Produit Scalaire en repère orthonormal

Le plan est muni d'un repère orthormal$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) calculer un produit scalaire de deux vecteurs , calculer le carré scalaire et la norme d'un vecteur

$$\boxed{\text{Avec } \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ on a : } \vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2}$$

$$\boxed{\text{la norme d'un vecteur } \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ est définie par } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

2) calculer la distance entre deux points de coordonnées connues

En ayant $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $d(A,B) = AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. D'où :

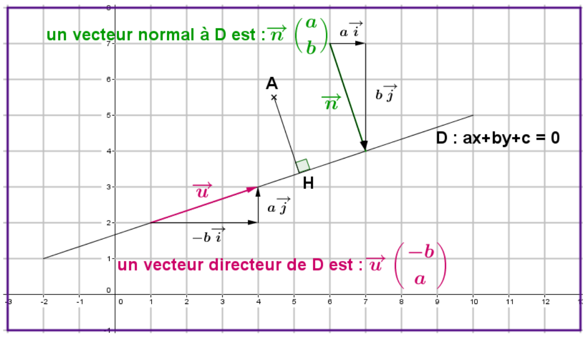
$$\boxed{d(A,B) = AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}} \text{ et } \boxed{AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

3) calculer la distance d'un point à une droite

vocabulaire : : → Un **vecteur normal** à D est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de D ou encore un vecteur dirigeant une droite perpendiculaire à D .

→ La **distance** $d(A,\mathrm{D})$ **du point A à la droite** D est égale à la longueur AH avec H projeté orthogonal de A sur D .

méthode : pour déterminer les coordonnées de H il suffit de résoudre le système associé aux deux conditions suivantes



$$\begin{cases} H \in \mathrm{D} \\ \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} H \in \mathrm{D} \\ \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{l} \textit{avec } \vec{u} \text{ vecteur} \\ \text{directeur de D} \end{array}\right)$$

Avec D : $ax+by+c=0$:

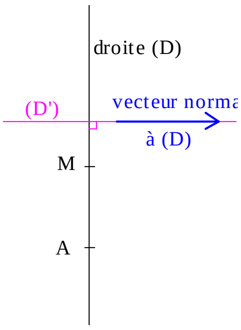
→ un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

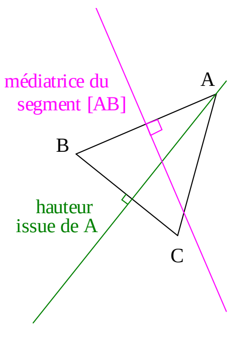
→ un vecteur normal à D est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ($\vec{n}\perp\vec{u}$)

→ La distance de A à D se calcule avec

la formule : $d(A,\mathrm{D}) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

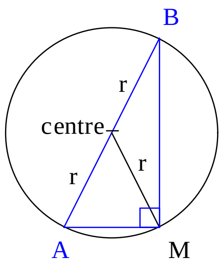
4) équations cartésiennes de droites définies comme perpendiculaires





Une droite (D) contenant un point A et ayant $\vec{n}$ comme **vecteur normal**	$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}\, x_{\vec{n}} + y_{\overrightarrow{AM}}\, y_{\vec{n}} = 0$
Une droite (D) perpendiculaire à une droite $(D') : \alpha x+\beta y+\gamma = 0$	Avec (D) perpendiculaire à (D') , tout vecteur directeur de (D') est normal à (D) . Par théorème : un vecteur directeur de $(D') : \alpha x+\beta y+\gamma = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$. $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$. $M\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}\, x_{\vec{u}} + y_{\overrightarrow{AM}}\, y_{\vec{u}} = 0$
la **hauteur** h_A , issue du sommet A d'un triangle ABC	La hauteur h_A est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A . $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M\in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}\, x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AM}}\, y_{\overrightarrow{BC}} = 0$
la **médiatrice** Δ d'un segment $[AB]$	→ **méthode 1** : La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B . $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$. $M\in\Delta \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$ (AM et BM positifs) $M\in\Delta \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = (x-x_B)^2+(y-y_B)^2$ → **méthode 2** : La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à [AB] passant par le milieu I de [AB] . $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{IM}}\, x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{IM}}\, y_{\overrightarrow{AB}} = 0$

5) équations cartésiennes de cercles



cercle (C)

un cercle de **centre Ω** connu et de **rayon r** connu	M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$ (ΩM et r positifs) $M \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$
un cercle de **centre Ω** connu contenant **un point A** connu	Avec A point de $\boldsymbol{C}$ le rayon r de $\boldsymbol{C}$ est égal à la longueur ΩA . M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \Omega M = \Omega A$ $M \in \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \Omega A^2$ (ΩM et ΩA réels positifs) $M \in C \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2$
un cercle de **diamètre$\lfloor AB \rfloor$** connu	Le cercle $\boldsymbol{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$. M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ $M \in C \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

remarque : Après avoir développé les calculs **on trouve pour le cercle une équation de la forme** $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

6) méthode pour reconnaître un ensemble d'équation : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

un exemple traité : Selon les valeurs de k reconnaître l'ensemble $\boldsymbol{E}_k = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2 + y^2 - 4x - 2y + k = 0 \right\}$

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point de $\mathcal{P}$. Alors : $M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + k = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) + k = 0$

En utilisant deux fois la technique de la forme canonique d'un polynôme du second degré on construit ensuite :

$M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow (x-2)^2 - (2)^2 + (y-1)^2 - (1)^2 + k = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 - k$

D'autre part : $\rightarrow$ le premier membre de l'égalité précédente est positif car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(y-1)^2 \geq 0$

$\rightarrow$ le signe du second membre $5 - k$ de cette égalité dépend de la valeur attribuée à k .

D'où la discussion selon les valeurs de k

<u>$1^{er}cas : k > 5$</u> . Alors : $5 - k < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 + (y-1)^2 \neq 5 - k$.

Par conséquent : $\forall M \in$ P , $M \notin \boldsymbol{E}_k$ et $\boldsymbol{E}_k = \varnothing$

<u>$2^{ème}cas : k = 5$</u> . Alors : $5 - k = 0$ et $M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(y-1)^2 \geq 0$

Par théorème ; avec a et b positifs : $a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$. Donc :

$M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ et $(y-1)^2 = 0$ conduisant à : $M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow x = 2$ et $y = 1$

L'ensemble $\boldsymbol{E}_k$ est donc réduit à un seul point : $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{E}_k = \left\{ \Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

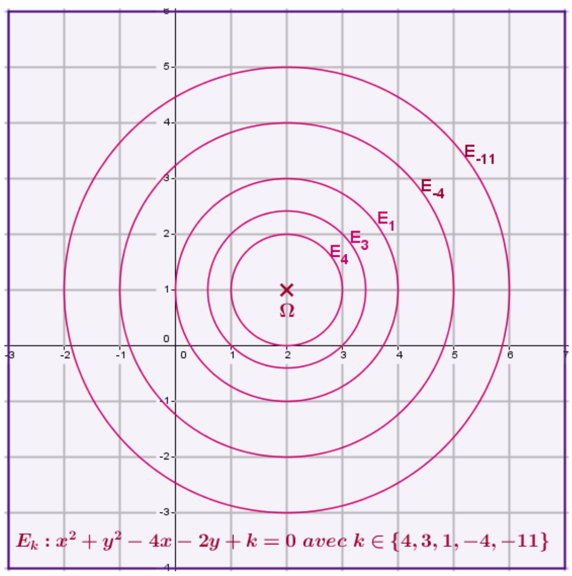
<u>$3^{ème}cas : k < 5$</u> . Alors : $5 - k > 0$ et on peut écrire : $5 - k = r^2$ en posant : $r = \sqrt{5-k}$. Alors :

$M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 - k$ et $M \in \boldsymbol{E}_k \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$ avec : $x_\Omega = 2$, $y_\Omega = 1$ et $r = \sqrt{5-k}$

Cette dernière équivalence permet d'affirmer : $\boldsymbol{E}_k$ est le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{5-k}$

figure :

k	4	3	1	-4	-11
$r = \sqrt{5-k}$	1	$\sqrt{2}$	2	3	4



à retenir :

> Selon les valeurs données pour a , b et c,
> un ensemble ayant une équation du type :
> $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est :
> $\rightarrow$ soit l'ensemble vide
> $\rightarrow$ soit réduit à un seul point Ω avec $\Omega \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2} \\ -\dfrac{b}{2} \end{pmatrix}$
> $\rightarrow$ soit un cercle centré en Ω