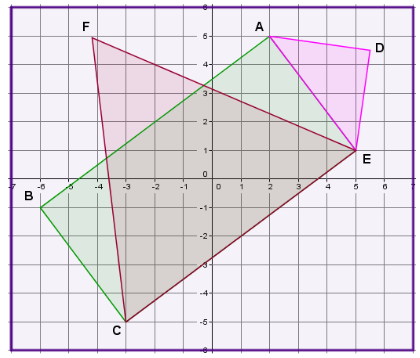
Produit Scalaire - corrigés feuille 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

exercice 1 A$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$; C$\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$; D$\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$; E$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; F$\begin{pmatrix}1-3\sqrt{3}\\-2+4\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Une figure permet de conjecturer le résultat : le rectangle est ABCE ; le triangle isocèle rectangle est ADE et le triangle équilatéral est EFC .



nature du quadrilatère ABCE . Pour justifier que ABCE est un rectangle il suffit de prouver que ABCE est un parallélogramme (en vérifiant : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$) ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires (en vérifiant $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AE}$) .

D'autre part :

$\rightarrow \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5-(-3)\\1-(-5)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2-(-6)\\5-(1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ est vrai .

$\rightarrow \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}5-2\\1-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AE} = x_{\overrightarrow{CE}}x_{\overrightarrow{AE}} + y_{\overrightarrow{CE}}y_{\overrightarrow{AE}} = (8)(3) + (6)(-4) = 24 - 24 = 0$ donc : $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AE}$ est vrai

Ayant prouvé $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AE}$ on peut affirmer : ABCE est un rectangle

nature du triangle ADE . Pour justifier ADE rectangle isocèle en D , il suffit de prouver : $DE = DA$ et $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DA}$

On a : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5-\frac{11}{2}\\1-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}2-\frac{11}{2}\\5-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA} = x_{\overrightarrow{DE}}x_{\overrightarrow{DA}} + y_{\overrightarrow{DE}}y_{\overrightarrow{DA}} = (-\frac{1}{2})(-\frac{7}{2}) + (-\frac{7}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = 0$ donc : $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DA}$ est vrai et ADE est rectangle en D

$DE^2 = \left\|\overrightarrow{DE}\right\|^2 = \left(x_{\overrightarrow{DE}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{DE}}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{49}{4} = \frac{50}{4} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ et $DE = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (DE positif)

$DA^2 = \left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2 = \left(x_{\overrightarrow{DA}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{DA}}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{50}{4}$ et $DA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. donc : $DE = DA$ est vrai

Ayant prouvé $DE = DA$ et $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DA}$ on peut affirmer : le triangle ADE est rectangle isocèle en D

nature du triangle EFC . Pour justifier que le triangle EFC est équilatéral , il suffit de prouver : $EF = CF = CE$

$\rightarrow \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$ donc $CE^2 = \left\|\overrightarrow{CE}\right\|^2 = \left(x_{\overrightarrow{CE}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{CE}}\right)^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$\rightarrow EF^2 = (x_{F-}x_E)^2 + (y_{F-}y_E)^2 = (1-3\sqrt{3}-5)^2 + (-2+4\sqrt{3}-1)^2 = (-3\sqrt{3}-4)^2 + (4\sqrt{3}-3)^2 = (3\sqrt{3}+4)^2 + +(4\sqrt{3}-3)^2$

$EF^2 = (3\sqrt{3})^2 + (4)^2 + 2(3\sqrt{3})(4) + (4\sqrt{3})^2 + (3)^2 - 2(4\sqrt{3})(3) = 27 + 16 + 24\sqrt{3} + 48 + 9 - 24\sqrt{3} = 100$

$\rightarrow CF^2 = (x_{F-}x_C)^2 + (y_{F-}y_C)^2 = (1-3\sqrt{3}-(-3))^2 + (-2+4\sqrt{3}-(-5))^2 = (4-3\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3}+3)^2$

$CF^2 = (4)^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2(4)(3\sqrt{3}) + (4\sqrt{3})^2 + (3)^2 + 2(4\sqrt{3})(3) = 16 + 27 - 24\sqrt{3} + 48 + 9 + 24\sqrt{3} = 100$

Donc : $EF^2 = CF^2 = CE^2 = 100$ puis $EF = CF = CE = 10$ (une longueur est un réel positif)

Le triangle ECF est bien équilatéral .

exercice 2 m paramètre réel et $\vec{u}\begin{pmatrix}m\sqrt{2}\\2+m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\m\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}4m-3\\2m-1\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ *soit* ssi : $x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0$. Donc :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (m\sqrt{2})(\sqrt{2}) + (2+m)(m) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m\,(m+4) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m + 4 = 0$

$\underline{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = -4}$

2) $x_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}} - x_{\overrightarrow{v}}y_{\overrightarrow{u}} = (m\sqrt{2})(m) - (2+m)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\left(m^2 - m - 2\right)$. Donc :

$x_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}} - x_{\overrightarrow{v}}y_{\overrightarrow{u}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(m^2 - m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$

-1 est une racine de $m^2 - m - 2$ car : $(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$. Donc $m^2 - m - 2$ est factorisable par m+1

et pour tout m : $m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$. D'où : $x_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}} - x_{\overrightarrow{v}}y_{\overrightarrow{u}} = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 2$

Ainsi : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi : $m = -1$ ou $m = 2$

3) $\overrightarrow{w}$ est unitaire ssi sa norme est égale à 1 . Une norme étant un réel positif ,$\|\overrightarrow{w}\| = 1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{w}\|^2 = 1 \Leftrightarrow (x_{\overrightarrow{w}})^2 + (y_{\overrightarrow{w}})^2 = 1$

Donc : $\|\overrightarrow{w}\| = 1 \Leftrightarrow (4m-3)^2 + (2m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 16m^2 - 24m + 9 + 4m^2 - 4m + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 20m^2 - 28m + 9 = 0$

Le discriminant Δ de $20m^2 - 28m + 9$ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4(20)(9) = 64$ et $\sqrt{\Delta} = 8$

Δ étant strictement positif , $20m^2 - 28m + 9$ admet deux racines distinctes

$\mathrm{m}_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{28+8}{2(20)} = \dfrac{9}{10}$ et $\mathrm{m}_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{28-8}{2(20)} = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $\overrightarrow{w}$ est unitaire ssi : $m = \dfrac{9}{10}$ ou $m = \dfrac{1}{2}$

exercice 3

A$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$; E$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; F $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

1) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2-1\\5+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}5-1\\-1+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+1\\1-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-2\\-3-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = x_{\overrightarrow{DE}}x_{\overrightarrow{DF}} + y_{\overrightarrow{DE}}y_{\overrightarrow{DF}} = (1\times 4) + (8\times 2) = 20$.

$2\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD} = (2\times\dfrac{3}{4})\times(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}) = \dfrac{3}{2}(x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{CD}}) = \dfrac{3}{2}\left((4\times -1) + (-1\times -7)\right) = \dfrac{9}{2}$.

$DE \geq 0$ et $DE^2 = \left(x_{\overrightarrow{DE}}\right)^2 + \left(y_{\overrightarrow{DE}}\right)^2 = 1^2 + 8^2 = 65$ donc $DE = \sqrt{65}$.

2) droite $\mathcal{D}$ contenant C et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$. M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ désigne un point du plan

On a : $M\in\mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{n} = 0$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$

d'où : $M\in\mathcal{D} \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{CM}}x_{\overrightarrow{n}} + y_{\overrightarrow{CM}}y_{\overrightarrow{n}} = 0 \Leftrightarrow [-4\times(x-2)] + [5(y-4)] = 0 \Leftrightarrow -4x + 5y - 12 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est : $-4x + 5y - 12 = 0$

3) médiatrice Δ du segment [AB] . La médiatrice Δ du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B

M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a : $M\in\Delta \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$ (AM et BM positifs)

d'où : $M\in\Delta \Leftrightarrow (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 \Leftrightarrow (x-(-1))^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$

d'où : $M\in\Delta \Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 + y^2 - 4y = x^2 - 6x + 10 + y^2 - 2y \Leftrightarrow 8x - 2y - 5 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$ est : $8x - 2y - 5 = 0$

4) hauteur h_A du triangle ABC issue de A . La hauteur h_A est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A .

M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a : $M\in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

d'où : $M\in h_A \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{BC}} = 0 \Leftrightarrow [-1\times(x+1)] + [3(y-2)] = 0 \Leftrightarrow -x + 3y - 7 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne de la hauteur h_A est : $-x + 3y - 7 = 0$

5) nature du triangle DEF ? d'après 1) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. D'autre part :

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}5-2\\-1-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EF} = x_{\overrightarrow{DF}}x_{\overrightarrow{EF}} + y_{\overrightarrow{DF}}y_{\overrightarrow{EF}} = (4\times 3) + (2\times -6) = 0$ donc : $\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{EF}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ étant orthogonaux , le triangle DEF est rectangle en F .

le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle DEF rectangle en F est le cercle de diamètre [DE] soit l'ensemble des points M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{EM}$. D'autre part :

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{EM} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EM} = 0$ avec $\overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}$

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{DM}} x_{\overrightarrow{EM}} + y_{\overrightarrow{DM}} y_{\overrightarrow{EM}} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) + (y+3)(y-5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 2y - 13 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 13 = 0$

6) une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre C contenant F . Le rayon de ce cercle est $r = CF$.

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ point de P . On a : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow CM = r \Leftrightarrow CM^2 = r^2$ (CM et r positifs) et $r^2 = CF^2$

D'où : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2 = (x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2$

D'où : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = (5-2)^2 + (-1-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 3^2 + (-5)^2$

$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 9 + 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y - 14 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ est : $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 14 = 0$

7) ensemble F $= \{M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0\}$? M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a :

$M \in \mathrm{F} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 6y\right) - 2 = 0$

$M \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (x-1)^2 - (1)^2 + (y+3)^2 - (3)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 - 12 = 0$

$M \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 12$ et $12 = \left(\sqrt{12}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2$; D$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$M \in \mathrm{F} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow (x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 = r^2$ avec $r = 2\sqrt{3}$

La dernière équivalence permet d'affirmer : F est le cercle centré en D et de rayon $2\sqrt{3}$

exercice 4

outils : pour tout réel x : $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; pour tout réel y : $y^2 - by = \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$\boxed{\boldsymbol{E}_1 = \{\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , x^2 + y^2 - 10x + 8y + 23 = 0\}}$

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a :

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 8y + 23 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 10x\right) + \left(y^2 + 8y\right) + 23 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y+4)^2 - 16 + 23 = 0$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+4)^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+4)^2 = 18$ et $18 = \left(\sqrt{18}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+4)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$ *et* : $M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$ avec : $\Omega \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $r = 3\sqrt{2}$

Cette équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}_1$ est le cercle centré en Ω et de rayon $3\sqrt{2}$

$\boxed{\boldsymbol{E}_2 = \{\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , x^2 + y^2 + 8x - 10y + 45 = 0\}}$

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a :

$M \in \boldsymbol{E}_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 10y + 45 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + 8x\right) + \left(y^2 - 10y\right) + 45 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 - 16 + (y-5)^2 - 25 + 45 = 0$

$M \in \boldsymbol{E}_2 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-5)^2 + 4 = 0$ et : $M \in \boldsymbol{E}_2 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-5)^2 = -4$

D'autre part : $\rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, (x+4)^2 \geq 0 \ et \ \forall y \in \mathbb{R}, (y-5)^2 \geq 0\right)$ entraîne $\forall x \in \mathbb{R}\,, \forall y \in \mathbb{R}\,, (x+4)^2 + (y-5)^2 \geq 0$

$\rightarrow -4 < 0$

Par conséquent : $(x+4)^2 + (y-5)^2 = -4$ *est* fausse pour tout point M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

L'équivalence $M \in \boldsymbol{E}_2 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-5)^2 = -4$ permet ensuite de déduire : pour tout point M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: M$\notin \boldsymbol{E}_2$ et $\boldsymbol{E}_2 = \varnothing$

$\boxed{\boldsymbol{E}_3=\{\mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ ,\ x^2+y^2-3x+y+\frac{5}{2}=0\}}$

$M\in\boldsymbol{E}_3\Leftrightarrow x^2+y^2-3x+y+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow x^2-3x+y^2+y+\frac{5}{2}=0\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}=0$

$M\in\boldsymbol{E}_3\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{10}{4}+\frac{5}{2}=0=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0$

D'autre part : $\rightarrow\forall x\in\mathbb{R},(x+4)^2\geq 0\ et\ \forall y\in\mathbb{R},(y-5)^2\geq 0$

$\rightarrow\forall a\in R^+\ ,\forall b\in R^+\ ,\ a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

Par conséquent : $M\in\boldsymbol{E}_3\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$ et $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$ et $\left(y+\frac{1}{2}\right)=0$

$M\in\boldsymbol{E}_3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ et $y=-\frac{1}{2}$.

Cette équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}_3$ est réduit à un seul point K$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ . .Autrement dit : $\boldsymbol{E}_3=\left\{K\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{\boldsymbol{F}_1=\{\mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ ,\ x^2+y^2-6x+10y+10=0\}}$ rédaction analogue à celle de $\boldsymbol{E}_1$

$M\in\boldsymbol{F}_1\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+5)^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2$; $\boldsymbol{E}_1$ est le cercle centré en Ω et de rayon $2\sqrt{6}$

$\boxed{\boldsymbol{F}_2=\{\mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ ,\ x^2+y^2+14x-4y+57=0\}}$ rédaction analogue à celle de $\boldsymbol{E}_2$

$M\in\boldsymbol{F}_2\Leftrightarrow(x+7)^2+(y-2)^2=-4$; $\boldsymbol{F}_2=\varnothing$

$\boxed{\boldsymbol{F}_3=\{\mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ ,\ x^2+y^2-12x+4y+40=0\}}$ rédaction analogue à celle de $\boldsymbol{E}_3$

$M\in\boldsymbol{F}_3\Leftrightarrow(x-6)^2+(y+2)^2=0$; $\boldsymbol{F}_3=\left\{P\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}\right\}$

exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. A$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$et C$\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$

1) médiatrice de [BC] : la médiatrice Δ du segment $[BC]$ est l'ensemble des points M équidistants de B et C .

M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a : $M\in\Delta\Leftrightarrow BM=CM\Leftrightarrow BM^2=CM^2$ (BM et CM positifs)

d'où : $M\in\Delta\Leftrightarrow(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=(x-x_C)^2+(y-y_C)^2\Leftrightarrow(x+3))^2+(y+1)^2=(x-7)^2+(y+5)^2$

puis : $M\in\Delta\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2+2y+1=x^2-14x+49+y^2+10y+25\Leftrightarrow 20x-8y-64=0\Leftrightarrow 5x-2y-16=0$

Ainsi : une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[BC]$ est : $5x-2y-16=0$.

2) hauteur du triangle ABC issue de C : la hauteur h_C est la droite perpendiculaire à (AB) passant par C .

M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ désigne un point du plan . On a : $M\in h_C\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-7\\y+5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

d'où : $M\in h_C\Leftrightarrow[-4\times(x-7)]+[1(y+5)]=0\Leftrightarrow -4x+28+y+5=0\Leftrightarrow -4x+y+33=0$

Ainsi : une équation cartésienne de la hauteur h_C est : $-x+3y-7=0$

3) droite $\mathcal{D}$ contenant C et perpendiculaire à $\mathcal{D}_1:-5x+3y+4=0$. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ étant perpendiculaires , tout vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est normal à $\mathcal{D}$. D'autre part : l'équation donnée pour $\mathcal{D}_1$ étant de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a,b)=(-5,3)$, $\mathcal{D}_1$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$. M$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ désigne un point du plan .

On a : $M\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{CM}}x_{\overrightarrow{u}}+y_{\overrightarrow{CM}}y_{\overrightarrow{u}}=0$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-7\\y+5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$

d'où : $M\in\mathcal{D}\Leftrightarrow[-3\times(x-7)]+[(-5)(y+5)]=0\Leftrightarrow -3x+21-5y-25=0\Leftrightarrow -3x-5y-4=0\Leftrightarrow 3x+5y+4=0$

Ainsi : une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ est : $3x+5y+4=0$

4) cercle C de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et contenant $\text{K}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Le rayon de ce cercle est $r = \Omega K$. $\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ point de P

On a : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$ (ΩM et r positifs) et $r^2 = \Omega K^2$

D'où : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2 = (x_K - x_\Omega)^2 + (y_K - y_\Omega)^2$

D'où : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (-3-1)^2 + (3-2)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

5) cercle C_1 de diamètre $[IJ]$ avec $\text{I}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\text{J}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.$\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ point du plan

Le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[IJ]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{JM}$

On a : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{JM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$ et $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$

D'où : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) + (y-3)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ est : $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$

6) $\boldsymbol{E} = \left\{ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \text{P} \,/\, 2MA^2 - MB^2 = k \right\}$

6-1 expression de $2MA^2 - MB^2$ en fonction de x et y avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$2MA^2 + MB^2 = 2\left[(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2\right] - \left[(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2\right]$

$2MA^2 + MB^2 = 2\left[(1-x)^2 + (-2-y)^2\right] - \left[(-3-x)^2 + (-1-y)^2\right]$ car : $\text{A}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\text{B}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $(-a-b)^2 = (a+b)^2$

$2MA^2 + MB^2 = 2\left[1 - 2x + x^2 + (y^2 + 4y + 4)\right] - \left[(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1)\right]$

$2MA^2 + MB^2 = 2 - 4x + 2x^2 + 2y^2 + 8y + 8 - x^2 - 6x - 9 - y^2 - 2y - 1$ et : $\underline{2MA^2 + MB^2 = x^2 + y^2 - 10x + 6y}$

6-2 Nature de $\boldsymbol{E}$ selon les valeurs de k . $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point du plan . Alors :

$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow 2MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 6y = k$ d'après 6-1

En utilisant la technique de la forme canonique d'un polynôme du second degré on obtient :

$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 6y = k \Leftrightarrow (x-5)^2 - 25 + (y+3)^2 - 9 = k \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = k + 34$

D'autre part : $\rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, (x-5)^2 \geq 0 \; et \; \forall y \in \mathbb{R}, (y+3)^2 \geq 0\right)$ entraîne $\forall x \in \mathbb{R}\,, \forall y \in \mathbb{R}\,, (x-5)^2 + (y+3)^2 \geq 0$

$\rightarrow k + 34 > 0 \Leftrightarrow k > -34$ et $k + 34 = 0 \Leftrightarrow k = -34$

D'où la discussion suivante selon les valeurs de k :

$\underline{1^{er} cas : \; k > -34}$. Alors $k + 34 > 0$ et $k + 34 = \left(\sqrt{k+34}\right)^2$ avec $\sqrt{k+34} > 0$. D'où :

$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = k + 34 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = \left(\sqrt{k+34}\right)^2$

$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 = r^2$ avec $\text{Q}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ et $r = \sqrt{k+34}$

Cette équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}$ est le cercle centré en $\text{Q}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ et de rayon $r = \sqrt{k+34}$

$\underline{2^{ème} cas : \; k < -34}$ Alors $k + 34 < 0$ et $(x+5)^2 + (y-3)^2 \geq 0$ pour tous réels x et y .

L'égalité $(x-5)^2 + (y+3)^2 = k + 34$ est donc fausse pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. L'équivalence

$M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = k + 34$ permet ensuite de déduire : $\boldsymbol{E = \varnothing}$

$\underline{3^{ème} cas : \; k = -34}$ Alors $k + 34 = 0$ et $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = k + 34$ devient : $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$

D'autre part : $\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x-5)^2 \geq 0 \; et \; \forall y \in \mathbb{R}, (y+3)^2 \geq 0 \rightarrow \forall a \in R^+$, $\forall b \in R^+$, $a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Par conséquent : $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$ et $(y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-5) = 0$ et $(y+3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ et $y = -3$

D'où : $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow M = Q$ avec $\text{Q}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{E}$ est réduit au seul point Q . Ainsi : $\boldsymbol{E} = \left\{ Q\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix} \right\}$

exercice 6 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. A$\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

1)1-1 définition analytique de $\boldsymbol{E}_1$ On a : $\boldsymbol{E}_1 = \{M \in \text{P}, MA^2 + MB^2 = 24\}$. Avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ point du plan , on obtient :

$M \in \mathbf{E}_1 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 24 \Leftrightarrow \left[(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2\right] + \left[(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2\right] = 24$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow (5-x)^2 + (7-y)^2 + (-1-x)^2 + (3-y)^2 = 24 \Leftrightarrow (5-x)^2 + (7-y)^2 + (1+x)^2 + (3-y)^2 = 24$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 34 = 0$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8x - 20y + 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$

Ainsi : $\boldsymbol{E}_1 = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0\right\}$

1-2 nature de $\boldsymbol{E}_1$: $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 10y + 25 = 0$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

$M \in \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$ avec I$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $r = 2$

Cette équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}_1$ est le cercle de centre I$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et de rayon $r = 2$

remarque : le centre de E_1 est le milieu de [AB] car : $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 = x_I$ et $\dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{7+3}{2} = 5 = y_I$

2) 2-1 définition analytique de $\boldsymbol{E}_2$ On a : $\boldsymbol{E}_2 = \{M \in \text{P}, MA^2 - MB^2 = 10\}$. Avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ point du plan , on obtient :

$M \in \mathbf{E}_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 10 \Leftrightarrow \left[(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2\right] + \left[(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2\right] = 10$

$M \in \boldsymbol{E}_2 \Leftrightarrow (5-x)^2 + (7-y)^2 - (-1-x)^2 - (3-y)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 - (x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) - 34 = 0$

$M \in \boldsymbol{E}_2 \Leftrightarrow -12x - 8y + 30 = 0 \Leftrightarrow 6x + 4y - 15 = 0$ et $\boldsymbol{E}_2 = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, 6x + 4y - 15 = 0\right\}$

2-2 nature de $\boldsymbol{E}_2$ L'équation cartésienne trouvée en 2-1 pour $\boldsymbol{E}_2$ est de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $a = 6$, $b = 4$, $c = -15$

Par théorème : Un ensemble ayant une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Donc $\boldsymbol{E}_2$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

Remarque : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_B\\y_B - y_A\end{pmatrix}$ donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5\\3-7\end{pmatrix}$ soit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$. Donc : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ est un autre vecteur normal à $\mathbf{E}_2$.

Ainsi : $\boldsymbol{E}_2$ est une droite perpendiculaire à la droite (AB) .

3) 3-1 définition analytique de $\boldsymbol{E}_3$ On a : $\boldsymbol{E}_3 = \{M \in \text{P}, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 3\}$. Avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ point du plan , on obtient :

$M \in \mathbf{E}_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 10 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{MA}} x_{\overrightarrow{MB}} + y_{\overrightarrow{MA}} y_{\overrightarrow{MB}} = 10$ avec $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}5-x\\7-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\end{pmatrix}$

$M \in \mathbf{E}_3 \Leftrightarrow (5-x)(-1-x) + (7-y)(3-y) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + x - 5 + y^2 - 7y - 3y + 21 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$

Donc : $\boldsymbol{E}_3 = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0\right\}$

3-2 nature de $\boldsymbol{E}_3$: $M \in \boldsymbol{E}_3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 10y + 13 = 0$

$M \in \boldsymbol{E}_3 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 13 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 29 - 13 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$

$M \in \boldsymbol{E}_3 \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$ avec I$\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $r = 4$

Cette équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}_1$ est le cercle centré en I milieu de [AB]et de rayon $r = 4$

4) 4-1 définition analytique de $\boldsymbol{E}_4$ On a : $\boldsymbol{E}_4 = \{M \in \text{P}, 5MA^2 - 3MB^2 = 60\}$. Avec $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ point du plan , on obtient :

$M \in \mathbf{E}_4 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 24 \Leftrightarrow 5\left[(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2\right] - 3\left[(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2\right] = 60$

$M \in \boldsymbol{E}_4 \Leftrightarrow 5\left[(5-x)^2 + (7-y)^2\right] - 3\left[(-1-x)^2 + (3-y)^2\right] = 60 \Leftrightarrow 5\left(x^2 - 10x + y^2 - 14y + 74\right) - 3\left(x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10\right) = 60$

$M \in \boldsymbol{E}_4 \Leftrightarrow 5x^2 - 50x + 5y^2 - 70y + 370 - (3x^2 + 6x + 3y^2 - 18y + 30) = 60$

$M \in \boldsymbol{E}_4 \Leftrightarrow 5x^2 - 50x + 5y^2 - 70y + 370 - 3x^2 - 6x - 3y^2 + 18y - 30 - 60 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 56x + 2y^2 - 52y + 280 = 0$

Ainsi : $\boldsymbol{E}_4 = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x^2 + 2y^2 - 56x - 52y + 280 = 0 \right\}$

4-2 nature de $\boldsymbol{E}_4$: $M \in \boldsymbol{E}_4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 56x - 52y + 280 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 28x - 26y + 140 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 28x + y^2 - 26y + 140 = 0$

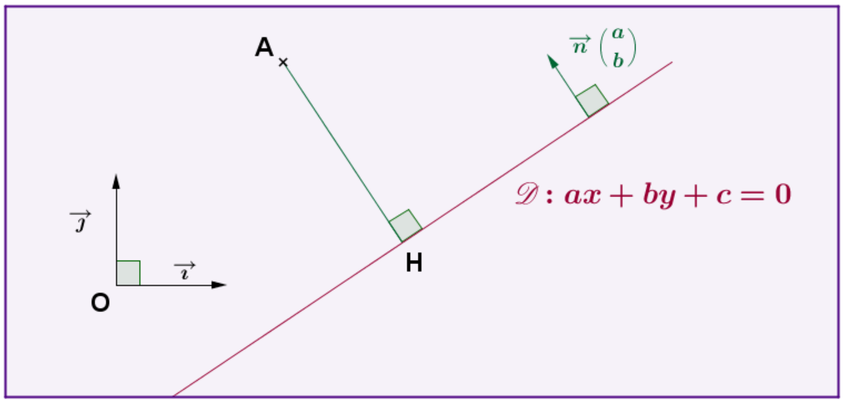
$M \in \boldsymbol{E}_4 \Leftrightarrow (x-14)^2 - 196 + (y-13)^2 - 169 + 140 = 0 \Leftrightarrow (x-14)^2 + (y-13)^2 = 225$ et $225 = 15^2$

$M \in \boldsymbol{E}_4 \Leftrightarrow (x - x_G)^2 + (y - y_G)^2 = r^2$ avec $\mathrm{G}\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $r = 15$

Cette équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}_4$ est le cercle de centre $\mathrm{G}\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = 15$

exercice 7

distance d'un point A à une droite $\mathcal{D}$



rappels et vocabulaire :

→ un **vecteur normal à une droite** $\mathcal{D}$ est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ ou encore un vecteur dirigeant une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

→ Avec $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$

un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Définition : A point du plan ; $\mathcal{D}$ droite incluse dans le plan et H projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

La longueur AH est appelée la **distance du point A à la droite D .** On note : $AH = d(A, \mathrm{D})$

1) $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ point du plan , $\mathrm{H}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$ projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

→ $\overrightarrow{AH}$ est normal à $\mathcal{D}$ car H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Par conséquent $\overrightarrow{AH}$ *et* $\vec{n}$ sont colinéaires comme vecteurs normaux à une même droite . En utilisant la valeur absolue de l'expression du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires on obtient : $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = \|\vec{n}\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{(x_{\vec{n}})^2 + (y_{\vec{n}})^2} \times AH = \sqrt{a^2 + b^2} \times AH$

→ En utilisant la définition analytique du produit scalaire de deux vecteurs on obtient :

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = x_{\vec{n}} x_{\overrightarrow{AH}} + y_{\vec{n}} y_{\overrightarrow{AH}} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = ax_H - ax_A + by_H - by_A = ax_H + by_H - ax_A - by_A$

D'autre part : $H \in \mathrm{D}$ et $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ donc $ax_H + by_H + c = 0$ et $ax_H + by_H = -c$.

Par conséquent : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = ax_H + by_H - ax_A - by_A$ devient : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = -c - ax_A - by_A = -(c + ax_A + by_A)$

→ Ayant $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \times AH$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = -(c + ax_A + by_A)$ *on* déduit ensuite :

$\sqrt{a^2 + b^2} \times AH = \left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = |-(c + ax_A + by_A)| = |c + ax_A + by_A|$ (pour tout réel X , $|-X| = |X|$)

D'où : $\sqrt{a^2 + b^2} \times AH = |ax_A + by_A + c|$ puis : $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($\sqrt{a^2 + b^2} = \|\vec{n}\|$ et $\|\vec{n}\| \neq 0$ car $\vec{n} \neq \vec{o}$)

Finalement : $d(A, \mathcal{D}) = AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2) Plan muni d'un repère orthonormal ; $\mathrm{A}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathcal{D}_1 : 4x - 3y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : x - 2y + 1 = 0$

2-1 En utilisant la formule démontrée en 1) on obtient :

Calculer $d(A, \mathcal{D}_1) = \dfrac{|4x_A - 3y_A + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{|4(5) - 3(3) + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{|12|}{\sqrt{25}} = \dfrac{12}{5}$

et $d(A, \mathcal{D}_2) = \dfrac{|x_A - 2y_A + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|(5) - 2(3) + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{|0|}{\sqrt{5}} = 0$ (résultat montrant A situé sur $\mathcal{D}_2$)

2-2 On note H$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de $\Omega\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{D}_1 : 4x - 3y + 1 = 0$. Donc $H \in \mathcal{D}_1$ entraînant : $4x - 3y + 1 = 0$

D'autre part :

$\overrightarrow{\Omega H}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_1$ est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -(-3) \\ 4 \end{pmatrix}$ soit par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Et : $\overrightarrow{\Omega H} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega H} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{\Omega H}} x_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{\Omega H}} y_{\overrightarrow{u}} = 0$ avec $\overrightarrow{\Omega H}\begin{pmatrix} x - 4 \\ y - \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

D'où : $\overrightarrow{\Omega H} \perp \overrightarrow{u} \Leftrightarrow 3(x-4) + 4\left(y - \dfrac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 18 = 0$

Les coordonnées de H sont donc solution du système $\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0 \end{cases}$. D'autre part :

$$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 9y + 3 = 0 \\ -12x - 16y + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 9y + 3 = 0 \\ 12x - 9y + 3 - 12x - 16y + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 9y + 3 = 0 \\ -25y + 75 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 9(3) + 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 24 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} .$$

Par conséquent : le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}_1$ est : H$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>rayon r du cercle $\mathcal{C}$ centré en Ω et tangent à $\mathcal{D}_1$</u> .

$\mathcal{C}$ étant tangent à $\mathcal{D}_1$ en H projeté projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}_1$ le rayon de $\mathcal{C}$ est $r = \Omega H = d(\Omega, \mathcal{D}_1)$.

H$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\Omega\begin{pmatrix} 4 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc : $r = d(\Omega, \mathcal{D}_1) = \dfrac{|4x_\Omega - 3y_\Omega + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{\left|4(4) - 3(\dfrac{3}{2}) + 1\right|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{\left|\dfrac{25}{2}\right|}{\sqrt{25}} = \dfrac{25}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{2}$

2-3 <u>une équation cartésienne de $\mathcal{C}$</u> M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point de P . On a :

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$ (ΩM et r positifs) et $r = \dfrac{5}{2}$

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 3y + \dfrac{9}{4} - \dfrac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 3y + 12 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 - 8x - 3y + 12 = 0$

2-4 le point B$\begin{pmatrix} \dfrac{11}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ est situé surle cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient : $x_B^2 + y_B^2 - 8x_B - 3y_B + 12 = 0$.

Or : $x_B^2 + y_B^2 - 8x_B - 3y_B + 12 = \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\dfrac{11}{2}\right) - 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 12 = \dfrac{121}{4} + \dfrac{1}{4} - 44 + \dfrac{3}{2} + 12 = \dfrac{61}{2} + \dfrac{3}{2} - 32 = 0$

Donc : $B \in \mathcal{C}$

<u>une équation cartésienne de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}$ en B</u> . Comme droite tangente à $\mathcal{C}$ en B , Δ contient B et a pour vecteur normal particulier $\overrightarrow{\Omega B}$ avec : $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix} \dfrac{11}{2} - 4 \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$. M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point de P . On a :

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{BM}} x_{\overrightarrow{\Omega B}} + y_{\overrightarrow{BM}} y_{\overrightarrow{\Omega B}} = 0$ et $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x - 4 \\ y - \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc :

$M \in \Delta \Leftrightarrow (x-4)\left(\dfrac{3}{2}\right) + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)(-2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x - 6 + -2y + 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x - 2y - 3 = 0$

Ainsi : une équation cartésienne de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}$ en B est : $\dfrac{3}{2}x - 2y - 3 = 0$.

exercice 8 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$\mathcal{D}_1 : 8x-6y+3=0$ et $\mathcal{D}_2 : 3x-4y-5=0$; A$\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$

1) Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point I dont on précisera les coordonnées .

Avec $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ point du plan , on obtient : $M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y+3=0 \\ 3x-4y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32x-24y+12=0 \\ -18x+24y+30=0 \end{cases}$,

$$M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 32x-24y+12=0 \\ 14x+42=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y+3=0 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(-3)-6y+3=0 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21-6y=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

$M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -7-2y=0 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc sécantes en I$\begin{pmatrix} -3 \\ -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$

2) Par théorème : avec $\mathcal{D} : ax+by+c=0$, $d(A,\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $\mathcal{D}_1 : 8x-6y+3=0$; $\mathcal{D}_2 : 3x-4y-5=0$; A$\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$

Donc : $d(A,\mathcal{D}_1) = \dfrac{|8x_A-6y_A+3|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \dfrac{\left|8(-\frac{3}{2})-6(-5)+3\right|}{\sqrt{64+36}} = \dfrac{|21|}{\sqrt{100}} = \dfrac{21}{10}$

$d(A,\mathcal{D}_2) = \dfrac{|3x_A-4y_A-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{\left|3(-\frac{3}{2})-4(-5)-5\right|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{\frac{21}{2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\frac{21}{2}}{5} = \dfrac{21}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{21}{10}$ donc $d(A,\mathcal{D}_1) = d(A,\mathcal{D}_2)$ est vrai .

A est bien équidistant des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

3) On note $E = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \, d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \right\}$.

→ I est élément de $\boldsymbol{E}$ *si* et seulement si : $d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2)$. Or I est le point commun à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Donc

$d(I,\mathcal{D}_1) = 0$ et $d(I,\mathcal{D}_2) = 0$ et $d(I,\mathcal{D}_1) = d(I,\mathcal{D}_2)$ entraînant : $I \in \boldsymbol{E}$

→ Avec $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ point du plan , on obtient :

$$d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \Longleftrightarrow \frac{|8x_M-6y_M+3|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \frac{|3x_M-4y_M-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \Longleftrightarrow \frac{|8x-6y+3|}{10} = \frac{|3x-4y-5|}{5}$$

$$d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \Longleftrightarrow \frac{|8x-6y+3|}{2} = |3x-4y-5| \Longleftrightarrow |8x-6y+3| = 2 \times |3x-4y-5|$$

$d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \Longleftrightarrow |8x-6y+3| = |6x-8y-10|$ (pour tout réel X , $2|X| = |2X|$)

Par théorème : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$. Donc :

$d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \Longleftrightarrow 8x-6y+3 = 6x-8y-10$ ou $8x-6y+3 = -(6x-8y-10)$

$d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \Longleftrightarrow 2x+2y+13=0$ ou $14x-14y-7=0 \Longleftrightarrow 2x+2y+13=0$ ou $2x-2y-1=0$

Ainsi : $M \in \boldsymbol{E} \Leftrightarrow d(M,\mathcal{D}_1) = d(M,\mathcal{D}_2) \Longleftrightarrow M \in \Delta_1$ ou $M \in \Delta_2$ en posant : $\Delta_1 : 2x+2y+13=0$ et $\Delta_2 : 2x-2y-1=0$

$\boldsymbol{E}$ est donc la réunion des deux droites $\Delta_1 : 2x+2y+13=0$ et $\Delta_2 : 2x-2y-1=0$

Δ_1 et Δ_2 sont dirigées respectivement par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (avec : $a=2$, $b=2$) et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (avec : $a=2$, $b=-2$)

Donc Δ_1 et Δ_2 sont dirigées respectivement par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

D'autre part : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}}x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}}y_{\overrightarrow{v}} = (-2)(2)+(2)(2) = -4+4 = 0$. Donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Ainsi : L'ensemble $\boldsymbol{E}$ des points équidistants des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la réunion des deux droites perpendiculaires Δ_1 et Δ_2 .

vocabulaire : Ces deux droites perpendiculaires Δ_1 et Δ_2 représentent les bissectrices de la paire des deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$