A propos de la dérivabilité

TP introductif avec la fonction racine carrée - corrigé

quelques rappels concernant la fonction racine carrée

$$\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

- $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
- C_f : courbe représentant f dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour tout point $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ du plan : $\boxed{M \in C_f \Leftrightarrow x_M \geq 0 \;\; et \;\; y_M = \sqrt{x_M}}$

Première Partie : une droite particulière pour C_f

1) Tracer en couleur noire la représentation graphique C_f de la fonction racine carrée : Dans la **partie saisie taper y = sqrt(x)** puis **propriétés** : couleur → noire puis style → épaisseur du trait : 4

Régler la fenêtre d'observation : $\begin{cases} \textbf{axe (Ox)} : \text{min} : -0,25 \text{ max} : 5 \text{ avec une graduation de } 0,25 \\ \textbf{axe (Oy)} : \text{min} : -0,25 \text{ max} : 3 \text{ avec une graduation de } 0,25 \end{cases}$

2) 2-1 Créer un curseur $\mathbf{x_0}$ de couleur bleue (taper : x_0) avec le réglage suivant :

min : $0,1$; **max** : 4 ; **incrément** : $0,1$; **animation** : vitesse : $0,5$; **répéter** : par ordre croissant et **placer le curseur** x_0 sur 0,1

2-2 Placer le point $A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{x_0} \end{pmatrix}$ en saisissant : $A_0 = (x_0, f(x_0))$; placer le point P_0 situé sur l'axe (Oy) et d'ordonnée égale à $\frac{1}{2}\sqrt{x_0}$ puis mettre ces deux points en couleur bleue , style × et épaisseur 4 . Dans la partie saisie , taper $T = Droite[A_0, P_0]$ puis mettre la droite (A_0P_0) en couleur bleue avec une épaisseur de trait égale à 3 .

2-3 Sélectionner le curseur $\mathbf{x_0}$ **puis propriétés** animer le curseur $\mathbf{x_0}$ et observer la droite T . Comment pourrait-on qualifier la droite T par rapport à la courbe C_f ? **On pourrait qualifier la droite T de droite tangente à la courbe C_f** .

Arrêter l'animation du curseur x_0 (**propriétés** → animer) .

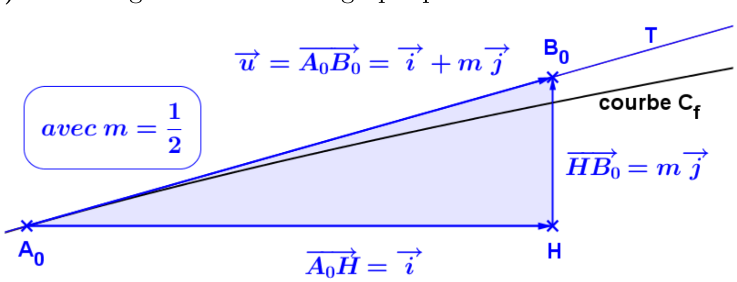
Deuxième Partie : une étude graphique au voisinage du réel 1 ($x_0 = 1$)

curseur $\mathbf{x_0}$ sur la valeur 1 ; **axe (Ox)** : min : -0,1 ; max : 2,2 ; graduation: 0,1 ; **axe (Oy)** : min : -0,1 ; max : 2 ; grad : 0,1 puis taper dans la partie saisie : $m = pente[T]$ puis **propriétés** → couleur → bleue

1) En utilisant la fenêtre Algèbre , donner les coordonnées de A_0 et P_0 , le coefficient directeur de T et une équation cartésienne de T

réponses : point A_0 : $A_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; point P_0 : $P_0\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; coefficient directeur de T : $m = \frac{1}{2}$; une équation de T : $\frac{1}{2}x - y = \frac{1}{2}$

2) 2-1 La figure de la fenêtre graphique met en évidence un triangle . Quelle construction est associée à ce triangle ?



Un des vecteurs directeurs de T est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ avec $m = \frac{1}{2}$.

La figure est associée à la construction du représentant du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ d'origine A_0 .

Dans le repère choisi on a :

$\vec{u} = \overrightarrow{A_0B_0} = 1\,\vec{i} + m\,\vec{j} = \overrightarrow{A_0H} + \overrightarrow{HB_0}$ avec $m = \frac{1}{2}$

2-2 En utilisant les coordonnées de A_0 et de P_0 , déterminer le coefficient directeur de T puis l'équation réduite de la droite (A_0P_0) .

$\rightarrow$ **coefficient directeur m de** T : T contient $A_0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $P_0\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc : $m=\dfrac{y_{A_0}-y_{P_0}}{x_{A_0}-x_{P_0}}=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-0}=\dfrac{1}{2}$

$\rightarrow$ **équation réduite de la droite** $T=(A_0P_0)$: Elle est de la forme : $y=mx+p$ avec $m=\dfrac{1}{2}$ donc $T: y=\dfrac{1}{2}x+p$.

D'autre part avec $P_0\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$: $P_0\in T\Leftrightarrow y_{A_0}=\dfrac{1}{2}x_{A_0}+p\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times 0+p\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=p$

Par conséquent : l'équation réduite de la droite T= (A_0P_0) est : $\boxed{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}}$.

3) L'objet de cette question est de créer la droite T comme position " limite " d'une droite D_h contenant le point fixe A_0 et un point variable noté M_h , ce point variable étant situé sur C_f et ayant une abscisse x_0+h de plus en plus voisine du réel x_0 .

3-1 Créer un **deuxième curseur** de couleur rouge noté **h** avec : **min** : -1 , **max** : 0 , **incrément** : $0,1$. Placer le curseur h sur -1 .

3-2 Dans la partie saisie taper : $M_h=(x_0+h,f(x_0+h))$ **puis 1)** taper $D_h=DemiDroite[M_h,A_0]$ puis **Afficher la trace** puis **propriétés** $\rightarrow$ couleur $\rightarrow$ rouge **puis 2)** taper : $m_h=pente[D_h]$ puis **propriétés** $\rightarrow$ couleur $\rightarrow$ rouge

3-3 En utilisant les coordonnées de A_0 et de M_h , déterminer le coefficient directeur m_h de la droite D_h

$x_0=1$ donc : $m_h=\dfrac{<\Delta y>}{<\Delta x>}=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{1+h}-\sqrt{h}}{h}$

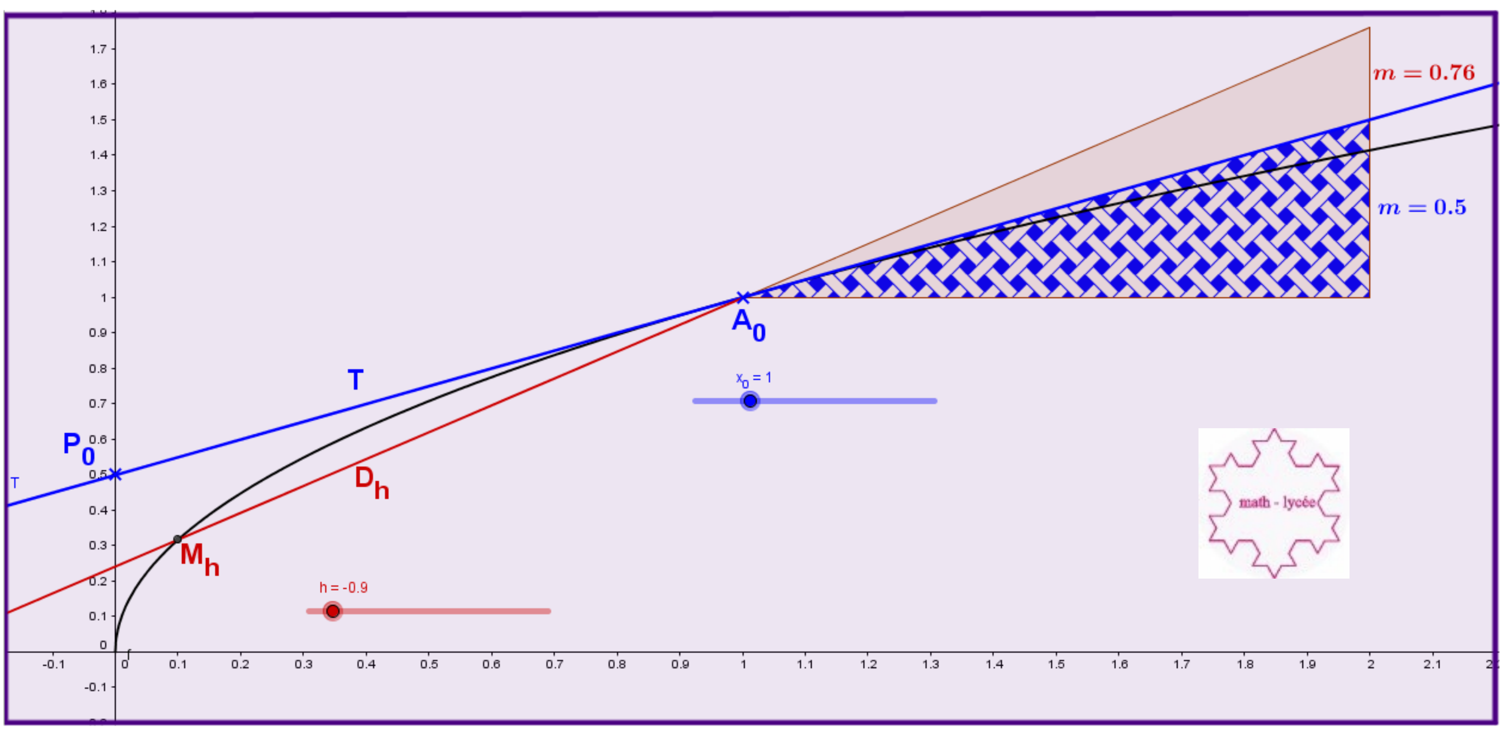
3-4 En animant le curseur h de la valeur -1 à la valeur 0 par ordre croissant , examiner lorsque h prend des valeurs de plus en plus voisines du réel 0 (on dit encore que h tend vers 0) l'évolution des objets suivants :

$\rightarrow$ **l'évolution de l'abscisse** $1+h$ **du point** M_h : elle tend vers 1 qui est l'abscisse de A_0

$\rightarrow$ **l'évolution du point** M_h : il se rapproche de plus en plus du point A_0

$\rightarrow$ **l'évolution de la droite** (D_h) : elle se rapproche de plus en plus de la position indiquée par la droite T

$\rightarrow$ **l'évolution du coefficient directeur de la droite** (D_h) **noté aussi** $m(h)$: il tend vers 0.5 qui est le coefficient directeur de T .



3-5 Changer $D_h=DemiDroite[M_h,A_0]$ en $D_h=DemiDroite[A_0,M_h]$. Pour le curseur h effectuer le réglage suivant : **min** : 0 **max** : 1 , **incrément** : $0,1$. Constater ensuite la même évolution qu'en **3-4** en animant le curseur h de la valeur 1 à la valeur 0 .

pour exprimer cette évolution de m(h) , on dit que le coefficient directeur $m(h)$ admet le réel $\frac{1}{2}$ comme limite lorsque h tend vers 0 et on note : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

3-6 h est un réel non nul tel que $1+h$ soit positif . En utilisant l'expression conjuguée de $\sqrt{1+h}-1$, justifier : $m(h) = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$

$$m(h) = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{\left[\sqrt{1+h}-1\right]\left[\sqrt{1+h}+1\right]}{h\left[\sqrt{1+h}+1\right]} = \frac{\left[\sqrt{1+h}\right]^2-[1]^2}{h\left[\sqrt{1+h}+1\right]} = \frac{1+h-1}{h\left[\sqrt{1+h}+1\right]} = \frac{h}{h\left[\sqrt{1+h}+1\right]} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

déduction : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

On retrouve bien par ce calcul de limite que le coefficient directeur de la droite variable D_h tend vers le coefficient directeur de la droite fixe T lorsque h tend vers 0 .

Troisième Partie : une étude numérique au voisinage du réel $\frac{1}{4}$ $\left(x_0 = \frac{1}{4}\right)$

En préalable : Sauvegarder la figure 1 avec Save As derivees figure 2 . Rafraichir .

Mettre le curseur x_0 sur $\frac{1}{4}$ avec $\begin{cases} \text{min : } 0 \\ \text{incrément : } 0,25 \end{cases}$; régler la fenêtre $\begin{cases} \textbf{axe (Ox)} : \text{min : } -0,1 \text{ max : } 1,5 \text{ , graduation de } 0,01 \\ \textbf{axe (Oy)} : \text{min : } -0,1 \text{ max : } 2 \text{ , graduation de } 0,1 \end{cases}$

Mettre le **min du curseur h** à $-0,25$ avec un incrément de $0,005$. **Dans le menu Options** , choisir **arrondi** puis **5 décimales**

1) 1-1 Dans la partie saisie taper : $g(x) = x/(2 * sqrt(x\_0)) + 0.5 * sqrt(x\_0)$. Que vaut $g(x)$? .

$sqrt(x\_0) = \sqrt{0.25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ donc : $g(x) = x/(2 * sqrt(x\_0)) + 0.5 * sqrt(x\_0)$ devient : $g(x) = x/(2 \times \frac{1}{2}) + 0.5 \times \frac{1}{2}$

puis : $g(x) = x/(1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ soit $\boxed{g(x) = x + \frac{1}{4}}$

1-2 En utilisant la fenêtre Algèbre , déterminer l'équation réduite de la droite T . Que représente T par rapport à g ?

La fenêtre Algèbre indique : $T : 0.25x - 0.25y = -0.0625$ et $0.25 = \frac{1}{4}$; $0.0625 = \frac{1}{16}$. D'autre part :

$$0.25x - 0.25y = -0.0625 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{16} \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y\right) = 4\left(-\frac{1}{16}\right) \Leftrightarrow x - y = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = y \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = g(x)$$

Par conséquent : $T : y = g(x)$. La droite T est donc la représentation graphique de la fonction affine g : $x \rightarrow x + \frac{1}{4}$

2) Dans le menu Affichage , choisir le Tableur et reproduire la ligne 1 (pour la cellule A1 taper "x_0" puis enter)

On note P_h le point de T ayant pour abscisse $x_0 + h$.

puis colonne 1 : taper

en cellule $A2$: $0,25$

en cellule $A3$: $f(x_0)$

en cellule $A4$: $\boxed{= f(A2)}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x_0	k	h=k*Δh	$x_0 + h$	$f(x_0+h)$	m(h)	$g(x_0+h)$	pointM$_h$	pointP$_h$	$e(h) = y(M_h) - y(P_h)$
2	0.25	20	0.2	0.45	0.67082	0.8541	0.7	(0.45, 0.67082)	(0.45, 0.7)	-0.02918
3	$f(x_0)$									
4	0.5									
5	Δh									
6	0.01									

cellule $A5$: taper Δh (pour écrire Δ au clavier : shift alt d) ; cellule $A6$: taper $0,01$.

Pour obtenir la ligne 2 taper dans chaque cellule $A2$, $B2$, ..., $J2$ ce qui suit et mettre la colonne I en bleu :

A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2	I2	J2
0.25	20	$= \$A\$6 * B2$	$= \$A\$2 + C2$	$= f(D2)$	$= (E2 - \$A\$4)/C2$	$= g(D2)$	$= (D2, E2)$	$= (D2, G2)$	$E2 - G2$

remarque : pour écrire B2 dans la cellule C2 on peut **:** → soit taper $B2$ → soit cliquer (bouton gauche) sur la cellule $B2$

colonne B : → taper dans la cellule $B3$: $\boxed{= B2 - 1}$. Apparaît alors la valeur 19 qui est égale à la différence $20 - 1$

→ Sélectionner la cellule $B3$ puis amener la pointeur de la souris sur le petit carré situé en bas et à droite de la cellule : le petit carré change alors de couleur et devient gris foncé . Appuyer sur le bouton gauche de la souris et tout en maintenant ce bouton appuyé , tirer vers le bas jusqu'à la cellule B22 . On dit que la cellule B3 a été recopiée vers le bas.

colonnes C à J : sélectionner le bloc des cellules $C2$, $D2$, ... , $J2$ puis recopier vers le bas .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x_0	k	h=k*Δh	$x_0 + h$	$f(x_0 + h)$	m(h)	$g(x_0 + h)$	pointM$_h$	pointP$_h$	$e(h) = y(M_h) - y(P_h)$
2	0.25	20	0.2	0.45	0.67082	0.8541	0.7	(0.45, 0.67082)	(0.45, 0.7)	-0.02918
3	$f(x_o)$	19	0.19	0.44	0.66332	0.85961	0.69	(0.44, 0.66332)	(0.44, 0.69)	-0.02668
4	0.5	18	0.18	0.43	0.65574	0.86524	0.68	(0.43, 0.65574)	(0.43, 0.68)	-0.02426
5	Δh	17	0.17	0.42	0.64807	0.87102	0.67	(0.42, 0.64807)	(0.42, 0.67)	-0.02193
6	0.01	16	0.16	0.41	0.64031	0.87695	0.66	(0.41, 0.64031)	(0.41, 0.66)	-0.01969
7		15	0.15	0.4	0.63246	0.88304	0.65	(0.4, 0.63246)	(0.4, 0.65)	-0.01754
8		14	0.14	0.39	0.6245	0.88928	0.64	(0.39, 0.6245)	(0.39, 0.64)	-0.0155
9		13	0.13	0.38	0.61644	0.8957	0.63	(0.38, 0.61644)	(0.38, 0.63)	-0.01356
10		12	0.12	0.37	0.60828	0.9023	0.62	(0.37, 0.60828)	(0.37, 0.62)	-0.01172
11		11	0.11	0.36	0.6	0.90909	0.61	(0.36, 0.6)	(0.36, 0.61)	-0.01
12		10	0.1	0.35	0.59161	0.91608	0.6	(0.35, 0.59161)	(0.35, 0.6)	-0.00839
13		9	0.09	0.34	0.5831	0.92328	0.59	(0.34, 0.5831)	(0.34, 0.59)	-0.0069
14		8	0.08	0.33	0.57446	0.9307	0.58	(0.33, 0.57446)	(0.33, 0.58)	-0.00554
15		7	0.07	0.32	0.56569	0.93836	0.57	(0.32, 0.56569)	(0.32, 0.57)	-0.00431
16		6	0.06	0.31	0.55678	0.94627	0.56	(0.31, 0.55678)	(0.31, 0.56)	-0.00322
17		5	0.05	0.3	0.54772	0.95445	0.55	(0.3, 0.54772)	(0.3, 0.55)	-0.00228
18		4	0.04	0.29	0.53852	0.96291	0.54	(0.29, 0.53852)	(0.29, 0.54)	-0.00148
19		3	0.03	0.28	0.52915	0.97168	0.53	(0.28, 0.52915)	(0.28, 0.53)	-0.00085
20		2	0.02	0.27	0.51962	0.98076	0.52	(0.27, 0.51962)	(0.27, 0.52)	-0.00038
21		1	0.01	0.26	0.5099	0.9902	0.51	(0.26, 0.5099)	(0.26, 0.51)	-0.0001
22		0	0	0.25	0.5	?	0.5	(0.25, 0.5)	(0.25, 0.5)	0

3) En utilisant le tableur examiner , lorsque h tend vers 0 , l'évolution des objets suivants :

→ **l'évolution de l'abscisse** $x_0 + h$ **du point** M_h : $x_0 + h$ tend vers 0.25 qui est la valeur de x_0

→ **l'évolution du point** M_h : M_h se rapproche de plus en plus du point A_0 $(0.25, 0.5)$

→ **l'évolution du coefficient directeur de la droite** (D_h) **noté aussi** $m(h)$: $m(h)$ tend vers 1 (le coefficient directeur de T)

donc : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m(h) = 1$ avec : $m(h) = \dfrac{f\left(\dfrac{1}{4} + h\right) - f\left(\dfrac{1}{4}\right)}{h} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{4} + h} - \dfrac{1}{2}}{h}$ (et donc à justifier : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{4} + h} - \dfrac{1}{2}}{h} = 1$)

→ **la différence** $e(h)$ **égale à** $y_{M_h} - y_{P_h}$: elle tend vers 0

→ **l'ordonnée du point** M_h **(** $y_{M_h} = \sqrt{1+h}$ **) par rapport à celle du point** P_h **(** $y_{P_h} = \frac{1}{2}h + 1$ **)** : y_{M_h} tend vers y_{P_h}

→ comment pourrait-on qualifier l'ordonnée du point P_h par rapport à celle du point M_h pour h peu différent de 0 ? : y_{M_h} et y_{P_h} étant de plus en plus voisins , **on pourrait qualifier y_{P_h} de valeur approchée de y_{M_h} lorsque h tend vers 0** .

$y_{M_h} = f\left(\dfrac{1}{4} + h\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + h}$ et $g(x) = x + \dfrac{1}{4}$ entraîne : $y_{P_h} = g(\dfrac{1}{4} + h) = \left(\dfrac{1}{4} + h\right) + \dfrac{1}{4} = h + \dfrac{1}{2}$

Donc pour $h \simeq 0$ on a : $e(h) \simeq 0$, $y_{M_h} \simeq y_{P_h}$ soit $\sqrt{\dfrac{1}{4} + h} \simeq h + \dfrac{1}{2}$.

La fonction affine g , représentée par la droite tangente T est appelée l'approximation affine tangente de f au voisinage de $\dfrac{1}{4}$ et permet de calculer très facilement des valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs de x très voisines du réel $\dfrac{1}{4}$.

exemple : avec $h = 0,01$ (h est voisin de 0) on a : $\sqrt{\dfrac{1}{4} + h} = \sqrt{0,26}$; $h + \dfrac{1}{2} = 0,51$ et ainsi : $\sqrt{0,26} \simeq 0,51$

4) h réel non nul tel que $\frac{1}{4}+h$ soit positif . Justifier : $m(h)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}}$

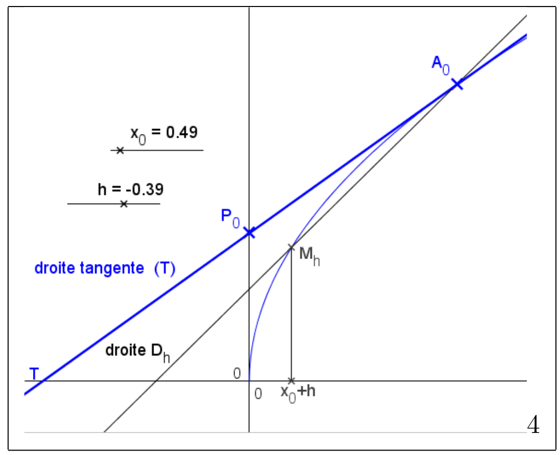
$$m(h)=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+h}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}-\frac{1}{2}\right]\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}\right]}{h\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}\right]}=\frac{\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}\right]^2-\left[\frac{1}{2}\right]^2}{h\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}\right]}=\frac{\frac{1}{4}+h-\frac{1}{4}}{h\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$m(h)=\frac{h}{h\left[\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}}\ .$$

D'où : $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} m(h)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+h}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+0}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{1}=1$

On retrouve bien l'évolution constatée précédemment pour le coefficient $m(h)$ lorsque h tend vers 0 : $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} m(h)=1$

Quatrième Partie : Cas général au voisinage d'un réel x_0 strictement positif



On utilise les notations définies dans la Première Partie avec A_0 ayant une abscisse x_0 strictement positive . On peut construire une droite T tangente à C_f au point A_0 comme < position limite > des droites du type D_h lorsque h tend vers 0 . D_h et T ayant en commun le point A_0 elles se distinguent par leurs directions associées à leurs coefficients directeurs respectifs notés $m(h)$ et m . D'autre part : $\rightarrow m(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$

$\rightarrow$ Une équation de D_h est : $y=m(h)\times(x-x_0)+f(x_0)$

$\rightarrow$ Une équation de T est : $y=m\times(x-x_0)+f(x_0)$

1) Quelle relation entre les coefficients directeurs $m(h)$ des droites du type D_h et le coefficient directeur m de la droite T pourrait traduire l'évolution de la droite D_h vers la droite T lorsque h tend vers 0 ? T et D_h ont le point A_0 en commun et définir une droite revient à connaître un de ses points et sa direction . Les directions de D_h et de T étant connues par leurs coefficients directeurs , **on peut traduire l'évolution de la droite D_h vers la droite T lorsque h tend vers 0 par :** $\lim\limits_{h\to 0} m(h)=m$

2) 2-1 h est un réel non nul tel que x_0+h soit positif . Justifier : $m(h)=\dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$

$$m(h)=\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\frac{\left[\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}\right]\left[\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right]}{h\left[\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right]}=\frac{\left[\sqrt{x_0+h}\right]^2-\left[\sqrt{x_0}\right]^2}{h\left[\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right]}=\frac{x_0+h-\ x_0}{h\left[\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right]}$$

$$m(h)=\frac{h}{h\left[\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right]}=\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

2-2 En déduire m en fonction de x_0 : $m=\lim\limits_{h\longrightarrow 0} m(h)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{\sqrt{x_0+0}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

3) On décide de noter $f\,'(x_0)$ le coefficient directeur m de la droite T ($f\,'(x_0)$ est lu f prime de x_0)

En utilisant ce qui préçède **pour la fonction racine carrée** : **3-1** exprimer **$f\,'(x_0)$ en fonction de x_0** : $\boxed{f\,'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}}$

3-2 Une équation de T est : $y=m\times(x-x_0)+f(x_0)$ avec $m=f\,'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ et $f(x_0)=\sqrt{x_0}$. Donc :

$T\,:\,y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\times(x-x_0)+\sqrt{x_0}$ puis $T\,:\,y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x-\dfrac{x_0}{2\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0}$ puis $T\,:\,y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x-\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}+\sqrt{x_0}$

Ainsi : $T\,:\,y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}$ soit $\boxed{T\,:\,y=g(x)\text{ car }g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\ x+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}}$

on retrouve ainsi l'expression de $g(x)$ définie à la page 03/7

pour résumer cette situation d'existence de la droite tangente T liée à la vérité de la propriété suivante :

le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **admet une limite réelle lorsque h tend vers 0** notée : $f\,'(x_0) = \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

on utilise les vocabulaires suivants :

∗ **f est dite dérivable en x_0**

∗ **la limite réelle $f\,'(x_0)$ est appelée le nombre dérivé de f en x_0**

∗ **la droite T est appelée la droite tangente à C_f en son point A_0 d'abscisse x_0 (A_0 est commun à T et à C_f)**

équation réduite de la droite tangente T : $\left\{\begin{array}{l} T \text{ contient } A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0)\end{pmatrix} \text{ et a pour coefficient directeur } f\,'(x_0) \\ \text{donc : } T\,:\, y = f\,'(x_0)\,[x-x_0] + f(x_0)\end{array}\right.$

En utilisant ces vocabulaires pour la fonction racine carrée on a donc :

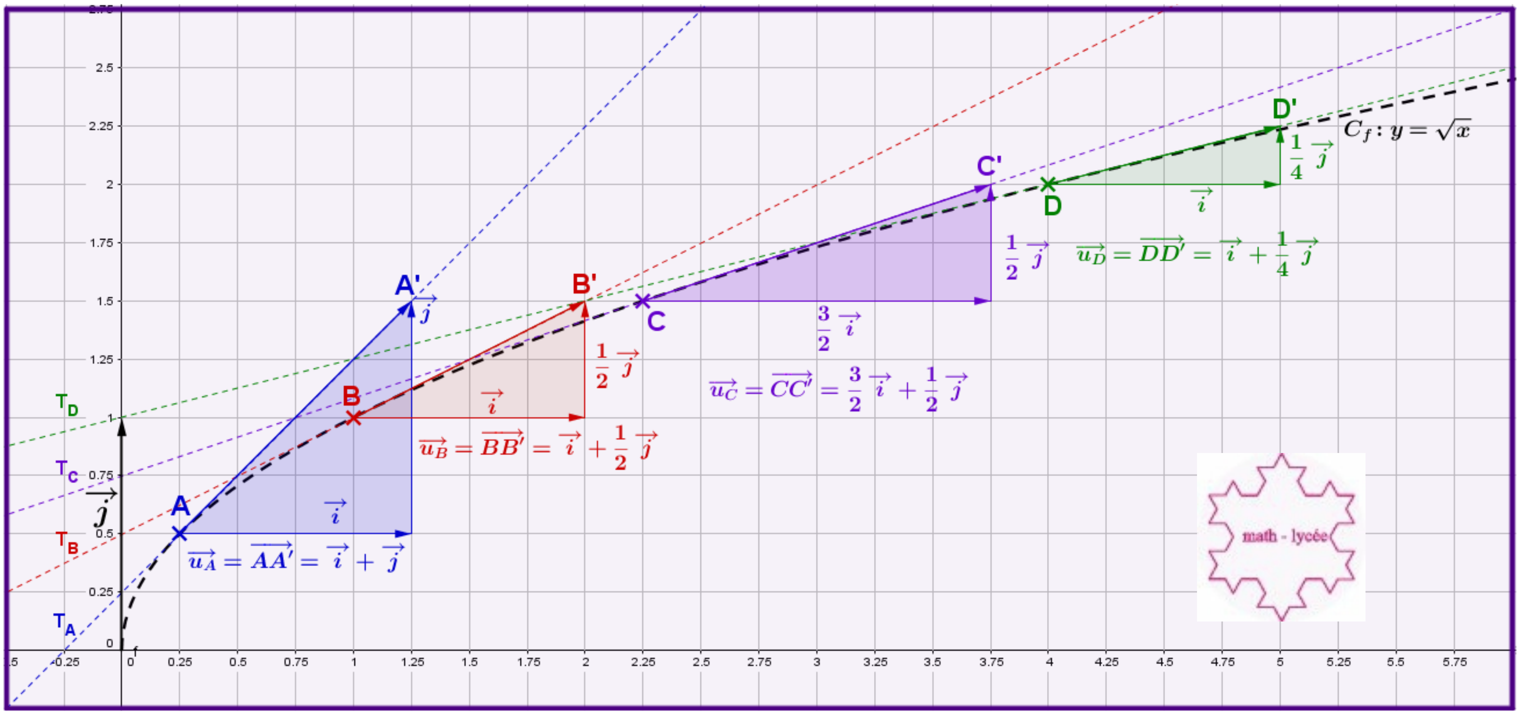
► $f\,:\,x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel x_0 strictement positif et : $\boxed{\forall x_0 \in \,]0\,,+\infty\,[\,,\, f(x_0) = \sqrt{x_0} \Rightarrow f\,'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}}$

► la courbe C_f représentant $f\,:\,x \longmapsto \sqrt{x}$ admet en tout point A_0 d'abscisse x_0 ($x_0 > 0$) une droite tangente T de coefficient directeur $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Un vecteur directeur de T est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\overrightarrow{j}$

4) compléter le tableau suivant

$x_0 > 0$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
le point M de C_f d'abscisse x_0 du type $A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{x_0}\end{pmatrix}$	$A\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$	$D\begin{pmatrix} 4 \\ 2\end{pmatrix}$
coefficient directeur de la droite T_M tangente à C_f en son point M d'abscisse x_0 : $m = f\,'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$	$m_A = f\,'(\frac{1}{4})$ $m_A = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}$ $m_A = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$	$m_B = f\,'(\frac{1}{4})$ $m_B = \dfrac{1}{2\sqrt{1}}$ $m_B = \dfrac{1}{2}$	$m_C = f\,'(\frac{9}{4})$ $m_C = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}$ $m_C = \dfrac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{1}{3}$	$m_D = f\,'(4)$ $m_D = \dfrac{1}{2\sqrt{4}}$ $m_D = \dfrac{1}{4}$
un vecteur directeur de la droite tangente T_M : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ ou $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \\ km\end{pmatrix}$ (selon la valeur de m , le choix de $k\overrightarrow{u}$ permet de rendre la construction du vecteur directeur de T_M plus facile et plus précise)	$\overrightarrow{u_A}\begin{pmatrix} 1 \\ m_A\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_A} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{u_B}\begin{pmatrix} 1 \\ m_B\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_B}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_B} = \overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{u_C}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}m_C\end{pmatrix}$ on a choisi $k = \frac{3}{2}$ $\overrightarrow{u_C}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_C}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_C} = \frac{3}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{u_D}\begin{pmatrix} 1 \\ m_D\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_D}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_D} = \overrightarrow{i} + \frac{1}{4}\overrightarrow{j}$

5) Sur la figure suivante : Tracer les droites tangentes à C_f en chacun de ses points A et B .



Cinquième Partie : au voisinage du réel 0

En préalable : Sauvegarder la figure 2 , activer la figure 1 puis préparer la figure 3 avec : Save As derivees figure 3

Dans la partie Algèbre , garder $f(x)$, $g(x)$, le curseur x_0 , le point A_0 . Effacer le reste .

Dans la partie saisie , taper $m = f'(x_0)$, $G(x) = \text{Si}[x > x_0, g(x)]$. Ne plus afficher $f(x)$. Afficher $G(x)$ en couleur bleue .

m représente le coefficient directeur de la droite T tangente à C_f en son point A_0 et d'équation $y = g(x)$.

La demi-droite d'équation : $y = G(x)$ représente la partie de T constituée de ses points ayant une abscisse x vérifiant $x > x_0$

Effectuer les changements suivants : **Dans le menu Options** , choisir **arrondi** puis **10 décimales**

- curseur x_0 : **min** : $0,000001$, **max** : $0,001$, **incrément** : $0,0001$ et placer le curseur x_0 sur $0,001$
- graphique : Basique : **xmin** : $-0,001$, **xmax** : $0,01$; **ymin** : $-0,001$, **ymax** : $0,1$; **axe X** : dist : $0,001$; **axeY** : dist : $0,05$

1) Observations : Activer la trace de $G(x)$. Animer le curseur x_0 de la valeur $0,001$ à la valeur $0,000001$ par ordre décroissant .

Vers quelle position évolue la droite T lorsque x_0 tend vers 0 ? T se rapproche de plus en plus de l'axe (Oy)

Comment évolue son coefficient directeur m ? En utillisant la partie algèbre , on voit que m augmente et prend des valeurs de plus en plus grandes .

2) h est un réel strictement positif . **1-1** Compléter $m(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{\left(\sqrt{h}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

2-2 . En déduire le signe de $m(h)$: $m(h) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Ayant $h > 0$ on déduit : $\sqrt{h} > 0$ puis : $\dfrac{1}{\sqrt{h}} > 0$ soit : $m(h) > 0$

2-3 → $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \sqrt{h} = 0$ et $\sqrt{h} > 0$ donc : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ soit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} m(h) = +\infty$

→ Que peut-on en déduire ? **avec $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} m(h)$ infinie (soit une limite non réelle) on déduit : f n'est pas dérivable en** 0

→ Quel rôle l'axe (Oy) joue-t-il pour la courbe C_f ? **l'axe (Oy) joue un rôle de droite tangente à C_f en son point $O\binom{0}{0}$**

3) Compléter la figure ci-dessus en traçant la droite tangente à C_f en son point O d'abscisse 0 .