# A propos de l'approximation affine d'une fonction



**problème ?** **Sans connaître explicitement l'expression de $f(x)$ , peut-on construire point par point une courbe donnant l'allure de la représentation graphique de $f$ ?**

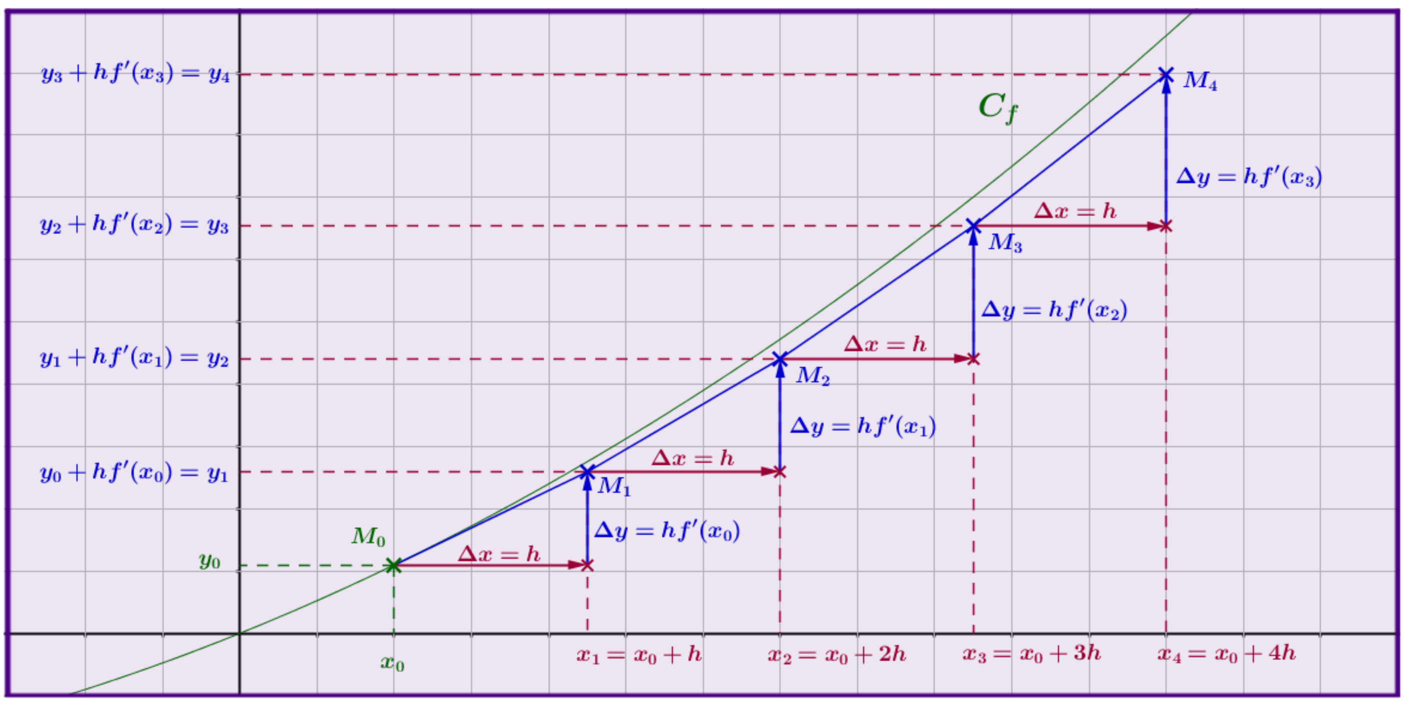
**L'objet de ce TP est de montrer que c'est possible dans la situation suivante : on connaît la fonction dérivée de $f$ et une valeur prise par $f$ en un réel $x_0$ tel que $f$ soit dérivable en $x_0$**

**L'outil :** Lorsque $f$ est dérivable en un réel $a$ , on peut , pour un réel $h$ voisin de 0 , calculer une valeur approchée de $f(a+h)$ en utilisant : $f(a+h) \simeq f(a) + h\,f'(a)$

**L'idée pour construire la courbe** : ne pouvant donner un tableau de valeurs exactes prises par $f$ (puisque $f(x)$ n'est pas connu ) , on construit un tableau de valeurs approchées de $f(x)$ et on trace la courbe contenant les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui ont pour niveau d'ordonnée la valeur approchée du niveau d'ordonnée $f(x)$ ( $y \simeq f(x)$ ) . On commence évidemment par placer le seul point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ connu appartenant à la représentation graphique de $f$ !

## La méthode utilisée , dite méthode d'Euler

Cette méthode permet de **construire pas à pas un tableau de valeurs approchées de f(x)** à partir de la seule valeur connue $f(x_0)$ . Pour réaliser cette méthode , on suppose que f est dérivable sur un intervalle I contenant tous les réels $x$ pour lesquels on utilise le calcul de $f'(x)$ .




**Départ :** on place $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0) \end{pmatrix}$ et on calcule la valeur du coefficient directeur $f'(x_0)$ de la droite $T$ tangente à $C_f$ en $M_0$ .
Avec $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ et un accroissement du niveau d'abscisse égal à : $\Delta x = h$ on obtient un accroissement du niveau d'ordonnée $\Delta y$ tel que : $\Delta y = \Delta x \times f'(x_0) = h \times f'(x_0)$ . On obtient ainsi le point $M_1$ de $T$ d'abscisse $x_0 + h$ et d'ordonnée $y_1$ avec : $y_1 = f(x_0) + h \times f'(x_0)$ soit : $M_1\begin{pmatrix} x_1 = x_0 + h \\ y_1 = y_0 + hf'(x_0) \end{pmatrix}$

En remplaçant a par $x_0$ dans l'outil $< f(a+h) \simeq f(a) + h\,f'(a) >$ , on obtient : $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h\,f'(x_0)$ soit : $f(x_0+h) \simeq y_1$

Autrement dit : pour h $\simeq 0$ , le point $M_1$ est très voisin du point de $C_f$ d'abcisse $x_0 + h$ et d'ordonnée $f(x_0+h)$ .

**On décide alors** que le segment $[M_0, M_1]$ situé sur la droite tangente $T$ à $C_f$ en $M_0$ est une représentation graphique voisine et donc < approchée > de la courbe $C_f$ sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ .

**On recommence le procédé** : à partir du point $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ , du coefficient directeur $f'(x_1)$ et d'un accroissement du niveau d'abscisse de $\Delta x = h$ on obtient un accroissement du niveau d'ordonnée $\Delta y$ tel que $\Delta y = \Delta x \times f'(x_1) = h \times f'(x_1)$ .

On obtient ainsi le point $M_2$ d'abscisse $x_1 + h$ et d'ordonnée $y_1 + h \times f'(x_1)$ soit $M_2 \begin{pmatrix} x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \\ y_2 = y_1 + hf'(x_1) \end{pmatrix}$

Pour $h \simeq 0$ , ce point $M_2$ est très voisin du point de $C_f$ d'abcisse $x_0 + 2h$ et d'ordonnée $f(x_0 + 2h)$ . En effet :

en remplaçant $a$ par $x_0 + h$ dans l'outil $< f(a + h) \simeq f(a) + h\, f'(a) >$ , on obtient : $f((x_0 + h) + h) \simeq f(x_0 + h) + h\, f'(x_0 + h)$

Or : $f((x_0 + h) + h) = f(x_0 + 2h)$ , $f(x_0 + h) \simeq y_1$ , $f'(x_0 + h) = f'(x_1)$ . Donc : $f(x_0 + 2h) \simeq y_1 + h\, f'(x_1)$ soit : $f(x_0 + 2h) \simeq y_2$ .

**On décide alors** que $[M_0, M_1] \cup [M_1, M_2]$ est une représentation approchée de la courbe $C_f$ sur l'intervalle $[x_0, x_0 + 2h]$ .

**etc. . . . En répétant ce procédé** , on construit ensuite de manière itérative et avec un pas de $h$ (valeur de tous les $\Delta x$ ) , une suite de points $M_3$ , $M_4$ , $M_5$ , . . . , $M_{i-1} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix}$ , $M_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ les coordonnées du point $M_i$ étant calculées à partir de celles du point $M_{i-1}$ avec $\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h \\ y_i = y_{i-1} + h\, f'(x_{i-1}) \end{cases}$ . La réunion des segments $[M_0 M_1]$ , $[M_1 M_2]$ , $[M_2 M_3]$ ,. . . , $[M_{i-1} M_i]$ ,. . . permet d'approcher de façon satisfaisante la représentation graphique de $f$ en prenant un pas $h$ très proche de 0 .

Les ordonnées des points $M_3$ , $M_4$ , $M_5$ , . . . , $M_i$ , $M_{i+1}$ , . . .etc . . . , donnent alors des valeurs approchées des images $f(x_0 + 3h)$ , $f(x_0 + 4h)$ , $f(x_0 + 5h)$ , . . . , $f(x_0 + (i - 1)h)$ , $f(x_0 + ih)$ , . . .etc . . . . Le calcul des coordonnées de ces points se programme facilement en utilisant les coordonnées du point $M_0$ situé sur $C_f$ et le système suivant :

$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h = x_0 + ih \\ y_i = y_{i-1} + h\, f'(x_{i-1}) \end{cases}$ ( qui permet de calculer les coordonnées de $M_i$ avec celles du point précédent $M_{i-1}$ ) .

## Première partie : l'importance du choix de la valeur du pas

Dans cette partie , $f$ est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ . On donne $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ ; $x_0 = 0$ , on a donc : $f(x_0) = f(0) = 0$ ; $f'(x) = x - 1$ .

**Question 1 : On utilise Geogebra** Le but est de construire un tableau de valeurs approchées de $f(x)$ et un tracé approché de la courbe $C_f$ en utilisant trois valeurs différentes de pas : un pas $h$ de 0.5 , un pas $k$ de 0.25 et un pas $\Delta x$ de 0.1 .

**Ouvrir Geogebra** : → **Dans la partie Algèbre** : saisir $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ puis : $F(x) = Si[0 < x < 3, f(x)]$ puis : $f'(x) = x - 1$.

Afficher $f$ en traits pointillés épaisseur 3 et couleur vert foncé . Afficher $F$ en vert foncé trait plein épaisseur 3 . Ne pas afficher $f'$ .

→ **Afficher le tableur** puis recopier ce qui est ci-contre .

1^er^ tracé : en mauve avec un pas $h$ de 0.5

2^ème^ tracé : en rouge avec un pas $k$ de 0.25

3^ème^ tracé : en bleu avec un pas $\Delta x$ de 0.1

Tableur

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_0$ | i | $x_i = x_0 + ih$ | $y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$ | point $E_i(x_i, y_i)$ | | | $\Delta x$ | i | $x_i = x_0 + i\Delta x$ | $y_i = y_{i-1} + \Delta x * f'(x_{i-1})$ | point $H_i(x_i, y_i)$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | (0, 0) | | | 0.1 | 0 | 0 | 0 | (0, 0) |
| 3 | $y_0$ | B2+1 | $C$2+B3*$A$6 | D2 + $A$6* f'(C2) | (C3,D3) | | | | | | | |
| 4 | 0 | 2 | | | | | | | | | | |
| 5 | h | 3 | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.5 | 4 | | | | | | | | | | |
| 7 | | 5 | | | | | | | | | | |
| 8 | | 6 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | |
| 11 | k | i | $x_i = x_0 + ih$ | $y_i = y_{i-1} + kf'(x_{i-1})$ | point $G_i(x_i, y_i)$ | | | | | | | |
| 12 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | (0, 0) | | | | | | | |

**1-1** Après avoir recopié vers le bas la colonne des indices $i$ ( avec un pas de 0.5 , $x_0 + ih$ vaut 3 pour un indice $i$ égal à 6 ) , vérifier que l'on obtient le tableau ci dessous .



| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x0 | i | $x_i = x_0 + ih$ | $y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$ | point $E_i(x_i, y_i)$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | (0, 0) |
| 3 | y0 | 1 | 0.5 | -0.5 | (0.5, -0.5) |
| 4 | 0 | 2 | 1 | -0.75 | (1, -0.75) |
| 5 | h | 3 | 1.5 | -0.75 | (1.5, -0.75) |
| 6 | 0.5 | 4 | 2 | -0.5 | (2, -0.5) |
| 7 | | 5 | 2.5 | 0 | (2.5, 0) |
| 8 | | 6 | 3 | 0.75 | (3, 0.75) |

Sélectionner le bloc des points $E_i$ puis propriétés :

→ ne pas afficher l'étiquette

→ style taille du point 3 ; style du point ×

Compléter le graphique en traçant en mauve et sans étiquette les segments $[E_2E_3]$ , $[E_3E_4]$ , ..... , $[E_7E_8]$ .

On obtient ainsi un premier tracé approché de la courbe $C_f$ sur l'intervalle $[0, 3]$ , en utilisant un pas $h$ égal à 0.5 .

**1-2** S'inspirer de la question **1-1** pour obtenir , avec un deuxième pas $k$ égal à 0.25 , un deuxième tracé approché ( couleur : rouge ) de la courbe $C_f$ sur l'intervalle $[0, 3]$ .

**1-3** S'inspirer de la question **1-1** pour obtenir , avec un troisième pas $\Delta x$ égal à 0.1 , un troisième tracé approché ( couleur : bleu ) de la courbe $C_f$ sur l'intervalle $[0, 3]$ .

**1-4** En observant les trois tracés approchés de $C_f$ que constate-ton ?

**Sauvegarder ce travail : MethodeEulerFigure1**

## Question 2 : On utilise Algobox

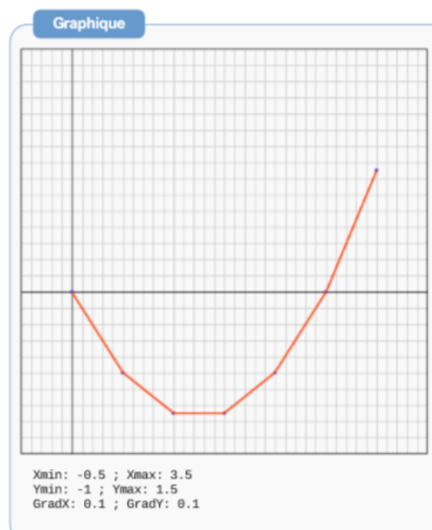
Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y2 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  y0 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE y0
  h PREND_LA_VALEUR (b-a)/n
  x1 PREND_LA_VALEUR a
  y1 PREND_LA_VALEUR y0
  TRACER_POINT (x1,y1)
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    y2 PREND_LA_VALEUR y1+h*F1(x1)
    x2 PREND_LA_VALEUR a+i*h
    AFFICHER "(x,y)=("
    AFFICHER x2
    AFFICHER ","
    AFFICHER y2
    AFFICHER ")"
    TRACER_POINT (x2,y2)
    TRACER_SEGMENT (x1,y1)->(x2,y2)
    x1 PREND_LA_VALEUR x2
    y1 PREND_LA_VALEUR y2
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=x-1
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
Entrer n : 6
Entrer a : 0
Entrer b : 3
Entrer y0 : 0
(x,y)=(0.5,-0.5)
(x,y)=(1,-0.75)
(x,y)=(1.5,-0.75)
(x,y)=(2,-0.5)
(x,y)=(2.5,0)
(x,y)=(3,0.75)
***Algorithme terminé***
```




**2-1** En utilisant les résultats ci-dessus , expliquer ce que fait l'algorithme .

Etait-il nécessaire de déclarer toutes ces variables ?

**2.2** Ouvrir Algobox et recopier cet algorithme . Pour **dessiner dans un repère** choisir : pour $X$ : min :$-0.5$ ; max : 3.5 ; graduation : 0.1

pour $Y$ : min : $-1$ ; max : 1.5 ; graduation : 0.1

**2-3** En choisissant bien la valeur de $n$ , retrouver le tracé approché de $C_f$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec un deuxième pas égal à 0.25 .

**2-4** En choisissant bien la valeur de $n$ , retrouver le tracé approché de $C_f$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec un troisième pas égal à 0.1 .

**2-5** En conservant les mêmes variables , écrire un **nouvel algorithme** en remplaçant la boucle **Pour** par un **Tant que .....Faire .**

# Deuxième partie : Deux fonctions du programme de TS

## Question 1 : la fonction $f$ est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(1)=0$ et $\forall x \in ]0,+\infty[$ , $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 

Au niveau $1^{ère}S$ , on connaît la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ mais on ne connaît pas encore de fonction $f$ qui a pour fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ . La méthode d'Euler permet d'obtenir un tracé approché d'une telle fonction $f$ en décidant :

$$\text{f définie sur } ]0,+\infty[ \text{ et vérifiant : } f(1)=0 \text{ et } \forall x \in ]0,+\infty[\ ,\ f'(x)=\frac{1}{x}$$

Utiliser à nouveau Geogebra et **ouvrir** le programme MethodeEulerFigure1 puis **Sauvegarder sous** MethodeEulerFigure2 .

**1-1** Effectuer les changements suivants **:**

→ Tableur : garder les titres du premier tableau et effacer toutes les données numériques et recopier ce qui est ci-dessous

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_0$ | i | $x_i = x_0 + ih$ | $y_i = y_{i-1} + hf'(x_{i-1})$ | point $E_i(x_i, y_i)$ | segment$[E_iE_{i+1}]$ | | k | i | $x_i = x_0 + ik$ | $y_i = y_{i-1} + k * f'(x_{i-1})$ | point $F_i(x_i, y_i)$ | segment$[F_iF_{i+1}]$ |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | (1, 0) | | | -0.1 | 0 | 1 | 0 | (1, 0) | |
| 3 | $y_0$ | =B2+1 | =$C$2+B3*$A$6 | =D2+$A$6*f'(C2) | =(C3,D3) | =Segment[E2,E3] | | | | | | | |
| 4 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | h | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.1 | | | | | | | | | | | | |

→ Partie Algèbre : Changer $f'(x)=x-1$ en $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ; effacer $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ et $F(x)=Si[0<x<3, f(x)]$ .

**1-2** colonnes B à F du Tableur : Réaliser un tableau de valeurs permettant d'obtenir un tracé approché de $C_f$ sur l'intervalle $[1,3]$ avec un pas $h$ de 0.1 . Sélectionner le bloc des points $E_i$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : mauve → style : taille du point 3 ; style du point × . Sélectionner le bloc des segments $[E_iE_{i+1}]$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : mauve

**1-3** colonnes I à M du Tableur : Compléter la Ligne 3 du tableur de manière analogue aux définitions des cellules B3 à F3 . Réaliser ensuite un tableau de valeurs permettant d'obtenir sur l'intervalle $[0.1,1]$ un tracé approché de $C_f$ avec un pas $k$ négatif de $-0.1$ . Sélectionner le bloc des points $F_i$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → style taille du point 3 ; style du point × → couleur : rouge . Sélectionner le bloc des segments $[F_iF_{i+1}]$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : rouge

La réunion des segments $[E_iE_{i+1}]$ et $[F_iF_{i+1}]$ permet d'obtenir un tracé approché de $C_f$ sur l'intervalle $[0.1,3]$ avec un pas de 0.1 .

**1-4** Ecrire une équation de la droite $T$ tangente à $C_f$ en son point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0)\end{pmatrix}$ soit $M_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ puis compléter le graphique précédent en saisissant l'équation réduite de $T$ . Sauvegarder votre travail .

## quelques remarques :

Vous venez de donner une allure approchée de la courbe représentative de la fonction appelée **fonction logarithme népérien** .

Cette fonction , qui est étudiée en TS , correspond à la touche $\boxed{ln}$ de la calculatrice .

Cette fonction est définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ . L'image d'un réel $x$ strictement positif par la fonction logarithme népérien est notée $ln(x)$ ou encore $lnx$.

La fonction logarithme népérien possède , par exemple , la particularité de transformer une multiplication en une addition car elle vérifie cette propriété fondamentale :

$$\boxed{\text{pour tous réels a et b strictement positifs : } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$$

Encore une **situation nouvelle** qui n'est pas au programme de $1^{ère}S$ : on connaît une valeur prise par $f$ et une relation liant la fonction $f$ avec sa fonction dérivée $f'$.

La méthode d'Euler permet d'obtenir , par exemple , un tracé approché de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}\,, f'(x) = f(x) \end{cases}$

**2-1** : Que devient la relation : $y_i = y_{i-1} + h\, f'(x_{i-1})$ pour la fonction $f$ considérée ? Que peut-on dire de la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ?

**2-2** Utiliser à nouveau Geogebra et **ouvrir** le programme MethodeEulerFigure2 puis **Sauvegarder sous** MethodeEulerFigure3 . Effectuer les changements suivants **:**

→ Tableur : changer $A2$ en 0 et $A4$ en 1 ; effacer toutes les données numériques et recopier ce qui est ci-dessous

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x0 | i | $x_i = x_0 + ih$ | $y_i =$ .................? | point $E_i(x_i, y_i)$ | segment$[E_iE_{i+1}]$ | | k | i | $x_i = x_0 + ik$ | $y_i =$ .................? | point $F_i(x_i, y_i)$ | segment$[F_iF_{i+1}]$ |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | (0, 1) | | | -0.1 | 0 | 0 | 1 | (0, 1) | |
| 3 | y0 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | h | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.1 | | | | | | | | | | | | |

En utilisant la question **2-1** , compléter les cellules D1 et K1 : $y_i =$ ............

**2-3** colonnes B à F du Tableur : Réaliser un tableau de valeurs permettant d'obtenir un tracé approché de $C_f$ sur l'intervalle $[0, 2]$ avec un pas $h$ de 0.1 . Sélectionner le bloc des points $E_i$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : mauve → style : taille du point 3 ; style du point × . Sélectionner le bloc des segments $[E_iE_{i+1}]$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : mauve

**2-4** colonnes I à M du Tableur : Compléter la Ligne 3 du tableur de manière analogue aux définitions des cellules B3 à F3 . Réaliser ensuite un tableau de valeurs permettant d'obtenir sur l'intervalle $[-2, 0]$ un tracé approché de $C_f$ avec un pas $k$ négatif de $-0.1$ . Sélectionner le bloc des points $F_i$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → style taille du point 3 ; style du point × → couleur : rouge . Sélectionner le bloc des segments $[F_iF_{i+1}]$ puis propriétés : → ne pas afficher l'étiquette → couleur : rouge

La réunion des segments $[E_iE_{i+1}]$ et $[F_iF_{i+1}]$ permet d'obtenir un tracé approché de $C_f$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ avec un pas de 0.1 .

**2-5** Ecrire une équation de la droite $T$ tangente à $\mathrm{C}_f$ en son point $\mathrm{M}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 = f(x_0) \end{pmatrix}$ soit $\mathrm{M}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis compléter le graphique précédent en saisissant l'équation réduite de $T$ . Sauvegarder votre travail .

## quelques remarques :

Vous venez de donner une allure approchée de la courbe représentative de la fonction appelée **fonction exponentielle** .

Cette fonction , également étudiée en $TS$ , est définie sur $\mathbb{R}$ et attribue à tout réel $x$ une image notée $exp(x)$ ou $\mathrm{e}^x$ qui correspond à la touche $e^x$ $\left(shift\ \boxed{ln}\right)$ de la calculatrice .

Cette fonction a la particularité de transformer une addition en une multiplication car elle vérifie cette propriété fondamentale :

$$\boxed{\text{pour tous réels a et b : } \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$