'équivalence $M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow MI = 5$ permet d'affirmer : $\mathcal{C}_2$ est le cercle de rayon 5 centré en I milieu de [AB] .

2) ensemble $\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathcal{P} / MA^2 - MB^2 = 24 \right\}$

2-1 H est le point de [AB] tel que $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Pour justifier que H est un point de $\mathcal{D}$ il suffit de montrer : $HA^2 - HB^2 = 24$

D'autre part : $\rightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (I milieu de [AB] entraîne : $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$)

$\overrightarrow{HA} = -\dfrac{2}{6}\overrightarrow{AB} - \dfrac{3}{6}\overrightarrow{AB} = -\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ et $HA = \left\|\overrightarrow{HA}\right\| = \left\|-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}\right\| = \dfrac{5}{6} \times AB = \dfrac{5}{6} \times 6 = 5$ ($AB = 6$)

$\rightarrow$ H intérieur au segment [AB] car $\overrightarrow{HA} = -\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{BA}$ et $0 < \dfrac{5}{6} < 1$. Donc : $HB = AB - AH = 6 - 5 = 1$

Par conséquent : $HA^2 - HB^2 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$ et H est bien un point de $\mathcal{D}$.

2-2 M désigne un point du plan . Alors :

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 24 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = HA^2 - HB^2$ ($24 = HA^2 - HB^2$ d'après **2-1**)

En utilisant deux fois un théorème de la médiane on a : $\forall P \in \mathcal{P}$, $PA^2 - PB^2 = 2\left(\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$

Donc : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = 2\left(\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

L'équivalence $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ permet d'affirmer :

$\mathcal{D}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H défini par $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

3) ensemble $\mathrm{E} = \left\{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 = 4MC^2\right\}$

3) 3-1 point J défini par : $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o}$

$\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} - 2\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{o}$

$\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{o}$

$\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow -\overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC}$

Cette équivalence permet d'affirmer : J est l'extrémité du représentant du vecteur $2\overrightarrow{AC}$ d'origine fixée en A

point K défini par : $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o}$

$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{o}$

$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{o}$

$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Cette équivalence permet d'affirmer : K est l'extrémité du représentant du vecteur $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ d'origine fixée en A

3-2 M désigne un point du plan . Alors :

$M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow MA^2 = 4MC^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 = 4\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 = \left\|2\overrightarrow{MC}\right\|^2$

$M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 - \left\|2\overrightarrow{MC}\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\right) = 0$. (car : $\|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$)

D'autre part en utilisant les égalités $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o}$ et $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o}$ définissant J et K , on a pour tout point M :

$\rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}\right) - 2\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}\right) = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{MJ} - 2\overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{MJ} + \left(\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC}\right) = -\overrightarrow{MJ} + (\overrightarrow{o}) = -\overrightarrow{MJ}$

$\rightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}\right) = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{MK} + \left(\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC}\right) = 3\overrightarrow{MK} + (\overrightarrow{o}) = 3\overrightarrow{MK}$

Par conséquent : $M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\right) = 0$ devient : $M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{MJ}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{MK}\right) = 0$

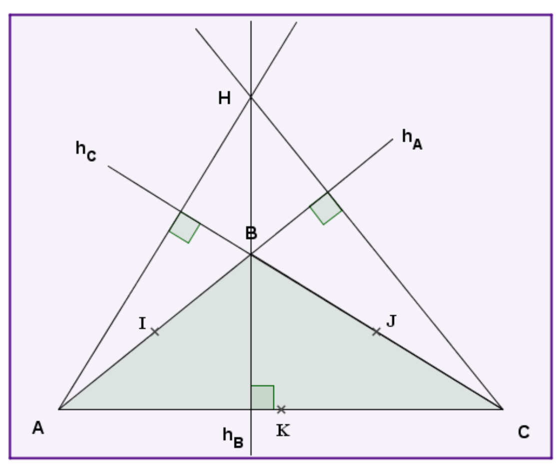
D'où : $M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow -3\left(\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK}\right) = 0$ et $M \in \mathrm{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{MK}$.

Cette équivalence permet d'affirmer : l'ensemble E est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{MK}$.

Un théorème permet de conclure : E est le cercle de diamètre $[JK]$.

exercice 8

1) Le triangle ABC est tel que : $AB = 5, AC = 9, BC = 6$.



$\mathrm{E}_1 = \left\{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MB^2 = 45\right\}$

$\mathrm{E}_2 = \left\{M \in \mathcal{P} \ / \ MB^2 - MC^2 = -56\right\}$

$\mathrm{E}_3 = \left\{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MC^2 = -11\right\}$.

1-1 En utilisant la propriété caractéristique de E_2 on a :

$A \in E_2 \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = -56$

Or : $AB = 5, AC = 9$ donc : $AB^2 - AC^2 = 5^2 - 9^2 = 25 - 81 = -56$

L'équivalence $A \in E_2 \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = -56$ permet de déduire : $A \in E_2$ vrai .

<u>ensemble E$_2$</u> M est un point quelconque du plan . Alors : $M \in E_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = -56$

Un théorème de la médiane permet d'obtenir : pour tout point M , $MB^2 - MC^2 = 2\left(\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$ avec J milieu de [BC] .

En particulier pour le point A : $AB^2 - AC^2 = 2\left(\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$

D'où : $M \in E_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = -56$ devient avec $A \in E_2 \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = -56$: $M \in E_2 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$

D'où : $M \in E_2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = 2\left(\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC}\right) - \left(\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = 0$

Et : $M \in E_2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC}\right) - \left(\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{JM} - \overrightarrow{JA}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JM}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Et : $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$. Cette équivalence définit E$_2$ comme la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) .

<u>E$_2$ est donc la hauteur h$_A$ du triangle ABC issue de A</u> .

1-2 Démontrer que l'ensemble E$_3$ est la hauteur h$_B$ du triangle ABC issue de B .

Justifions d'abord : $B \in E_3$ en utilisant : $AB = 5, BC = 6$

$BA^2 - BC^2 = 5^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$ donc $B \in E_3$ est vrai .

<u>ensemble E$_3$</u> M est un point quelconque du plan . Alors : $M \in E_3 \Leftrightarrow MA^2 - MC^2 = -11$

Un théorème de la médiane permet d'obtenir : $MA^2 - MC^2 = 2\left(\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$ avec K milieu de [AC] .

En particulier : $BA^2 - BC^2 = 2\left(\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$.

Avec M et B éléments de E$_3$ on obtient : $MA^2 - MC^2 = 2\left(\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = -11$ et $BA^2 - BC^2 = 2\left(\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = -11$

Donc : $M \in E_3 \Leftrightarrow MA^2 - MC^2 = -11$ devient : $M \in E_3 \Leftrightarrow MA^2 - MC^2 = BA^2 - BC^2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$

D'où : $M \in E_3 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Et : $M \in E_3 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$.

E$_3$ est donc la droite passant par B et perpendiculaire à (AC) . D'où : E$_3 = h_B$

1-3 <u>ensemble E$_1$ = $\left\{M \in \mathcal{P} \ / MA^2 - MB^2 = 45\right\}$</u> (rédaction succinte)

$CA^2 - CB^2 = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$ donc C est élément de E$_1$.

Par théorème : pour tout point M : $MA^2 - MB^2 = 2\left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$ avec I milieu de [AB] .

comme en **1-1** et en **1-2** on construit : $M \in E_1 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = CA^2 - CB^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)$

$M \in E_1 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$ et : E$_1 = h_C$

2) On se place dans le cas général : a , b , c sont des réels positifs et : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. On note h$_A$, h$_B$, h$_C$

les hauteurs de ABC issues respectivement de A , B , C .

E$_1$ = $\left\{M \in \mathcal{P} \ / MA^2 - MB^2 = k_1\right\}$; E$_2$ = $\left\{M \in \mathcal{P} \ / MB^2 - MC^2 = k_2\right\}$; E$_3$ = $\left\{M \in \mathcal{P} \ / MA^2 - MC^2 = k_3\right\}$

2-1 valeurs de k$_1$, k$_2$ et k$_3$ pour que E$_1$, E$_2$, E$_3$ contiennent respectivement C , A , B .

$C \in E_1 \Leftrightarrow CA^2 - CB^2 = k_1 \Leftrightarrow b^2 - a^2 = k_1$; $A \in E_2 \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = k_2 \Leftrightarrow c^2 - b^2 = k_2$

$B \in E_3 \Leftrightarrow BA^2 - BC^2 = k_3 \Leftrightarrow c^2 - a^2 = k_3$

2-2 En changeant -56 en $c^2 - b^2$ dans la démonstration faite en **1-1** on obtient : E$_2$ = $\left\{M \in \mathrm{P} \,/\, MB^2 - MC^2 = c^2 - b^2\right\} = h_A$

En changeant -11 en $c^2 - a^2$ dans la démonstration faite en **1-2** on obtient : E$_3$ = $\left\{M \in \mathrm{P} \,/\, MA^2 - MC^2 = c^2 - a^2\right\} = h_B$

En changeant 45 en $b^2 - a^2$ dans la démonstration faite en **1-3** on obtient : E$_1$ = $\left\{M \in \mathrm{P} \,/\, MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2\right\} = h_C$

2-3 On note H le point d'intersection de h_A *et* h_B .

On a donc d'après 2-2 : $HB^2 - HC^2 = c^2 - b^2$ et $HA^2 - HC^2 = c^2 - a^2$

Par conséquent : $\left(HA^2 - HC^2\right) - \left(HB^2 - HC^2\right) = \left(c^2 - a^2\right) - \left(c^2 - b^2\right)$

D'où : $HA^2 - HC^2 - HB^2 + HC^2 = c^2 - a^2 - c^2 + b^2$ Soit : $HA^2 - HB^2 = b^2 - a^2$

Or : $h_C = \left\{M \in \mathrm{P} \,/\, MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2\right\}$. Donc : $H \in h_C$ est vrai .

On retrouve la propriété : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre de ce triangle .

exercice 9

On considère un triangle ABC tel que : $AB = 4$; $AC = 5$; $BC = 6$.

Avec les anciens programmes , cet exercice était traité en utilisant la notion de barycentre (notion qui n'est plus utilisée au lycée où la géométrie non analytique se fait de plus en plus rare dans les programmes !) .

1) H est le point défini par l'égalité vectorielle : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{o}$.

1-1 → En utilisant la relation de Chasles on construit : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA} + 2\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{o}$

D'où : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Ainsi : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}$. Cette équivalence permet d'affirmer :

H est l'extrémité du représentant du vecteur $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ d'origine fixée en A . D'où la construction de H sur le segment [AB] .

→ M désigne un point quelconque du plan . En utilisant la relation de Chasles on construit :

$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\right) = 5\overrightarrow{MH} + 3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB}$. Or : H est défini par : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{o}$. Donc :

$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MH} + 3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB}$ devient : $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{o} = 5\overrightarrow{MH}$. Ainsi : $\boxed{\forall M \in \mathcal{P} \,,\, 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MH}}$

1-2 Déterminons l'ensemble suivant : $\mathcal{D} = \left\{M \in \mathcal{P} \;/\, 3\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}\right) = 0\right\}$

M désigne un point quelconque du plan . Alors : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}\right) = 0$

En utilisant les propriétés du produit scalaire on construit ensuite :

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) + 2\left(\overrightarrow{MB} \cdot -\overrightarrow{CA}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) + 2\left(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) + \left(2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0$

$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Or : $\forall M \in \mathcal{P}$, $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MH}$ d'après **1-1 .**

Donc : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left(5\overrightarrow{MH}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ($5 \neq 0$) et : $\underline{M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{AC}}$.

Cette équivalence permet d'affirmer : <u>$\mathcal{D}$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par H .</u>

2) valeurs des trois produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

En utilisant les longueurs des côtés du triangle ABC ($AB = 4; AC = 5; BC = 6$) et l'expression du produit scalaire définie par :

$\forall M \in \mathcal{P}$,$\forall N \in \mathcal{P}$, $\forall P \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}[MN^2 + MP^2 - NP^2]$ on obtient :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2}[4^2 + 5^2 - 6^2] = \frac{1}{2}[5] = \frac{5}{2}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[BA^2 + BC^2 - AC^2] = \frac{1}{2}[4^2 + 6^2 - 5^2] = \frac{1}{2}[27] = \frac{27}{2}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}[CA^2 + CB^2 - AB^2] = \frac{1}{2}[5^2 + 6^2 - 4^2] = \frac{1}{2}[45] = \frac{45}{2}$. Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{5}{2} \,,\, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{27}{2} \,,\, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{45}{2}}$

3) G est le point défini par l'égalité vectorielle : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$.

3-1 → En utilisant la relation de Chasles on construit : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{o}$

D'où : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Puis : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

Cette équivalence permet d'affirmer : G est l'extrémité du représentant du vecteur somme $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'origine fixée en A .

→ $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}$ (relation de Chasles)

Or : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

→ $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et de $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}$ (relation de Chasles)

Or : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}$

3-2 valeurs numériques respectives de AG^2 , BG^2 , CG^2

D'après 3-1 $AG^2 = \left\|\overrightarrow{AG}\right\|^2 = \left\|\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right\|^2$, $BG^2 = \left\|\overrightarrow{BG}\right\|^2 = \left\|-\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|^2$, $CG^2 = \left\|\overrightarrow{CG}\right\|^2 = \left\|-\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}\right\|^2$

Or pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, pour tous réels a et b : $\|a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}\|^2 = a^2\|\overrightarrow{u}\|^2 + b^2\|\overrightarrow{v}\|^2 + 2ab\,(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$ et : $\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = MN^2$

Donc : $AG^2 = \left\|\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \frac{9}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + 2\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{9}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

$BG^2 = \left\|-\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|^2 = BA^2 + \frac{1}{4}BC^2 + 2\times(-1)\times\frac{1}{2}\times\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = BA^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$

$CG^2 = \left\|-\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}\right\|^2 = CA^2 + \frac{9}{4}CB^2 + 2\times(-1)\times\frac{3}{2}\times\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right) = CA^2 + \frac{9}{4}CB^2 + -3\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$

D'autre part : $AB = 4; AC = 5; BC = 6$ (hypothèse) et : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{27}{2}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{45}{2}$ (d'après **2)**) .

Donc : $AG^2 = \frac{9}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{9}{4}(4)^2 + \frac{1}{4}(5)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right) = 36 + \frac{25}{4} + \frac{15}{4} = 46$

$BG^2 = BA^2 + \frac{1}{4}BC^2 - \left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = (4)^2 + \frac{1}{4}(6)^2 - \left(\frac{27}{2}\right) = 16 + 9 - \frac{27}{2} = \frac{50}{2} - \frac{27}{2} = \frac{23}{2}$

$CG^2 = CA^2 + \frac{9}{4}CB^2 + -3\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right) = (5)^2 + \frac{9}{4}(6)^2 + -3\left(\frac{45}{2}\right) = 25 + 81 - \frac{135}{2} = \frac{212}{2} - \frac{135}{2} = \frac{77}{2}$

Ainsi : $\boxed{AG^2 = 46 \ , \ BG^2 = \frac{23}{2} \ , \ CG^2 = \frac{77}{2}}$

4) ensemble $\boldsymbol{E}$ défini par : $\boldsymbol{E} = \left\{M \in \mathcal{P} \ / \ -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 5\right\}$

4-1 M est un point quelconque du plan . Pour la suite , on note $f(M) = -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2$

En utilisant la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire on construit ce qui suit :

$MA^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{GA}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}\right) = MG^2 + GA^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}\right)$

$MB^2 = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{GB}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}\right) = MG^2 + GB^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}\right)$

$MC^2 = \left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{GC}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}\right) = MG^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}\right)$

Par conséquent : $f(M) = -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2$ devient :

$f(M) = -2\left(MG^2 + GA^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}\right)\right) + 3\left(MG^2 + GB^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}\right)\right) + \left(MG^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}\right)\right)$

$f(M) = \left(-2MG^2 + 3MG^2 + MG^2\right) + \left(-2GA^2 + 3GB^2 + GC^2\right) + 2\left(-2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}\right) + 3\left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}\right)\right)$

$f(M) = \left(2MG^2\right) + \left(-2GA^2 + 3GB^2 + GC^2\right) + 2\left(\left(\overrightarrow{MG}\cdot -2\overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{MG}\cdot 3\overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}\right)\right)$

$f(M) = 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot\left(-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)\right)$

Or G est défini par : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$. Donc : $f(M) = 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{o})\right)$

D'où : $f(M) = 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2 + 2\times(0) = 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2$

On a donc justifié : $\boxed{\text{Pour tout point M du plan , } -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2}$

4-2 déduction pour l'ensemble $\boldsymbol{E}$

M est un point quelconque du plan . Par définition de $\boldsymbol{E}$, on a : $M \in E \Leftrightarrow -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 5$

D'autre part : $\rightarrow$ Pour tout point M du plan , $-2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2$ d'après **4-1**

$\rightarrow AG^2 = 46$, $BG^2 = \dfrac{23}{2}$, $CG^2 = \dfrac{77}{2}$ d'après **3-2**

Donc : $M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 5$

$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow 2MG^2 - 2GA^2 + 3GB^2 + GC^2 = 5$

$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow 2MG^2 - 2\,(46) + 3\left(\dfrac{23}{2}\right) + \left(\dfrac{77}{2}\right) = 5$

$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow 2MG^2 - 92 + \dfrac{146}{2} = 5$

$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow 2MG^2 = 5 + 92 - 73$

$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow 2MG^2 = 24$

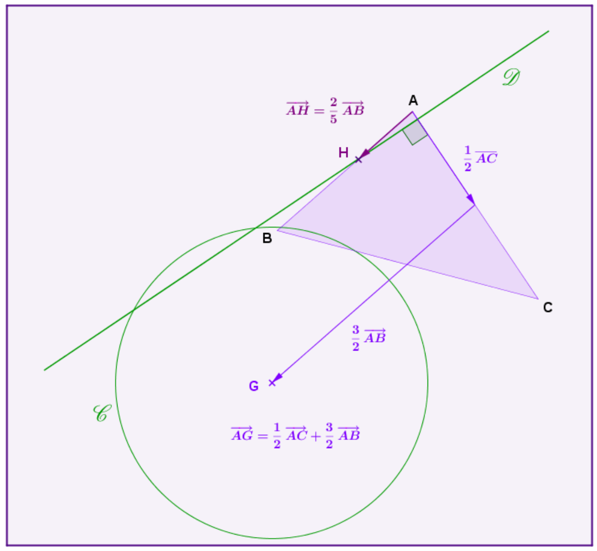
$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow MG^2 = 12 \Leftrightarrow MG^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$

$M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow MG = 2\sqrt{3}$ ($MG > 0$ comme longueur)

L'équivalence $M \in \mathbf{E} \Leftrightarrow MG = 2\sqrt{3}$ permet d'affirmer :

$\boldsymbol{E}$ est un cercle $\mathcal{C}$ de rayon $2\sqrt{3}$ et de centre le point G

défini par : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$



Pour construire G on utilise : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (prouvé en **3-1**)

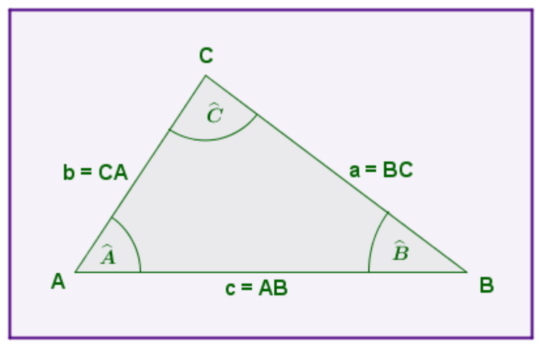
exercice 10

ABC est un triangle quelconque .

On utilise les notations suivantes :

$\rightarrow$ pour les longueurs des côtés du triangle : $a = BC\,, b = CA\,, c = AB$

$\rightarrow$ pour les mesures des angles géométriques associés aux sommets du triangle : $\widehat{A}$ pour l'angle associé au sommet A , $\widehat{B}$ pour l'angle associé au sommet B , $\widehat{C}$ pour l'angle associé au sommet C . Ces trois mesures sont comprises strictement entre 0 et π .



1)1-1 En utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et $BC = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$. Donc : $BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2$

Or pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

Donc : $BC^2 = \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2 \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$

<u>L'égalité 1 suivante : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$</u> est donc justifiée .

1-2 $\rightarrow$ $\widehat{A}$ étant une mesure strictement comprise entre 0 et π de l'angle géométrique associé au sommet A , une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$ est $\widehat{A}$ ou -$\widehat{A}$ et $\cos\widehat{A} = \cos(-\widehat{A})$. Donc : $\cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})} = \cos\widehat{A}$.

Avec les notations définies en début d'exercice , l'égalité : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$ devient : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

$\rightarrow$ en changeant A en B , B en C , C en A : BC devient CA , CA devient AB , AB devient BC , $\widehat{A}$ devient $\widehat{B}$. Donc :

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$ devient : $CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2\cos\overline{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}$ puis : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B}$

$\rightarrow$ en changeant A en C , B en A , C en B : BC devient AB , CA devient BC , AB devient CA , $\widehat{A}$ devient $\widehat{C}$. Donc :

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$ devient : $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2\cos\overline{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}$ puis : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

formules d'Al - Kashi $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \text{ puis } b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B} \text{ et } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$

2) trois applications numériques des formules d'Al - Kashi

2-1 On donne : $b = 3, c = 4$ et $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$. **A trouver ?** a , $\widehat{B}$, $\widehat{C}$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ donc ; $a^2 = 3^2 + 4^2 - 2\times3\times4\cos\dfrac{\pi}{3} = 25 - 24\times\dfrac{1}{2} = 13$; $a^2 = 13$ et $a > 0$ donc : $a = \sqrt{13}$

$\rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ donc $2ac\cos\widehat{B} = c^2 + a^2 - b^2$ et $\cos\widehat{B} = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \dfrac{4^2+13-3^2}{2\times\sqrt{13}\times4} = \dfrac{20}{8\sqrt{13}} = \dfrac{5}{2\sqrt{13}}$

Avec une calculatrice on obtient 46.10211375 pour $\widehat{B}$ que l'on arrondit à : $\widehat{B} = 46°$

$\rightarrow$ La somme des angles d'un triangle étant de 180 degrés , et $\dfrac{\pi}{3}$ correspondant à 60° la valeur arrondie pour $\widehat{C}$ est : $\widehat{C} = 74°$

2-2 On donne : $b = 2, c = 3$ et $sin\widehat{A} = \dfrac{4}{5}$ avec $0 < \widehat{A} < \dfrac{\pi}{2}$. **A trouver ?** a

Pour pouvoir utiliser $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ il faut en préalable calculer la valeur de $\cos\widehat{A}$. Or : $\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$ .Donc :

$\cos^2\widehat{A} = 1 - \sin^2\widehat{A} = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$.

D'autre part : $\left(\cos^2\widehat{A} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{3}{5}\ ou\ \cos\widehat{A} = -\dfrac{3}{5}\right)$ et $\left(0 < \widehat{A} < \dfrac{\pi}{2}\ entraîne\ \cos\widehat{A} > 0\right)$ Donc : $\cos\widehat{A} = \dfrac{3}{5}$

Ainsi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ devient $a^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times2\times3\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{29}{5}$; $a^2 = \dfrac{29}{5}$ et $a > 0$ donc : $a = \sqrt{\dfrac{29}{5}}(a \simeq 2.41)$

2-3 On donne : $a = 8, b = 7, c = 10$. **A trouver ?** $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$

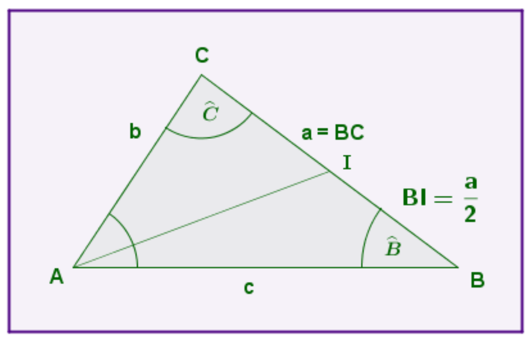
D'après 1-2 $\cos\widehat{B} = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$. De même : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Donc :

$\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{7^2+10^2-8^2}{2\times7\times10} = \dfrac{17}{28}$; $\cos\widehat{B} = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \dfrac{10^2+8^2-7^2}{2\times8\times10} = \dfrac{23}{32}$;

Avec une calculatrice on obtient 52.616800158 pour $\widehat{A}$ *et* 44.04862567 pour $\widehat{B}$ que l'on arrondit à : $\widehat{A} = 53°$ et $\widehat{B} = 44°$

$\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{8^2+7^2-10^2}{2\times8\times7} = \dfrac{13}{112}$; Avec une calculatrice on obtient 83.33457274 pour $\widehat{C}$; on arrondit à : $\widehat{C} = 83°$

3) objet de la question : justifier l'égalité : $c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A}$ **.**



Dans cette question on utilise le milieu I de [BC] .

3-1 En se plaçant dans le triangle ABI une formule d'Al - Kashi permet d'écrire : $AI^2 = BA^2 + BI^2 - 2BA\times BI\times\cos\widehat{B}$

Avec I milieu de [BC] on a : $BI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$ et : $BA = c$.

Donc : $AI^2 = BA^2 + BI^2 - 2BA\times BI\times\cos\widehat{B}$ devient :

$AI^2 = c^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - 2c\times\left(\dfrac{a}{2}\right)\times\cos\widehat{B}$ soit : $AI^2 = c^2 + \dfrac{a^2}{4} - ac\cos\widehat{B}$

3-2 [AI] est la médiane du triangle ABC issue de A . En utilisant un théorème de la médiane on obtient :

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ soit : $c^2 + b^2 = 2AI^2 + \dfrac{a^2}{2}$. D'où : $2AI^2 = c^2 + b^2 - \dfrac{a^2}{2}$

Or : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. Donc : $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos\widehat{A}$

Et : $2AI^2 = c^2 + b^2 - \dfrac{a^2}{2}$ devient : $2AI^2 = a^2 + 2bc\cos\widehat{A} - \dfrac{a^2}{2}$. D'où : $2AI^2 = \dfrac{a^2}{2} + 2bc\cos\widehat{A}$ puis : $AI^2 = \dfrac{a^2}{4} + bc\cos\widehat{A}$

3-3 déduction : Ayant prouvé précédemment : $AI^2 = c^2 + \dfrac{a^2}{4} - ac\cos\widehat{B}$ et $AI^2 = \dfrac{a^2}{4} + bc\cos\widehat{A}$ on déduit :

$c^2 + \dfrac{a^2}{4} - ac\cos\widehat{B} = \dfrac{a^2}{4} + bc\cos\widehat{A}$ puis : $c^2 = ac\cos\widehat{B} + bc\cos\widehat{A}$.

La longueur c du côté $[AB]$ étant différente de 0 , on peut diviser les deux membres de l'égalité précédente par c .

On obtient ainsi : $\underline{c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A}}$.