

Introduction à la notion de produit scalaire

Une situation amenant la construction d'un outil mathématique

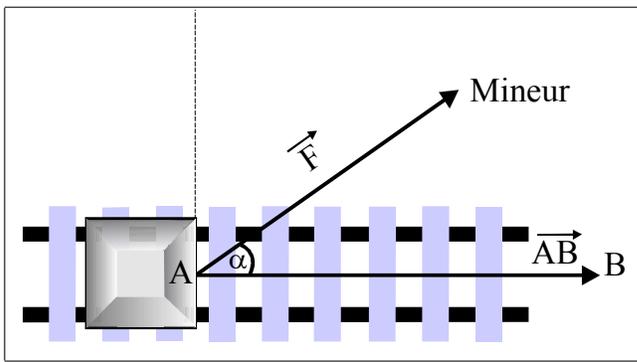
page 1 / 2

La situation : un wagonnet , ayant une vitesse initiale , est tiré par un mineur pendant un déplacement de longueur AB.

Ce mineur exerce au moyen d'une corde une force \vec{F} sur le wagonnet . Le problème est de mesurer l'effet de l'action du mineur sur le wagonnet au cours de ce déplacement en tenant compte de sa position par rapport au wagonnet et en supposant que l'intensité de la force \vec{F} ne varie pas .

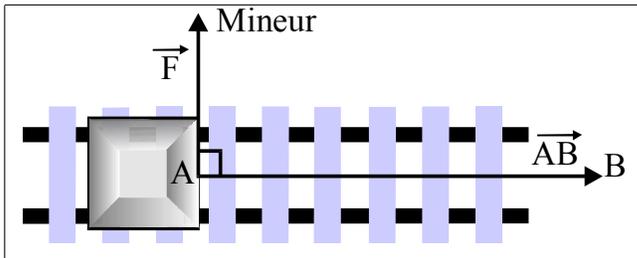
Dans la suite du document on utilise les notations suivantes :

- A et B sont les positions respectives du point d'attache de la corde au début et à la fin de l'action du mineur
- \overrightarrow{AB} indique la trajectoire rectiligne du wagonnet , le sens et la longueur AB de son déplacement
- le bipoint (A, M) est un représentant de la force \vec{F} (autrement dit : $\overrightarrow{AM} = \vec{F}$)
- la position du mineur par rapport à la trajectoire du wagonnet est donnée par la mesure α de l'angle \widehat{BAM}



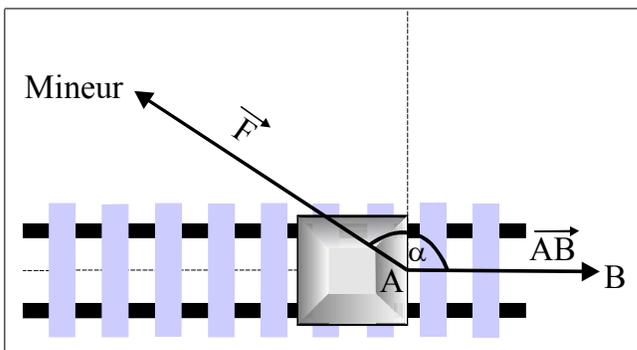
situation 1 le mineur est en avant du wagonnet et l'angle de mesure α est aigu

on observe :



situation 2 la direction de la force exercée par le mineur est orthogonale à celle de la trajectoire du wagonnet

on observe :



situation 3 le mineur est à l'arrière du wagonnet et l'angle de mesure α est obtus

on observe :

On décide d'associer à chaque situation une grandeur numérique , notée p , qui permet de mesurer l'effet du mineur sur le wagonnet pendant son déplacement de A à B

1) Pour bien différencier les trois situations , quel signe pourrait-on attribuer à cette grandeur p ?

effet < moteur > :

effet < nul > :

effet < résistant > :

2) Dans le cas d'un effet < moteur > ou < résistant > où faudrait-il placer le mineur pour que son action produise le plus grand effet sur le wagonnet ? :

3) En décomposant la force \vec{F} comme somme de deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (situations 1 et 3) , comment pourrait-on mesurer l'action du mineur en l'identifiant à celle d'un mineur agissant sur le wagonnet avec un effet maximum ?

4) M étant l'extrémité du représentant de \vec{F} d'origine A ($\vec{F} = \vec{AM}$) on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) ; ainsi : $\vec{F}_1 = \vec{AH}$.On décide de poser pour la grandeur numérique p :

- 1) $p = + \|\vec{AH}\| \times \|\vec{AB}\|$ si l'effet est < moteur > ou encore $p = + \|\vec{F}_1\| \times \|\vec{AB}\|$
- 2) $p = - \|\vec{AH}\| \times \|\vec{AB}\|$ si l'effet est < résistant > ou encore $p = - \|\vec{F}_1\| \times \|\vec{AB}\|$

En se plaçant dans le triangle AMH rectangle en H et en utilisant une ligne trigonométrique , justifier que p peut s'écrire dans les situations 1 et 3 sous la forme suivante : $p = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha$

situation 1 : effet moteur

L'angle \widehat{HAM} est de mesure α donc :

$$\cos \alpha = \frac{\text{< côté adjacent >}}{\text{< hypoténuse >}} = \frac{\|\vec{AH}\|}{\|\vec{F}\|}$$

Ainsi : $\|\vec{AH}\| = \|\vec{F}\| \times$

On obtient alors pour la grandeur p ($p > 0$) :

$$p = \|\vec{AH}\| \times \|\vec{AB}\| = (\quad) \times \|\vec{AB}\|$$

Soit : $p =$

remarque : dans le cas d'un effet < moteur > l'angle

\widehat{HAM} est aigu et la mesure α vérifie : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

le signe de $\cos \alpha$ est : $\cos \alpha \dots\dots$ et donc :

$$\|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha \dots\dots \text{ soit : } p \dots\dots$$

5) La grandeur p définie par : $p = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha$ est-elle satisfaisante pour décrire la situation 2 ?

Dans la situation 2 on a : $\alpha = \dots$ d'où : $\cos \alpha = \cos \dots = \dots$

Par conséquent : $p = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha$ devient : $p = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \dots$ soit $p = \dots$

récapitulatif

Cette grandeur p définie par : $p = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha$ dont le signe est conforme aux différents effets produits par le mineur prend en compte : ► l'intensité de la force exercée par le mineur sur le wagonnet (par $\|\vec{F}\|$)

→ la longueur du déplacement de A vers B (par $\|\vec{AB}\|$)

→ la position du mineur par rapport à la trajectoire du wagonnet (par $\cos \alpha$)

Cette grandeur p est appelée : en Physique : le travail de la force \vec{F} pendant le déplacement du wagonnet de A vers B

en Math : le produit scalaire du vecteur \vec{F} par le vecteur \vec{AB} ; on note : $p = \vec{F} \bullet \vec{AB}$ et $\vec{F} \bullet \vec{AB}$ est lu \vec{F} scalaire \vec{AB}