Etudier le signe d'une expression réelle

Etudier le signe d'une expression réelle $E(x)$ dépendant d'une variable réelle x revient à préciser , selon les valeurs de x , si cette expression est soit strictement positive , soit strictement négative , soit nulle . On résume souvent cette étude dans un tableau appelé tableau de signe de $E(x)$.

1 - signe de ax+b (a non nul)

Préalable Un tableau de signe particulier : celui de x . Le tableau ci-contre illustre bien qu'étudier le signe d'un réel revient à le comparer au réel 0 .

valeurs de x	$-\infty$	$x<0$	0	$x>0$	$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$	

signe de $ax+b$ Avec $a \neq 0$, $ax+b$ possède une seule valeur d'annulation notée x_0 dans ce paragraphe . En effet : $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ ($a \neq 0$) . Ainsi : $x_0=-\dfrac{b}{a}$.

D'autre part : $ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow \left(a<0 \text{ et } x<-\dfrac{b}{a}\right)$ ou $\left(a>0 \text{ et } x>-\dfrac{b}{a}\right) \Leftrightarrow (a<0 \text{ et } x<x_0)$ ou $(a>0 \text{ et } x>x_0)$.

On obtient donc deux tableaux de signe possibles pour le signe de $ax+b$ selon le signe de a :

x	$-\infty$	$x<x_0$	x_0		$+\infty$
$ax+b$; $a<0$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		x_0	$x>x_0$	$+\infty$
$ax+b$; $a>0$		$-$	0	$+$	

Théorème : avec a non nul et x_0 valeur d'annulation de $ax+b$ le signe de $ax+b$ est donné par le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax+b$, $a \neq 0$	signe de $-a$	0	signe de a

un facteur du premier degré (du type $ax+b$ avec $a \neq 0$) s'annule une seule fois et en changeant de signe

exemple : signe de $-2x-5$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x-5$	signe de $-a$ $+$	0	signe de a , a = -2 $-$

exemple : signe de $3x+6$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x-2$	signe de $-a$ $-$	0	signe de a , a = 2 $+$

2 - étudier le signe d'un produit de facteurs de degré 1

2-1 un premier exemple commenté : étudier le signe du produit $(-2x-6)(3x-12)$

• le tableau attendu pour le signe de $(-2x-6)(3x-12)$

valeurs d'annulation

- $-2x-6=0 \Leftrightarrow -2x=6 \Leftrightarrow x=-3$
- $3x-12=0 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4$

• des expliquations pour remplir ce tableau

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$-2x-6$		signe de -a $+$	0	$-$		signe de a , $a=-2$ $-$	
$3x-12$		$-$		signe de -a $-$	0	signe de a , a = 3 $+$	
$(-2x-6)(3x-12)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) on recherche en préalable les valeurs d'annulation respectives de chacun des deux facteurs $(-2x-6)$ et $(3x-12)$

2) on dresse ensuite un **tableau de la manière suivante :**

ligne 1 **valeurs de x**	x est élément de $]-\infty,+\infty[$; on écrit les valeurs d'annulation en les rangeant par ordre croissant (-3 placée à gauche de 4) , ce qui crée de gauche à droite trois colonnes de signe à remplir
ligne 2 : $-2x-6$	on écrit le **signe de** $-2x-6$ en codant d'abord son annulation par 0 placé à la verticale de -3
ligne 3 : $3x-12$	on écrit le **signe de** $3x-12$ en codant d'abord son annulation par 0 placé à la verticale de 4
ligne 4 : $(-2x-6)(3x-12)$	**on déduit le signe de** $(-2x-6)(3x-12)$ en utilisant les lignes 2 et 3 et ce qui suit : un produit de deux facteurs est : • nul ssi l'un au moins de ses facteurs est nul : codé 0 • strictement positif ssi ses facteurs sont de même signe : codé $+$ • strictement négatif ssi ses facteurs sont de signes contraires : codé $-$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$		0		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-7x$	signe de -a $+$		$+$	0	signe de a , a = −7 $-$		$-$
$-3x+4$	signe de -a $+$		$+$		$+$	0	signe de a , a = −3 $-$
$5x+2$	signe de −a $-$	0	signe de a , a = 5 $+$		$+$		$+$
$-7x(-3x+4)(5x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

valeurs d'annulation

- $-7x=0 \Leftrightarrow x=0$
- $-3x+4=0 \Leftrightarrow -3x=-4$

  $-3x+4=0 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$
- $5x+2=0 \Leftrightarrow 5x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5}$

remarque pour remplir la dernière ligne du tableau : compter pour chaque colonne de signe le nombre de signes $-$ utilisés : si ce nombre est pair , le produit est strictement positif (codé $+$) ; si ce nombre est impair , le produit est strictement négatif (codé $-$)

déductions à l'aide de ce tableau : • $-7x(-3x+4)(5x+2)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2}{5}, 0, \frac{4}{3}\right\}$ (valeurs d'annulation)

- $-7x(-3x+4)(5x+2)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right[\cup \left]0, \frac{4}{3}\right[$ (inégalité stricte : exclure les valeurs d'annulation , intervalles ouverts)
- $-7x(-3x+4)(5x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{5}, 0\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ (inégalité large : inclure les valeurs d'annulation , intervalles fermés)

3 - étudier le signe d'un quotient

3-1 A propos du signe d'un quotient $Q(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$

1) Le quotient $Q(x)$ est défini si et seulement si : $D(x) \neq 0$. Les valeurs d'annulation de son dénominateur $D(x)$ sont les valeurs pour lesquelles le quotient $Q(x)$ n'est pas calculable : ces valeurs sont appelées les valeurs interdites pour le calcul de $Q(x)$.
L'ensemble des réels privé de ces valeurs interdites est appelé l'ensemble de définition du quotient $Q(x)$ et noté D_Q.
Mathématiquement : $D_Q=\{x \in \mathbb{R} \text{ , } D(x) \neq 0\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \notin D_Q \Leftrightarrow D(x)=0$.
Pour signaler les valeurs interdites (sur la ligne du signe de $Q(x)$) on utilise le code || (double barre verticale)

2) Avec x élément de D_Q , le quotient $Q(x)$ est nul si et seulement si : $N(x)=0$ ou encore : $\forall x \in D_Q$, $Q(x)=0 \Leftrightarrow N(x)=0$
Les valeurs d'annulation du quotient $Q(x)$ sont les valeurs d'annulation de son numérateur $N(x)$.

3) Un tableau de signe particulier : celui de l'inverse $\frac{1}{x}$ de x

$\rightarrow$ Le réel 0 est une valeur interdite pour le calcul de $\frac{1}{x}$

$\rightarrow$ Pour x différent de 0 , x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe car leur produit est strictement positif (en effet : $x \times \frac{1}{x}=1$ et $1>0$) .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	$\|\|$	$+$

4) Pour les valeurs de x non interdites : $Q(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=N(x) \times \frac{1}{D(x)}$. D'après **3)** : $\frac{1}{D(x)}$ et $D(x)$ sont de même signe .
Donc $N(x) \times \frac{1}{D(x)}$ a le même signe que le produit $N(x) \times D(x)$. Par conséquent :
Dresser un tableau de signe de quotient revient à dresser un tableau de signe d'un produit , la différence étant la prise en compte des éventuelles valeurs interdites sur la dernière ligne du tableau dressé pour le quotient avec le code || .

3-2 un premier exemple : signe du quotient $Q(x)=\frac{x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	signe de -a $-$	0	signe de a , a = 1 $+$		$+$
$x-1$	$-$		signe de -a $-$	0	signe de a , a = 1 $+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

- $\frac{x+1}{x-1}$ défini si et seulement si : $x-1 \neq 0$

  $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (1 valeur interdite !)

  $D_Q=\mathbb{R}-\{1\}$
- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (-1 est une valeur d'annulation du quotient $\frac{x+1}{x-1}$)

3-3 un deuxième exemple : signe du quotient $\dfrac{2x+9}{x+2}$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$		-2	$+\infty$
$2x+9$	signe de -a $-$	0	signe de a , a = 2 $+$		$+$
$x+2$	signe de -a $-$		$-$	0	signe de a , a = 1 $+$
$\dfrac{2x+9}{x+2}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

- $\dfrac{2x+9}{x+2}$ défini si et seulement si : $x+2 \neq 0$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ (-2 valeur interdite !)

- $2x+9=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{2}$ ($-\dfrac{9}{2}$ est une valeur d'annulation du quotient $\dfrac{2x+9}{x+2}$)

$-\dfrac{9}{2}=-4,5$ donc : $-\dfrac{9}{2}<-2$

4 - étudier le signe d'un carré

4-1 A propos du signe du carré d'une expression réelle

1) Signe de x^2 dans $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

- Avec $x=0$ on a : $x^2=0$
- Avec $x \neq 0$, x^2 est le produit de deux termes égaux à x et donc de même signe .

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2>0$

2) Signe de $(ax+b)^2$ dans $\mathbb{R}$ ($a \neq 0$)

- une seule valeur d'annulation : $x_0=-\dfrac{b}{a}$ car :

$(ax+b)^2=0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ ($a \neq 0$)

- Pour tout réel x distinct de x_0 : $ax+b \neq 0$ et $(ax+b)^2>0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$(ax+b)^2$	$+$	0	$+$

on a seulement deux codes de signe : $+$ et 0 !

4-2 deux exemples

signe de $(-3x+5)^2$

Pour tout réel x , $(-3x+5)^2 \geq 0$. D'autre part :

$(-3x+5)^2=0 \Leftrightarrow -3x+5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$(-3x+5)^2$	$+$	0	$+$

signe de $(4x+2)^2$

Pour tout réel x , $(4x+2)^2 \geq 0$. D'autre part :

$(4x+2)^2=0 \Leftrightarrow 4x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(4x+2)^2$	$+$	0	$+$

5 - étudier le signe de ax^2+b avec a et b non nuls et de même signe

5-1 Avec a et b de même signe , ax^2+b ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$

En effet : pour tout réel x , $ax^2+b=0 \Leftrightarrow ax^2=-b \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2=-\dfrac{b}{a}$. Avec a et b de même signe on a : $\dfrac{b}{a}>0$ puis : $-\dfrac{b}{a}<0$.

D'autre part : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Pour des raisons de signe , l'égalité $x^2=-\dfrac{b}{a}$ est donc fausse pour tout réel x .

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2+b \neq 0$.

5-2 un premier exemple : signe de x^2+3 , $(a=1$ et $b=3)$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2+3	$+$	

justifications

On a : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$.

Donc : pour tout réel x , $x^2+3 \geq 0+3$ soit $x^2+3 \geq 3$.

Or : $3>0$. Donc : pour tout réel x , $x^2+3>0$

5-3 un deuxième exemple : signe de $2x^2+3$, $(a=2$ et $b=3)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2+3$	$+$	

justifications

On a : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ et $2>0$.

Donc : pour tout réel x , $2x^2 \geq 0$

Par conséquent : pour tout réel x , $2x^2+3 \geq 0+3$ soit $2x^2+3 \geq 3$.

Or : $3>0$. Donc : pour tout réel x , $2x^2+3>0$

5-4 un troisième exemple : signe de $-x^2-5$, ($a=-1$ et $b=-5$)

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2-5$		$-$	

justifications ($-x^2=(-1)\times x^2$)

On a : pour tout réel x , $x^2\geq 0$ et $-1<0$.

Donc : pour tout réel x , $-x^2\leq 0$

Par conséquent : pour tout réel x , $-x^2-5\leq 0-5$ soit $-x^2-5\leq -5$.

Or : $-5<0$. Donc : pour tout réel x , $-x^2-5<0$

5-5 un quatrième exemple : signe de $-3x^2-5$, ($a=-3$ et $b=-5$)

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x^2-5$		$-$	

justifications

On a : pour tout réel x , $x^2\geq 0$ *et* $-3<0$.

Donc : pour tout réel x , $-3x^2\leq 0$

Par conséquent : pour tout réel x , $-3x^2-5\leq 0-5$ soit $-3x^2-5\leq -5$.

Or : $-5<0$. Donc : pour tout réel x , $-3x^2-5<0$

A retenir

Un facteur du type ax^2+b avec a et b non nuls et de même signe ne s'annule pas dans $\mathbb{R}$ et est de signe constant sur $\mathbb{R}$: celui de a et b

6 - un exemple récapitulatif

tableau donnant le signe du quotient $Q(x)=\dfrac{5x^3(-3x-4)^2}{(9x+7)(-9x^2-7)}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{7}{9}$		0		$+\infty$
$5x$		$-$	signe de -a	$-$		$-$	0	signe de a , a = 5 $+$	
x^2		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$(-3x-4)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$9x+7$		$-$	signe de $-$a	$-$	0	signe de $+$	a , a = 9	$+$	
$-9x^2-7$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{5x^3(-3x-4)^2}{(9x+7)(-9x^2-7)}$		$-$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

justifications

$Q(x)=\dfrac{5x\left(x^2\right)(-3x-4)^2}{(9x+7)(-9x^2-7)}$

- $5x=0\Leftrightarrow x=0$
- Pour tout réel x , $x^2\geq 0$

et : $x^2=0\Leftrightarrow x=0$

- Pour tout réel x , $(-3x-4)^2\geq 0$

et $(-3x-4)^2=0\Leftrightarrow -3x-4=0$

$\Leftrightarrow -3x=4\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$

- $9x+7=0\Leftrightarrow 9x=-7\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{9}$

$-\dfrac{7}{9}$ annule le dénominateur de $Q(x)$

$-\dfrac{7}{9}$ est donc une valeur interdite

- signe de $-9x^2-7$:

Pour tout réel x , $x^2\geq 0$ *et* $-9<0$. Donc : pour tout réel x , $-9x^2\leq 0$

Par conséquent : pour tout réel x , $-9x^2-7\leq 0-7$ soit $-9x^2-7\leq -7$.

Or : $-7<0$. Donc : pour tout réel x , $-9x^2-7<0$

classement des réels 0 , $-\dfrac{4}{3}$ et $-\dfrac{7}{9}$ $\quad$ $-\dfrac{4}{3}$ et $-\dfrac{7}{9}$ étant strictement négatifs , 0 est le plus grand de ces trois réels .

Trois démarches possibles pour classer $-\dfrac{4}{3}$ et $-\dfrac{7}{9}$:

$\rightarrow$ intuitivement : $\dfrac{4}{3}=\dfrac{12}{9}$ donc $\dfrac{7}{9}$ est plus proche de 0 que $\dfrac{4}{3}$. C'est le réel positif le plus proche de 0 qui a le plus grand opposé .

Donc : $-\dfrac{7}{9}>-\dfrac{4}{3}$.

$\rightarrow$ mathématiquement : $\dfrac{4}{3}=\dfrac{12}{9}$ donc $\dfrac{7}{9}<\dfrac{12}{9}$ et $-\dfrac{7}{9}>-\dfrac{4}{3}$ ($-1<0$) .

$\rightarrow$ avec la calculatrice : $-\dfrac{7}{9}\simeq -0.78$; $-\dfrac{4}{3}\simeq -1.33$ donc $-\dfrac{4}{3}<-\dfrac{7}{9}$.

déductions possibles $\quad$ En utilisant la dernière ligne du tableau précédent on obtient par exemple :

$Q(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{7}{9},0\right]$; $Q(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\dfrac{7}{9}\right[\cup[0,+\infty[$; $Q(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\dfrac{4}{3}\right[\cup\left]-\dfrac{4}{3},-\dfrac{7}{9}\right[\cup]0,+\infty[$

Q(x) devant être défini , les intervalles sont toujours ouverts en une valeur interdite , que l'inégalité proposée soit large ou stricte !

$Q\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0$ car $-\dfrac{1}{2}\in\left]-\dfrac{7}{9},0\right]$; $Q(-5)<0$ car $-5\in\left]-\infty,-\dfrac{4}{3}\right[$