Formules d'addition - Equations trigonométriques

formules dites formules d'addition

lignes de $a+b$ en fonction de celles de a et b

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

lignes de $a-b$ en fonction de celles de a et b

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

formules dites de duplication

lignes de 2a en fonction de celles de a

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

lignes de x en fonction de celles de sa moitié $\frac{x}{2}$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$
$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \qquad et \qquad \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

deux formules dites de linéarisation

le carré de cosx en fonction de cos2x

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

le carré de sinx en fonction de cos2x

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

des outils et des méthodes pour résoudre des équations trigonométriques

Dans la suite : l'ensemble solution de l'équation (E) à résoudre est noté S , P(X) est un polynôme

1) l'équation est du type (E_1) : $x \in \mathbf{R}$, cosx = k

1-1 Avec $k \notin [-1,1]$, l'équation n'admet pas de solution :

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x \in [-1,1]$ et $k \notin [-1,1] \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \cos x \neq k$

1-2 Avec $k \in [-1,1]$, reconnaître k comme le cosinus d'un réel a ($k = \cos a$) pour obtenir : $x \in S \Leftrightarrow \cos x = \cos a$

puis déterminer x en utilisant le théorème :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \cos x = \cos a \Leftrightarrow x \equiv a\,[2\pi]\ ou\ x \equiv (-a)\,[2\pi]$

2) l'équation est du type (E_2) : $x \in \mathbf{R}$, sinx = k

1-1 Avec $k \notin [-1,1]$, l'équation n'admet pas de solution :

$(\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \in [-1,1])$ et $k \notin [-1,1] \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sin x \neq k$

1-2 Avec $k \in [-1,1]$, reconnaître k comme le sinus d'un réel a ($k = \sin a$) pour obtenir : $x \in S \Leftrightarrow \sin x = \sin a$

puis déterminer x en utilisant le théorème :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \sin x = \sin a \Leftrightarrow x \equiv a\,[2\pi]\ ou\ x \equiv (\pi - a)\,[2\pi]$

3) l'équation est du type (E_3) : $x \in \mathbf{R}$, P (cosx) = 0

méthode donnée pour : $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\rightarrow x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 + 3X + 1 = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$ (changement de variable)

$\rightarrow$ rechercher les éventuelles racines de $P(X) = 2X^2 + 3X + 1$

$\rightarrow$ retour en x : avec X_1 et X_2 racines de P(X) on a :

$x \in S \Leftrightarrow \cos x = X_1$ ou $\cos x = X_2$

puis utiliser la démarche donnée pour (E_1) .

4) l'équation est du type (E_4) : $x \in \mathbf{R}$, P (sinx) = 0

méthode donnée pour : $x \in \mathbb{R}$, $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

$\rightarrow x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 - 3X - 2 = 0 \\ X = \sin x \end{cases}$ (changement de variable)

$\rightarrow$ rechercher les racines de $P(X) = 2X^2 - 3X - 2$

$\rightarrow$ retour en x : avec X_1 et X_2 racines de P(X) on a :

$x \in S \Leftrightarrow \sin x = X_1$ ou $\sin x = X_2$

puis utiliser la démarche donnée pour (E_2) .

5) l'équation utilise deux expressions X et Y de la variable x du type ax+b et une des égalités suivantes :

$\cos X = \cos Y$ **ou** $\sin X = \sin Y$ **ou** $\cos X = -\cos Y$ **ou** $\sin X = -\sin Y$ **ou** $\cos X = \sin Y$ **ou** $\cos X = \sin Y$

5-1 avec (E_5) : $x \in \mathbf{R}$, cosX = cosY

$\rightarrow$ utiliser le théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (-Y)\,[2\pi]$

$\rightarrow$ puis déterminer x en utilisant : $(ax + b \equiv k\,[2\pi] \Leftrightarrow ax \equiv (k-b)\,[2\pi])$ et (avec $a \neq 0$, $ax \equiv c\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{c}{a}\left[\frac{2\pi}{a}\right]$

5-2 avec (E_6) : $x \in \mathbf{R}$, sinX = sinY

$\rightarrow$ utiliser le théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \sin X = \sin Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (\pi - Y)\,[2\pi]$

$\rightarrow$ puis déterminer x en utilisant : $(ax + b \equiv k\,[2\pi] \Leftrightarrow ax \equiv (k-b)\,[2\pi])$ et (avec $a \neq 0$, $ax \equiv c\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{c}{a}\left[\frac{2\pi}{a}\right]$

5-3 avec (E_5) : $x \in \mathbf{R}$, sinX = - sinY

$\rightarrow$ se ramener à une égalité de deux sinus : $-\sin Y = \sin(-Y)$ donc : $x \in S \Leftrightarrow \sin X = \sin(-Y)$

$\rightarrow$ puis démarche donnée pour (E_6)

5-4 avec (E_8) : $x \in \mathbf{R}$, cosX = - cosY ou (E_9) : $x \in \mathbf{R}$, cosX = sinY ou (E_{10}) : $x \in \mathbf{R}$, cosX = - sinY

$\rightarrow$ se ramener à une égalité de deux cosinus : avec : $-\cos Y = \cos(\pi - Y)$ **ou** : $\sin Y = \cos(\frac{\pi}{2} - Y)$ **ou** : $-\sin Y = \cos(\frac{\pi}{2} + Y)$

$\rightarrow$ puis démarche donnée pour (E_5)