Introduction à la notion de produit scalaire

Une situation amenant la construction d'un outil mathématique

La situation : un wagonnet , ayant une vitesse initiale , est tiré par un mineur pendant un déplacement de longueur AB. Ce mineur exerce au moyen d'une corde une force $\overrightarrow{F}$ sur le wagonnet . Le problème est de mesurer l'action du mineur sur le wagonnet au cours de ce déplacement en tenant compte de sa position par rapport au wagonnet et en supposant que l'intensité de la force $\overrightarrow{F}$ ne varie pas .

Dans la suite du document on utilise les notations suivantes

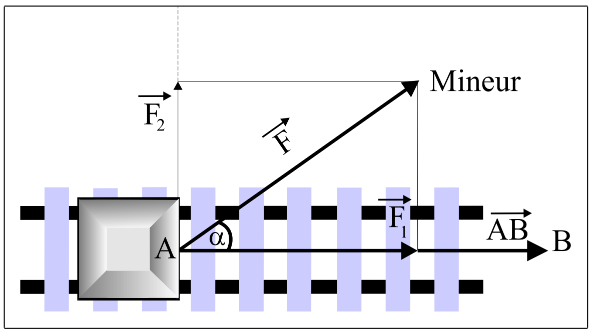
→ A est la position du point d'attache de la corde au début de l'action du mineur

→ B est la position du point d'attache de la corde à la fin de l'action du mineur

→ $\overrightarrow{AB}$ indique la trajectoire rectiligne du wagonnet , le sens et la longueur AB de son déplacement

→ le bipoint (A, M) est un représentant de la force $\overrightarrow{F}$ (autrement dit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{F}$)

→ la position du mineur par rapport à la trajectoire du wagonnet est donnée par la mesure α de l'angle $\widehat{BAM}$



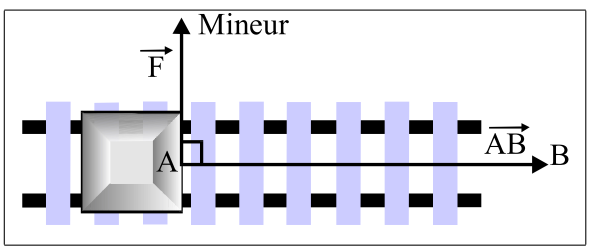
situation 1 le mineur est en avant du wagonnet et l'angle de mesure α est aigu ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

on observe :

la vitesse du wagonnet est augmentée .

Le mineur produit sur le wagonnet

un travail dit moteur



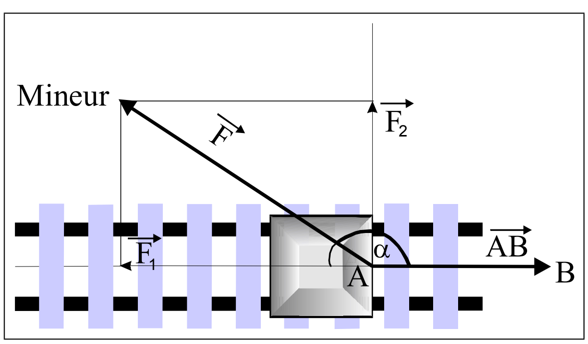
situation 2 le mineur est situé à la verticale du point d'attache de la corde ($\alpha = \frac{\pi}{2}$)

on observe :

la vitesse du wagonnet est inchangée .

Le mineur produit sur le wagonnet

un travail dit nul



situation 3 le mineur est à l'arrière du wagonnet et l'angle de mesure α est obtus ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)

on observe :

le mineur freine le wagonnet et produit sur lui

un travail dit résistant

On décide d'associer à chaque situation une grandeur numérique , notée p , qui permet de mesurer le travail du mineur sur le wagonnet pendant son déplacement de A à B

1) Pour bien différencier les trois situations , quel signe pourrait-on attribuer à cette grandeur p ?

effet < moteur > : $p > 0$ **effet < nul > :** $p = 0$ **effet < résistant > :** $p < 0$

2) Dans le cas d'un travail < moteur > ou < résistant > où faudrait-il placer le mineur pour que son action produise le plus grand effet sur le wagonnet ? : **sur la trajectoire du wagonnet en le plaçant devant le wagonnet (travail moteur maximal) ou bien derrière le wagonnet (travail résistant maximal) .**

3) En décomposant la force $\overrightarrow{F}$ comme somme de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ (situations 1 et 3) , comment pourrait-on mesurer l'action du mineur en l'identifiant à celle d'un mineur agissant sur le wagonnet avec un effet maximum ?

Il suffit de décider $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ avec $\overrightarrow{F_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{F_2}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de remplacer le mineur qui tire sur le wagonnet avec une force $\overrightarrow{F}$ par deux mineurs , l'un tirant sur le wagonnet avec une force $\overrightarrow{F_1}$ en produisant un effet maximal et l'autre l'un tirant sur le wagonnet avec une force $\overrightarrow{F_2}$ ne produisant aucun effet . Mesurer l'action du mineur revient ainsi à mesurer l'action d'un mineur tirant sur le wagonnet avec la force $\overrightarrow{F_1}$,

4) M étant l'extrémité du représentant de $\overrightarrow{F}$ d'origine A ($\overrightarrow{F} = \overrightarrow{AM}$) on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) . Ainsi : $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{AH}$ **.**

On décide de poser pour la grandeur numérique p :

1) **si l'effet est < moteur > , on veut** $p > 0$: on décide de poser : $p = AH \times AB$ soit $p = \left\|\overrightarrow{F_1}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

2) **si l'effet est < résistant > , on veut** $p < 0$: on décide de poser : $p = -\ AH \times AB$ soit $p = -\left\|\overrightarrow{F_1}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

En se plaçant dans le triangle AMH rectangle en H et en utilisant une ligne trigonométrique bien choisie , **justifier que p peut s'écrire dans les situations 1 et 3 sous la forme suivante** : $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$

<u>situation 1</u> : **effet < moteur >**

L'angle $\widehat{HAM}$ est de mesure α donc :

$$\cos\alpha = \frac{<\text{ côté adjacent }>}{<\text{ hypothénuse }>} = \frac{\left\|\overrightarrow{AH}\right\|}{\left\|\overrightarrow{F}\right\|}$$

Ainsi : $AH = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \cos\alpha$

On obtient alors pour la grandeur p ($p > 0$) :

$p = AH \times AB = \left(\left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \cos\alpha\right) \times AB$

Soit : $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$

<u>remarque</u> : dans le cas d'un effet < moteur > l'angle $\widehat{HAM}$ est aigu et la mesure α vérifie : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

le signe de $\cos\alpha$ est : strictement positif et donc :

$\left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha > 0$ soit : $p > 0$

<u>situation 3</u> : **effet < résistant >**

L'angle $\widehat{HAM}$ est de mesure $\pi - \alpha$ donc :

$\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AH}{\left\|\overrightarrow{F}\right\|}$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$AH = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \cos(\pi - \alpha) = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times (-\cos\alpha)$

On obtient alors pour p ($p < 0$) :

$p = -AH \times AB = -\left(\left\|\overrightarrow{F}\right\| \times -\cos\alpha\right) \times AB = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \cos\alpha \times AB$

Soit : $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$ vrai

<u>remarque</u> : dans le cas d'un effet < résistant > l'angle $\widehat{HAM}$ est obtus et la mesure α vérifie : $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

le signe de $\cos\alpha$ est : strictement négatif et donc :

$\left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha < 0$ soit : $p < 0$

5) La grandeur p définie par : $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$ est-elle satisfaisante pour décrire la situation 2 (effet nul) ?

Dans la situation 2 on a : $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ d'où : $\cos\alpha = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

Par conséquent : $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$ devient : $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times 0$ soit : $p = 0$

La formule $p = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\alpha$ est bien compatible avec la situation 2 .

vocabulaire : Cette grandeur numérique p dont le signe est conforme aux différents effets produits par le mineur **est appelée le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{F}$ par le vecteur $\overrightarrow{AB}$**