Produit Scalaire - énoncés feuille 3

Calculer des produits scalaires et utiliser des relations métriques

exercice 1 **1)** Dans chacune des situations suivantes on demande d'utiliser à bon escient les différentes expressions du produit scalaire pour donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ voir résumé de cours

__situation 1__ : $AN = 4$ et P est tel que : $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AN}$ __situation 2__ : $AM = 3$; $AN = \sqrt{2}$ et $\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}$ de mesure 5π

__situation 3__ : A , M et N sont les trois sommets d'un triangle vérifiant : $MN = 8$; $AM = 10$; $AN = 7$

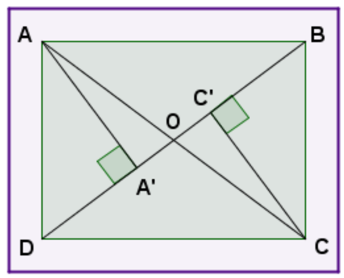
__situation 4__ : A$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; M$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; N $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) ABCD est un carré de centre O et de côté de longueur 3 . Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB}$

3) On donne : $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$; $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ de mesure $\frac{4\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ puis les trois réels suivants :
$x = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$; $y = (-2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \cdot (-3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$; $z = \|3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}\|$

exercice 2 On donne $\|\overrightarrow{u}\| = 3, \|\overrightarrow{v}\| = 2$, $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ de mesure $\frac{\pi}{3}$. Calculer les réels suivants : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$; $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$; $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$
$x = (2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (-\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})$; $y = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v}\right) \cdot (-3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v})$; $z = (3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})^2$

exercice 3 On considère un rectangle ABCD de centre O tel que : $AB = 4$ et $AD = 3$. On note A'et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et de C sur (BD) .



1) En utilisant à bon escient les différentes expressions du produit scalaire , calculer (en justifiant) les réels suivants :
$\left(\overrightarrow{AC}\right)^2$; $\left(\overrightarrow{BD}\right)^2$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DC}$

2) En calculant $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ de deux manières différentes , déterminer la valeur numérique de cos $(\overline{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}})$

3) Justifier : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2$ puis en déduire la longueur A'C'

exercice 4 ABC est un triangle vérifiant : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

1) Calculer $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$ puis en déduire la longueur BC .

2) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

3) On note I le milieu de [AB] . Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$

4) On note G le centre de gravité de ABC . Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et de $\overrightarrow{CB}$. Calculer ensuite AG^2 , BG^2 et CG^2 .

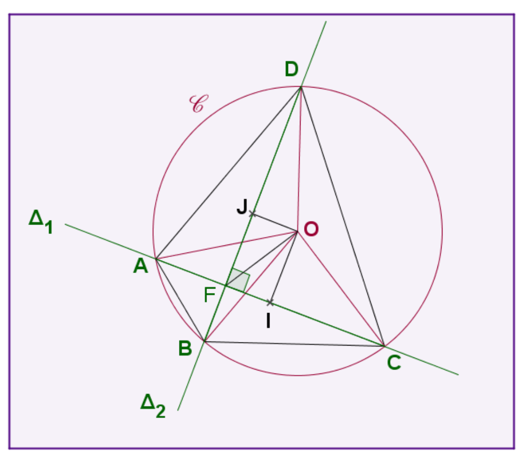
exercice 5 **1)** <u>Démontrer le théorème de la médiane :</u>

Pour tout point M , $ME^2 + MF^2 = 2MP^2 + \frac{1}{2}EF^2$ avec P milieu de [EF]

2) <u>Application</u> : $\mathcal{C}$ est un cercle centré en O et de rayon r . F est un point distinct de O et intérieur au cercle $\mathcal{C}$.

On mène par ce point F deux droites perpendiculaires notées Δ_1 et Δ_2 qui coupent le cercle $\mathcal{C}$ respectivement en A , C et en B , D .

On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD] .



2-1 Démontrer : $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 4r^2$

2-2 En déduire : $AB^2 + CD^2 = AD^2 + CB^2 = 4r^2$

exercice 6 ABC est un triangle et I est le milieu de [AB] . Calculer la longueur CI dans chacune des situations suivantes :

situation 1 : ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $AB = AC = 7$; $BC = 5$

situation 2 : ABC est un triangle rectangle isocèle en B tel que : $AB = 4$

situation 3 : ABC est un triangle équilatéral tel que : $AB = 5$

exercice 7 Ensembles définis par des produits scalaires , par des relations métriques . voir résumé de cours

ABCD est un rectangle vérifiant : $AB = 6$ et $BC = 3$; I est le milieu de [AB] et H est défini par : $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Construire chacun des ensembles suivants :

$\Delta = \{M \in \mathcal{P} \,/ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\}$; $\mathcal{C}_1 = \{M \in \mathcal{P} \,/ MA^2 + MB^2 = \frac{45}{2}\}$; $\mathcal{C}_2 = \{M \in \mathcal{P} \,/ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16\}$

2) On considère l'ensemble suivant : $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \,/ MA^2 - MB^2 = 24\}$

2-1 Justifier que H est un point de $\mathcal{D}$. **2-2** En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{D}$ puis le construire .

3) On considère l'ensemble suivant : $\boldsymbol{E} = \{M \in \mathcal{P} \,/ MA^2 = 4MC^2\}$

3-1 Construire les points J et K définis par : $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{o}$ et $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{o}$

3-2 En déduire la nature de l'ensemble $\boldsymbol{E}$ puis le construire .(une indication : après l'avoir justifié , on pourra utiliser que pour tout point M : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MK}$)

exercice 7 **1)** ABC est un triangle tel que : $AB = 5$; $AC = 9$; $BC = 6$. On note I , J , K les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [CA] . On considère les trois ensembles suivants :

$E_1 = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MB^2 = 45\}$; $E_2 = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MB^2 - MC^2 = -56\}$; $E_3 = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MC^2 = -11\}$

1-1 Justifier que A est élément de E_2 puis démontrer que E_2 est la hauteur h_A du triangle ABC issue de A .

1-2 Démontrer que E_3 est la hauteur h_B du triangle ABC issue de B .

1-3 Démontrer que E_1 est la hauteur h_C du triangle ABC issue de C .

2) On se place dans le cas général :

a , b , c sont trois réels strictements positifs et le triangle ABC vérifie : $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$.

On considère les trois ensembles suivants :

$E_1 = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MB^2 = k_1\}$; $E_2 = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MB^2 - MC^2 = k_2\}$; $E_3 = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MC^2 = k_3\}$

2-1 Déterminer les valeurs de k_1 , k_2 , k_3 pour que E_1, E_2, E_3 contiennent respectivement C , A , B .

2-2 k_1 , k_2 , k_3 sont les réels trouvés en 2-1 . Justifier alors :

$h_A = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MB^2 - MC^2 = k_2\}$; $h_B = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MC^2 = k_3\}$; $h_C = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 - MB^2 = k_1\}$.

2-3 On note H le point d'intersection de h_A et h_B.. Démontrer que H est situé aussi sur h_C .

exercice 9 On considère un triangle ABC tel que : $AB = 4$; $AC = 5$; $BC = 6$.

1) On note H le point défini par l'égalité vectorielle : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{o}$.

1-1 Justifier : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ puis $\forall M \in \mathcal{P}$, $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MH}$

1-2 Déterminer l'ensemble suivant : $\mathcal{D} = \left\{M \in \mathcal{P} \,/\, 3\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA}\right) = 0\right\}$

2) Calculer les trois produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

3) On note G le point défini par l'égalité vectorielle : $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$.

3-1 Justifier $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ puis en déduire $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et de $\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CA}$ et de $\overrightarrow{CB}$

3-2 En déduire les valeurs numériques respectives de AG^2 , BG^2 , CG^2

4) On considère l'ensemble E défini par : $E = \left\{M \in \mathcal{P} / -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 5\right\}$

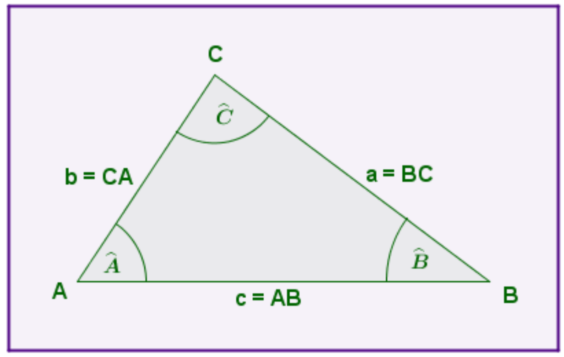
4-1 Exprimer $-2MA^2 + 3MB^2 + MC^2$ en fonction de MG^2 **4-2** En déduire l'ensemble E

exercice 10 ABC est un triangle quelconque .

On utilise les notations suivantes :

→ pour les longueurs des côtés du triangle : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$

→ pour les mesures des angles géométriques associés aux sommets du triangle : $\widehat{A}$ pour l'angle associé au sommet A , $\widehat{B}$ pour l'angle associé au sommet B , $\widehat{C}$ pour l'angle associé au sommet C . Ces trois mesures sont comprises strictement entre 0 et π .



1)1-1 En utilisant deux expressions différentes du produit scalaire justifier : $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos\overline{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}$

1-2 En déduire les trois relations suivantes appelées **formules d'Al-Kashi** :

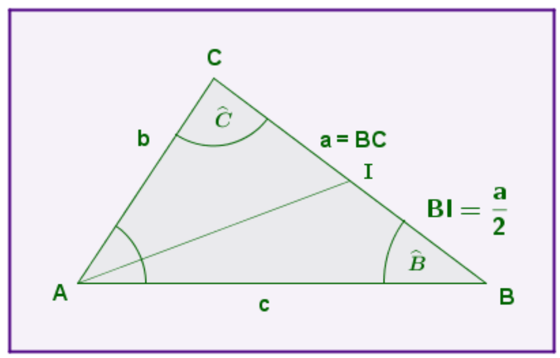
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \text{ puis } b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B} \text{ et } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$$

2) objet de cette question : applications numériques des formules d'Al-Kashi

Les données pour le triangle ABC	**A trouver** (arrondir éventuellement le résultat)
$b = 3$, $c = 4$ et $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$	a , $\widehat{B}$, $\widehat{C}$
$b = 2$, $c = 3$ et $\sin\widehat{A} = \dfrac{4}{5}$ avec $0 < \widehat{A} < \dfrac{\pi}{2}$	a
$a = 8$, $b = 7$, $c = 10$	$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$

3) objet de cette question : utiliser deux formules d'Al-Kashi et un théorème de la médiane pour exprimer c en fonction de a, $\widehat{A}$, b , $\widehat{B}$.

Dans cette question on utilise le milieu I de [BC] .



3-1 En se plaçant dans le triangle ABI exprimer AI^2 en fonction de a , c et $\widehat{B}$.

3-2 En se plaçant dans le triangle ABC exprimer AI^2 en fonction de a , b , c et $\widehat{A}$.

3-3 En déduire : $c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A}$