Produit Scalaire - énoncés feuille 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$

exercice 1

On considère les six points suivants : A$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$; C$\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$; D$\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$; E$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; F$\begin{pmatrix}1-3\sqrt{3}\\-2+4\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Peut-on trouver un rectangle , un triangle isocèle rectangle , un triangle équilatéral dont les sommets sont 4 ou 3 des six points ABCDEF ? (un dessin peut être utile !) .

exercice 2

m étant un paramètre réel , on considère les vecteurs suivants $\vec{u}\begin{pmatrix}m\sqrt{2}\\2+m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\m\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}4m-3\\2m-1\end{pmatrix}$

2-1 déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2-2 déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires . On rappelle le théorème suivant :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient : $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0$

2-3 déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{w}$ est unitaire .

exercice 3

A$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$; E$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; F $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

1) Calculer $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$, $2\overrightarrow{AB}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, DE

2) Ecrire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ contenant C et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$.

3) Ecrire une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment [AB] .

4) Ecrire une équation cartésienne de la hauteur h_A du triangle ABC issue de A .

5) Quelle est la nature du triangle DEF ? En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle DEF .

6) Ecrire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre C contenant F .

7) Reconnaître l'ensemble F $= \{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} / x^2+y^2-2x+6y-2=0\}$

exercice 4

Les ensembles suivants sont-ils des cercles ? $\boldsymbol{E}_1 = \{\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} , x^2+y^2-10x+8y+23=0\}$

$\boldsymbol{E}_2 = \{\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} , x^2+y^2+8x-10y+45=0\}$; $\boldsymbol{E}_3 = \{\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} , x^2+y^2-3x+y+\frac{5}{2}=0\}$

$\boldsymbol{F}_1 = \{\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} , x^2+y^2-6x+10y+10=0\}$; $\boldsymbol{F}_2 = \{\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} , x^2+y^2+14x-4y+57=0\}$

$\boldsymbol{F}_3 = \{\text{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} , x^2+y^2-12x+4y+40=0\}$

exercice 5

A$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$

1) Ecrire une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[BC]$

2) Ecrire une équation cartésienne de la hauteur h_C du triangle ABC isue de C

3) Ecrire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ contenant C et perpendiculaire à $\mathcal{D}_1 : -5x+3y+4=0$

4) Ecrire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et contenant K$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

5) Ecrire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[IJ]$ avec I$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et J$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

6) On considère l'ensemble suivant : $\boldsymbol{E} = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \text{P}\ ,\ 2MA^2 - MB^2 = k\right\}$.

6-1 Définir analytiquement $\boldsymbol{E}$ en exprimant $2MA^2 - MB^2$ en fonction des coordonnées x et y pour $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

6-2 Selon les valeurs du réel k , reconnaître l'ensemble $\boldsymbol{E}$

exercice 6 A$\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. On considère les ensembles suivants :

$\boldsymbol{E}_1$ est l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 24$

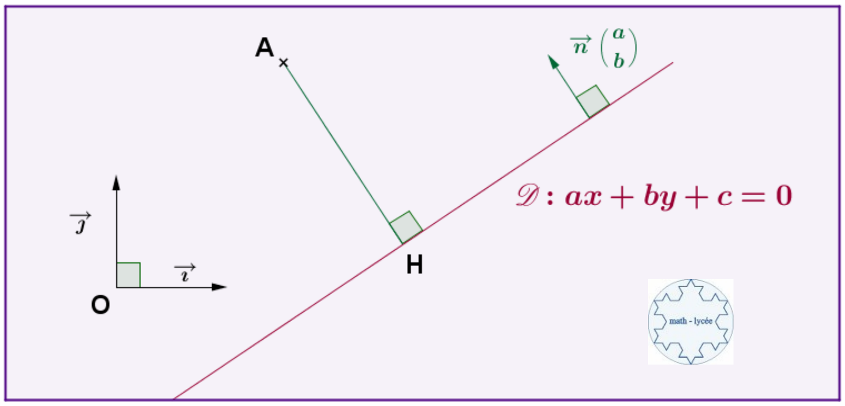
$\boldsymbol{E}_2$ est l'ensemble des points M tels que : $MA^2 - MB^2 = 10$

$\boldsymbol{E}_3$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 3$

$\boldsymbol{E}_4$ est l'ensemble des points M tels que : $5MA^2 - 3MB^2 = 60$

Pour chacun de ces quatre ensembles on demande de le définir analytiquement puis d'utiliser l'équation cartésienne trouvée pour le reconnaître

exercice 7 **distance d'un point A à une droite $\mathcal{D}$**



rappels et vocabulaire :
→ un **vecteur normal à une droite** $\mathcal{D}$ est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ ou encore un vecteur dirigeant une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$.   → Avec $\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Définition : A point du plan ; $\mathcal{D}$ droite incluse dans le plan et H projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ ..

La longueur AH est appelée la **distance du point A à la droite** $\mathcal{D}$. On note : $AH = d(A, \mathcal{D})$

1) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$ et A$\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ point du plan

Justifier : $\left|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}AH = |ax_A + by_A + c|$ puis en déduire la formule : $\boxed{d(A, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

2) Le plan est muni d'un repère orthonormal .On considère : A$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\mathcal{D}_1$: $4x - 3y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2$: $8x + 6y - 5 = 0$

2-1 Calculer $d(A, \mathcal{D}_1)$ et $d(A, \mathcal{D}_2)$

2-2 Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de $\Omega\begin{pmatrix}4\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ sur la droite $\mathcal{D}_1$ puis en déduire le rayon r du cercle $\mathcal{C}$ centré en Ω et tangent à $\mathcal{D}_1$.

2-3 Ecrire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

2-4 Vérifier que B est un point de $\mathcal{C}$ puis écrire une équation cartésienne de la droite Δ tangente au cercle $\mathcal{C}$ en B.

exercice 8 On considère les deux droites suivantes : $\mathcal{D}_1$: $8x - 6y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2$: $3x - 4y - 5 = 0$ et le point A$\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-5\end{pmatrix}$

1) Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point I dont on précisera les coordonnées .

2) Démontrer que le point A est équidistant des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (en montrant $d(A, \mathcal{D}_1) = d(A, \mathcal{D}_2)$)

3) On note $\boldsymbol{E} = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} / d(M, \mathcal{D}_1) = d(M, \mathcal{D}_2))\right\}$. Le point I est-il élément de $\boldsymbol{E}$? Démontrer que $\boldsymbol{E}$ est la réunion de deux droites Δ et Δ' pour lesquelles on précisera une équation . Que peut-on dire des directions deux droites Δ et Δ' ?