A propos de la dérivabilité

TP introductif avec la fonction racine carrée - énoncé

$$\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

- $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
- C_f : courbe représentant f dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour tout point M$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ du plan : $\boxed{M \in C_f \Leftrightarrow x_M \geq 0 \;\; et \;\; y_M = \sqrt{x_M}}$

Première Partie : une droite particulière pour C_f

Ouvrir Geogebra .

1) Tracer en couleur noire la représentation graphique C_f de la fonction racine carrée : Dans la **partie saisie taper y** = **sqrt**(**x**) puis **propriétés** : couleur → noire puis style → épaisseur du trait : 4

Régler la fenêtre d'observation : $\begin{cases} \textbf{axe (Ox)} : \text{min} : -0,25 \text{ max} : 5 \text{ avec une graduation de } 0,25 \\ \textbf{axe (Oy)} : \text{min} : -0,25 \text{ max} : 3 \text{ avec une graduation de } 0,25 \end{cases}$

2) 2-1 Créer un curseur $\mathbf{x_0}$ de couleur bleue (taper : x_0) avec le réglage suivant :

min : $0,1$; **max** : 4 ; **incrément** : $0,1$; **animation** : vitesse : $0,5$; **répéter** : par ordre croissant et **placer le curseur** x_0 sur 0,1

2-2 Placer le point $A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{x_0} \end{pmatrix}$ en saisissant : $A_0 = (x_0, f(x_0))$; placer le point P_0 situé sur l'axe (Oy) et d'ordonnée égale à $\dfrac{1}{2}\sqrt{x_0}$ puis mettre ces deux points en couleur bleue , style × et épaisseur 4 . Dans la partie saisie , taper $T = Droite[A_0, P_0]$ puis mettre la droite (A_0P_0) en couleur bleue avec une épaisseur de trait égale à 3 .

2-3 Sélectionner le curseur $\mathbf{x_0}$ (bouton gauche) **puis propriétés** animer le curseur $\mathbf{x_0}$ et observer la droite T . Comment pourrait-on qualifier la droite T par rapport à la courbe C_f ? Arrêter l'animation du curseur x_0 (**propriétés** → animer) .

Deuxième Partie : une étude graphique au voisinage du réel 1 ($x_0 = 1$)

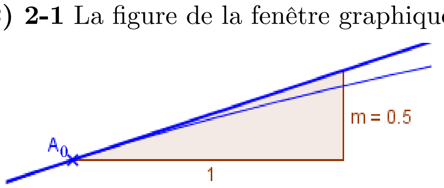
Mettre le curseur $\mathbf{x_0}$ sur la valeur 1 et régler la fenêtre graphique : $\begin{cases} \textbf{axe (Ox)} : \text{min} : -0,1 \text{ max} : 2,2 \text{ , graduation de } 0,1 \\ \textbf{axe (Oy)} : \text{min} : -0,1 \text{ max} : 2 \text{ , graduation de } 0,1 \end{cases}$

puis taper dans la partie saisie : $m = pente[T]$ puis **propriétés** → couleur → bleue

1) En utilisant la fenêtre Algèbre , donner les coordonnées de A_0 et P_0 , le coefficient directeur de T et une équation cartésienne de T

réponses : point A_0 : $A_0\Big(\qquad\Big)$; point P_0 : $P_0\Big(\qquad\Big)$; coefficient directeur de T : $m =$; une équation de T :

2) 2-1 La figure de la fenêtre graphique met en évidence un triangle . Quelle construction est associée à ce triangle ?



2-2 En utilisant les coordonnées de A_0 et de P_0 , déterminer le coefficient directeur de T puis l'équation réduite de la droite (A_0P_0) .

3) L'objet de cette question est de créer la droite T comme position " limite " d'une droite D_h contenant le point fixe A_0 et un point variable noté M_h , ce point variable étant situé sur C_f et ayant une abscisse $x_0 + h$ de plus en plus voisine du réel x_0 .

3-1 Créer un deuxième curseur de couleur rouge noté **h** avec le réglage suivant : **min** : -1 , **max** : 0 , **incrément** : $0,1$.

Placer le curseur h sur -1 .

3-2 Dans la partie saisie taper : $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ puis :

$\rightarrow$ taper $D_h = DemiDroite[M_h, A_0]$ puis **Afficher la trace** puis **propriétés** $\rightarrow$ couleur $\rightarrow$ rouge

$\rightarrow$ taper : $m_h = pente[D_h]$ puis **propriétés** $\rightarrow$ couleur $\rightarrow$ rouge

3-3 En utilisant les coordonnées de A_0 et de M_h , déterminer le coefficient directeur m_h de la droite D_h

$x_0 = 1$ donc : $m_h = \dfrac{< \Delta y >}{< \Delta x >} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{(1 + h) - 1} =$

3-4 En animant le curseur h de la valeur -1 à la valeur 0 par ordre croissant , examiner lorsque h prend des valeurs de plus en plus voisines du réel 0 (on dit encore que h tend vers 0) l'évolution des objets suivants :

$\rightarrow$ l'évolution de l'abscisse $1 + h$ du point M_h :

$\rightarrow$ l'évolution du point M_h :

$\rightarrow$ l'évolution de la droite (D_h) :

$\rightarrow$ l'évolution du coefficient directeur de la droite (D_h) noté aussi $m(h)$:

3-5 Pour la demi-droite D_h , changer $D_h = DemiDroite[M_h, A_0]$ en $D_h = DemiDroite[A_0, M_h]$. Pour le curseur h effectuer le réglage suivant : **min** : 0 , **max** : 1 , **incrément** : $0,1$. Placer le curseur sur 1 .

Constater ensuite la même évolution qu'en **3-4** en animant le curseur h de la valeur 1 à la valeur 0 par ordre décroissant .

Sauvegarder cette figure avec : Save As derivees figure 1

pour exprimer cette évolution de m(h) , on dit que le coefficient directeur $m(h)$ admet le réel $\dfrac{1}{2}$ comme limite lorsque h tend vers 0 et on note : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

3-6 h est un réel non nul tel que $1 + h$ soit positif . En utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{1 + h} - 1$, justifier : $m(h) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + h} + 1}$

$m(h) = \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} =$

En déduire $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) =$

Troisième Partie : une étude numérique au voisinage du réel $\frac{1}{4}$ $\left(x_0 = \frac{1}{4}\right)$

En préalable : Sauvegarder la figure 1 avec Save As derivees figure 2 . Rafraichir .

Mettre le curseur $\mathbf{x_0}$ sur $\frac{1}{4}$ avec $\begin{cases} \text{min : } 0 \\ \text{incrément : } 0,25 \end{cases}$; régler la fenêtre $\begin{cases} \textbf{axe (Ox)} : \text{min : } -0,1 \text{ max : } 1,5 \text{ , graduation de } 0,01 \\ \textbf{axe (Oy)} : \text{min : } -0,1 \text{ max : } 2 \text{ , graduation de } 0,1 \end{cases}$

Mettre le **min du curseur h** à $-0,25$ avec un incrément de $0,005$. **Dans le menu Options** , choisir **arrondi** puis **5 décimales**

1) 1-1 Dans la partie saisie taper : $g(x) = x/(2 * sqrt(x\_0)) + 0.5 * sqrt(x\_0)$. Que vaut $g(x)$? .

$sqrt(x\_0) = \ldots\ldots\ldots$ donc : $g(x) =$

1-2 En utilisant la fenêtre Algèbre , déterminer l'équation réduite de la droite T . Que représente T par rapport à g ?

2) Dans le menu Affichage , choisir le Tableur et reproduire la ligne 1 (pour la cellule A1 taper "x_o" puis enter)

On note P_h le point de T ayant pour abscisse $x_0 + h$.

puis colonne 1 :

cellule $A2$: taper $0,25$

cellule $A3$: taper $f(x_0)$

cellule $A4$: taper $\boxed{= f(A2)}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x_0	k	h=k*Δh	x_0+h	$f(x_0+h)$	m(h)	$g(x_0+h)$	pointM$_h$	pointP$_h$	$e(h) = y(M_h) - y(P_h)$
2	0.25	20	0.2	0.45	0.67082	0.8541	0.7	(0.45, 0.67082)	(0.45, 0.7)	-0.02918
3	$f(x_o)$									
4	0.5									
5	Δh									
6	0.01									

cellule $A5$: taper Δh (pour écrire Δ au clavier : <u>shift alt d</u>) ; cellule $A6$: taper $0,01$.

Pour obtenir la ligne 2 taper dans chaque cellule $A2$, $B2$, ..., $J2$ ce qui suit :

$A2$	$B2$	$C2$	$D2$	$E2$	$F2$	$G2$	$H2$	$I2$	$J2$
0.25	20	$= \$A\$6 * B2$	$= \$A\$2 + C2$	$= f(D2)$	$= (E2 - \$A\$4)/C2$	$= g(D2)$	$= (D2, E2)$	$= (D2, G2)$	$E2 - G2$

remarque : pour écrire B2 dans la cellule C2 on peut **:** $\rightarrow$ soit taper $B2$ $\rightarrow$ soit cliquer (bouton gauche) sur la cellule $B2$

colonne B :
$\rightarrow$ taper dans la cellule $B3$: $\boxed{= B2 - 1}$. Apparaît alors la valeur 19 qui est égale à la différence $20 - 1$

$\rightarrow$ Sélectionner la cellule $B3$ puis amener la pointeur de la souris sur le petit carré situé en bas et à droite de la cellule : le petit carré change alors de couleur et devient gris foncé . Appuyer sur le bouton gauche de la souris et tout en maintenant ce bouton appuyé , tirer vers le bas jusqu'à la cellule $B22$. On dit que la cellule $B3$ a été recopiée vers le bas .

colonnes C à J : sélectionner le bloc des cellules $C2$, $D2$, ... , $J2$ puis recopier vers le bas .

3) En utilisant le tableur examiner , lorsque h tend vers 0 , l'évolution des objets suivants :

$\rightarrow$ l'évolution de l'abscisse $x_0 + h$ du point M_h :

$\rightarrow$ l'évolution du point M_h :

$\rightarrow$ l'évolution du coefficient directeur de la droite (D_h) noté également $m(h)$:

donc : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) = \ldots$ avec : $m(h) = \dfrac{f\left(\frac{1}{4} + h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{h} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{4} + h} - \frac{1}{2}}{h}$

→ la différence $e(h)$ égale à $y_{M_h} - y_{P_h}$:

→ l'ordonnée du point M_h ($y_{M_h} = \sqrt{1+h}$) par rapport à celle du point P_h ($y_{P_h} = \frac{1}{2}h + 1$) :

→ comment pourrait-on qualifier l'ordonnée du point P_h par rapport à celle du point M_h pour h peu différent de 0 ? :

$y_{M_h} = f\left(\frac{1}{4} + h\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + h}$ et $g(x) = x + \frac{1}{4}$ entraîne : $y_{P_h} = g(\frac{1}{4} + h) =$

Donc pour $h \simeq 0$ on a : $e(h) \simeq 0$, $y_{M_h} \simeq y_{P_h}$ soit $\sqrt{\frac{1}{4} + h} \simeq h + \frac{1}{2}$. la fonction affine g , représentée par la droite tangente T est appelée l'approximation affine tangente de f au voisinage de $\frac{1}{4}$ et permet de calculer très facilement des valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs de x très voisines du réel $\frac{1}{4}$.

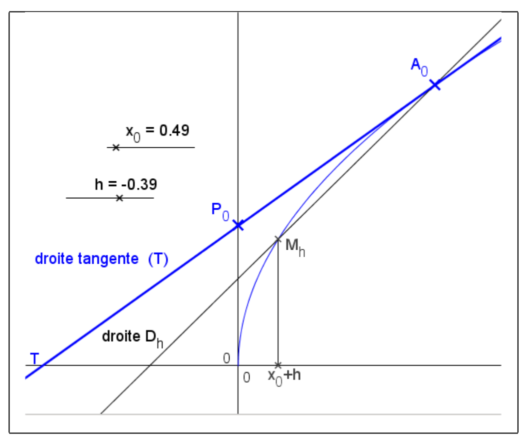
exemple : avec $h = 0.01$ on a : $\sqrt{\frac{1}{4} + h} = \sqrt{0.26}$; $h + \frac{1}{2} = 0.51$ et ainsi : $\sqrt{0.26} \simeq 0.51$

4) h réel non nul tel que $\frac{1}{4} + h$ soit positif . Justifier : $m(h) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + h} + \frac{1}{2}}$

$$m(h) = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + h} - \frac{1}{2}}{h} =$$

puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) =$

Quatrième Partie : Cas général au voisinage d'un réel x_0 strictement positif



On utilise les notations définies dans la Première Partie avec A_0 ayant une abscisse x_0 strictement positive . On peut construire une droite T tangente à C_f au point A_0 comme < position limite > des droites du type D_h lorsque h tend vers 0 . D_h et T ayant en commun le point A_0 elles se distinguent par leurs directions associées à leurs coefficients directeurs respectifs notés $m(h)$ et m . D'autre part : → $m(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$

→ Une équation de D_h est : $y = m(h) \times (x - x_0) + f(x_0)$

→ Une équation de T est : $y = m \times (x - x_0) + f(x_0)$

1) Quelle relation entre les coefficients directeurs $m(h)$ des droites du type D_h et le coefficient directeur m de la droite T pourrait traduire l'évolution de la droite D_h vers la droite T lorsque h tend vers 0 ?

2) 2-1 h est un réel non nul tel que $x_0 + h$ soit positif . Justifier : $m(h) = \dfrac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$

$$m(h) = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} =$$

2-2 En déduire m en fonction de x_0 :

3) On décide de noter $f\,'(x_0)$ (lu < f prime de x_0 >) le coefficient directeur m de la droite T .

En utilisant ce qui préçède pour la fonction racine carrée :

3-1 exprimer $f\,'(x_0)$ en fonction de x_0 : $f\,'(x_0) =$

3-2 donner l'équation réduite de T et justifier : (T) : $y = g(x)$

Pour résumer cette situation d'existence de la droite tangente T liée à la vérité de la propriété p suivante:
le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **admet une limite réelle lorsque h tend vers 0** notée : $f\,'(x_0) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

on utilise les vocabulaires suivants : ▶ f est dite dérivable en x_0

▶ la limite réelle $f\,'(x_0)$ est appelée le **nombre dérivé de f en** x_0

▶ **la droite T est appelée la droite tangente à** C_f **en son point** A_0 **d'abscisse** x_0 **(** A_0 **est commun à T et à** C_f **)**

équation réduite de la droite tangente T : $\begin{cases} T \text{ contient } A_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} \text{ et a pour coefficient directeur } f\,'(x_0) \\ \text{donc : } T : y = f\,'(x_0)\,[x - x_0] + f(x_0) \end{cases}$

En utilisant ces vocabulaires pour la fonction racine carrée on a donc :

▶ $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est ....et : $\boxed{\forall x_0 \in \,]0\,,+\infty\,[\,, f(x_0) = \sqrt{x_0} \Rightarrow f^{\,'}(x_0) = \quad}$

▶ la courbe C_f représentant $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ admet en tout point A_0 d'abscisse x_0 ($x_0 > 0$) une droite tangente T de coefficient directeur ; Un vecteur directeur de T est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \ldots\ldots\,\overrightarrow{j}$

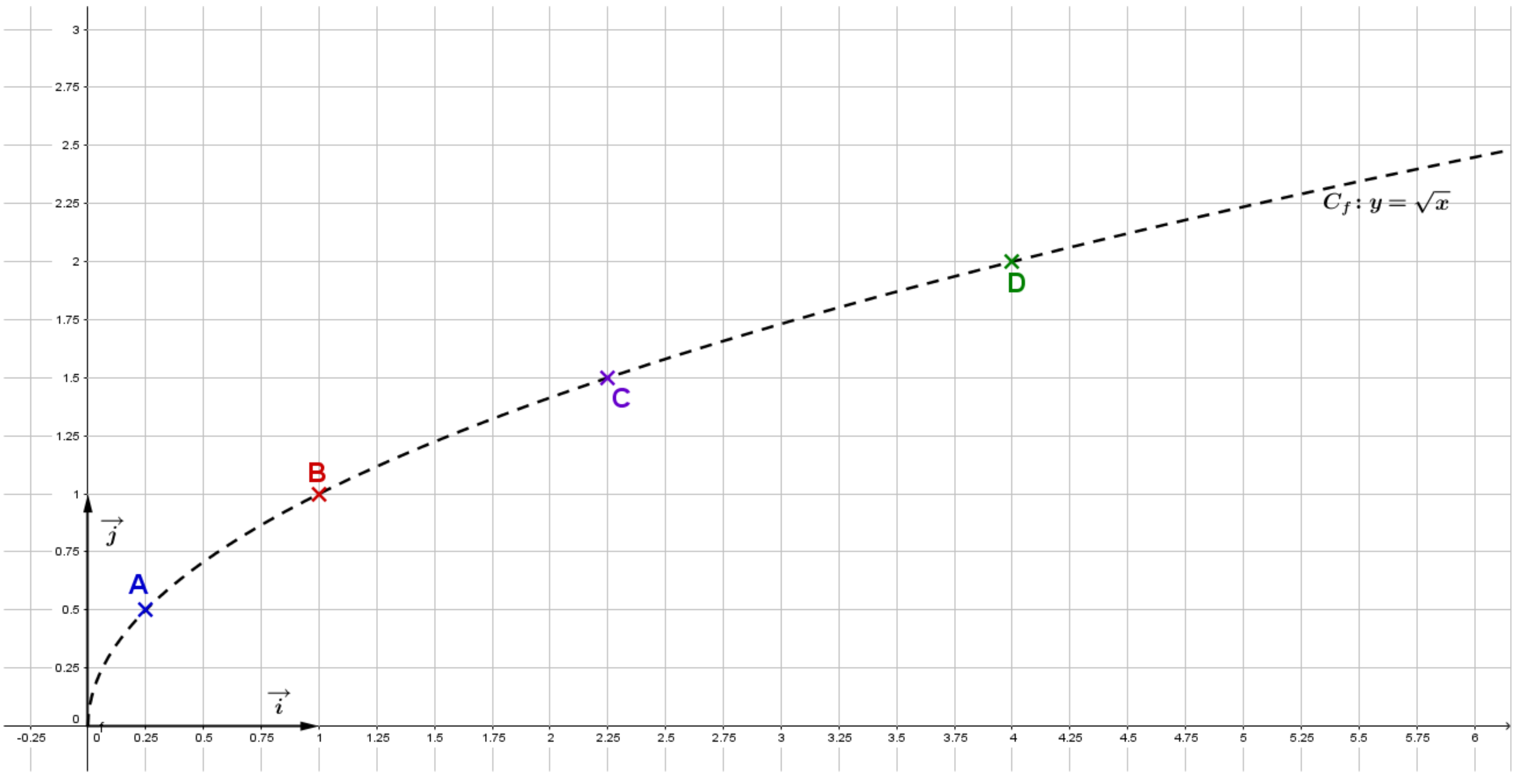
4) compléter le tableau suivant

$x_0 > 0$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
le point Mde C_f d'abscisse x_0 du type $A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{x_0} \end{pmatrix}$	$A\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$	$D\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$
coefficient directeur de la droite T_M tangente à C_f en son point M : $m = f\,'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$	$m_A = f\,'(\frac{1}{4})$ $m_A =$ $m_A =$	$m_B = f\,'(1)$ $m_B =$ $m_B =$	$m_C = f\,'(\frac{9}{4})$ $m_C =$ $m_C =$	$m_D = f\,'(4)$ $m_D =$ $m_D =$
un vecteur directeur de la droite tangente T_M : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \ldots\ldots\,\overrightarrow{j}$ ou $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \\ km \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_A}\begin{pmatrix} 1 \\ m_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_A} = \overrightarrow{i} +$	$\overrightarrow{u_B}\begin{pmatrix} 1 \\ m_B \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_B} =$	$\overrightarrow{u_C}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}m_C \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_C} =$	$\overrightarrow{u_D}\begin{pmatrix} 1 \\ m_D \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_D} =$

remarque : selon la valeur de m et les unités graphiques choisies pour la figure , le choix de $k\overrightarrow{u}$ permet de rendre la construction du vecteur directeur de T_M plus facile et plus précise .

5) Sur la figure suivante : Tracer les droites tangentes à C_f en chacun de ses points A , B , C et D .

(ne pas oublier de compléter la légende pour chacune des quatre droites tangentes tracées) .



Cinquième Partie : au voisinage du réel 0

En préalable : Sauvegarder la figure 2 , activer la figure 1 puis préparer la figure 3 avec : Save As derivees figure 3

Dans la partie Algèbre , garder $f(x)$, $g(x)$, le curseur x_0 , le point A_0 . Effacer le reste .

Dans la partie saisie , taper $m = f'(x_0)$, $G(x) = \text{Si}[x > x_0, g(x)]$. Ne plus afficher $f(x)$. Afficher $G(x)$ en couleur bleue .

m représente le coefficient directeur de la droite T tangente à C_f en son point A_0 et d'équation $y = g(x)$.

La demi-droite d'équation : $y = G(x)$ représente la partie de T constituée de ses points ayant une abscisse x vérifiant $x > x_0$

Effectuer les changements suivants : **Dans le menu Options** , choisir **arrondi** puis **10 décimales**

→ curseur x_0 : **min** : $0,000001$, **max** : $0,001$, **incrément** : $0,0001$ et placer le curseur x_0 sur $0,001$

→ graphique : • **Basique** : **xmin** : $-0,001$, **xmax** : $0,01$; **ymin** : $-0,001$, **ymax** : $0,1$

• **axe X** : distance : $0,001$ • **axe Y** : distance : $0,05$

1) Observations : Activer la trace de $G(x)$. Animer le curseur x_0 de la valeur $0,001$ à la valeur $0,000001$ par ordre décroissant .

Vers quelle position évolue la droite T lorsque x_0 tend vers 0 ?

Comment évolue son coefficient directeur m ?

2) h est un réel strictement positif . **1-1** Compléter $m(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

2-2 . En déduire le signe de $m(h)$:

2-3 → $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \sqrt{h} = 0$ et $\sqrt{h} > 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{h}} =$ ...... soit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} m(h) =$ ....

→ Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de f en 0 ?

→ Quel rôle l'axe (Oy) joue-t-il pour la courbe C_f ?

3) Compléter la figure ci-dessus en traçant la droite tangente à C_f en son point O d'abscisse 0 .