Produit Scalaire de deux vecteurs

Différentes expressions du produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

1) en connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormale

produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$	on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{v}}$
norme de $\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$	: $\parallel \overrightarrow{u} \parallel = \sqrt{(x_{\overrightarrow{u}})^2 + (y_{\overrightarrow{u}})^2}$ et $\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 = (x_{\overrightarrow{u}})^2 + (y_{\overrightarrow{u}})^2$

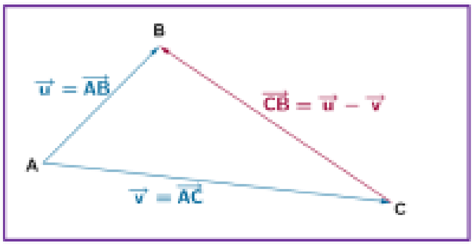
2) en connaissant une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$

$\boxed{\text{On pose } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\alpha \text{ avec } \alpha \text{ mesure de l'angle orienté } (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})}$

remarque : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$. En effet : avec α mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, $-\alpha$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}})$ et $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

3) en connaissant les normes de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{v}$ ou bien les longueurs des 3 côtés d'un triangle ABC

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$$
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2)$$



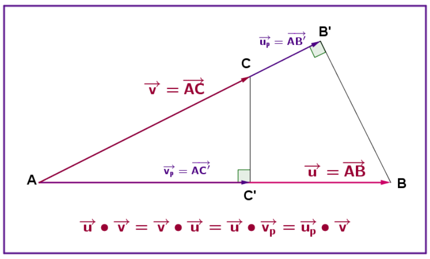
4) en ayant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires

→ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires de même sens : $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}$

→ $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires de sens contraires : $\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|}$

Dans ce cas , la valeur absolue du produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est un produit de deux longueurs et représente l'aire d'un rectangle . Autrement dit : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ peut être considéré comme une aire algébrique (grandeur d'ordre 2 qui compte positivement ou bien négativement)

5) en utilisant des projetés orthogonaux pour se ramener à des vecteurs colinéaires

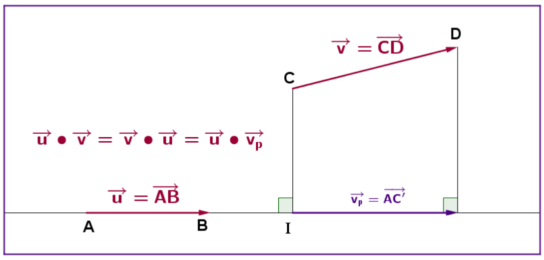


$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$ car C' projeté orthogonal de C sur (AB)
$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'}$ car B' projeté orthogonal de B sur (AC)
et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_p}$ avec $\overrightarrow{u_p}$ projeté othogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$
et $\overrightarrow{v_p}$ vecteur projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$ car I et J sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB)

principe à retenir :

avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et $\overrightarrow{v_p}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_p}$. On se ramène ainsi au produit scalaire de deux vecteurs colinéaires : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_p}$



6) compléments

6 -1 carré scalaire de $\overrightarrow{u}$: produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui- même noté $\boxed{(\overrightarrow{u})^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2}$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $(\overrightarrow{u})^2 \geq 0$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u})^2} = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$

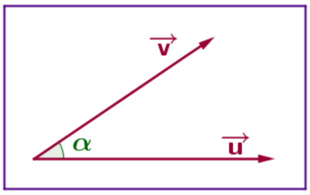
6 -1 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ orthogonaux $\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0}$

remarque : Pour justifier qu'une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est orthonormale , il suffit de prouver : $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$

6 -2 signe du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

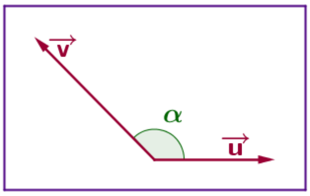
angle aigu : $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ car : $\cos\alpha > 0$



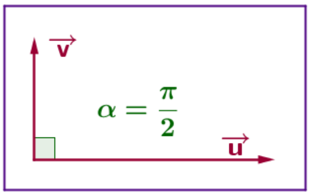
angle obtus : $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ car : $\cos\alpha < 0$



angle droit : $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ car : $\cos\alpha = 0$

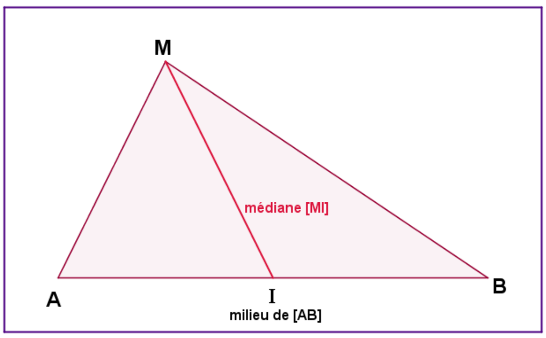


Calculer avec des produits scalaires

symétrie du produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
linéarité à gauche (vecteur situé à gauche du symbole $\cdot$: un vecteur somme ou un vecteur $k\vec{u}$	$(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \cdot \vec{v} = (\vec{u_1} \cdot \vec{v}) + (\vec{u_2} \cdot \vec{v})$ $(k\vec{u} \cdot \vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
linéarité à droite (vecteur situé à droite du symbole $\cdot$: un vecteur somme ou un vecteur $k\vec{v}$	$\vec{u} \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = (\vec{u} \cdot \vec{v_1}) + (\vec{u} \cdot \vec{v_2})$ $(\vec{u} \cdot k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
avec des vecteurs opposés	$-(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot -\vec{v}) = (-\vec{u} \cdot \vec{v})$ $(-\vec{u} \cdot -\vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})$; $(-\vec{u})^2 = (\vec{u})^2$ et $\lVert -\vec{u} \rVert^2 = \lVert \vec{u} \rVert^2$
avec des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$	$(a\vec{u} \cdot b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$; $(a\vec{u} \cdot a\vec{v}) = a^2 \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ $(a\vec{u} \cdot a\vec{u}) = a^2 \times (\vec{u} \cdot \vec{u})$ $\lVert a\vec{u} \rVert^2 = a^2 \times \lVert \vec{u} \rVert^2$
trois produits scalaires remarquables	$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v})^2$ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v})^2$ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ **ou bien** (avec des normes) $\lVert \vec{u} + \vec{v} \rVert^2 = \lVert \vec{u} \rVert^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \lVert \vec{v} \rVert^2$ $\lVert \vec{u} - \vec{v} \rVert^2 = \lVert \vec{u} \rVert^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \lVert \vec{v} \rVert^2$ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lVert \vec{u} \rVert^2 - \lVert \vec{v} \rVert^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
avec des combinaisons linéaires de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$	$(a\vec{u} + b\vec{v})^2 = a^2 (\vec{u})^2 + [2ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})] + b^2 (\vec{v})^2$ ou : $\lVert a\vec{u} + b\vec{v} \rVert^2 = a^2 \lVert \vec{u} \rVert^2 + [2ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})] + b^2 \lVert \vec{v} \rVert^2$

Principe à retenir : Les techniques opératoires utilisées pour calculer avec des produits scalaires fonctionnent de manière analogue aux techniques opératoires utilisées pour le calcul algébrique dans $\mathbb{R}$.

Trois relations métriques avec le milieu I d'un segment $[AB]$



trois théorèmes utilisant la médiane [MI]

A et B sont deux points distincts du plan et **I est le milieu de [AB]**

Pour tout point M du plan on a :

théorème 1 : $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$

théorème 2 : $\boxed{MA^2 - MB^2 = 2\left(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}\right)}$

théorème 3 : $\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$

vocabulaire : f étant une fonction du plan vers R , on appelle **ligne de niveau k relative à f** l'ensemble $\boldsymbol{L}_k$ défini par

$$\boldsymbol{L}_k = \{M \in \mathrm{P}, f(M) = k\}$$

à savoir : avec k bien choisi les lignes de niveau k relatives respectivement à $f : M \mapsto MA^2 + MB^2$, $g : M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ sont des cercles centré en I milieu de [AB] et la ligne de niveau k relative à $h : M \mapsto MA^2 - MB^2$ est une droite perpendiculaire à (AB)