Trigo - corrigés feuille d'exercices 1

arcs et angles dans un plan orienté

En préalable : des vocabulaires , des outils dans un plan orienté

1) **un triangle ABC est dit de sens direct** lorsque les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ associés aux sommets du triangle ont des mesures principales positives .

→ En utilisant le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC , pour aller de A vers B puis de B vers C puis de C vers A on se déplace sur $\mathcal{C}$ dans le sens direct .

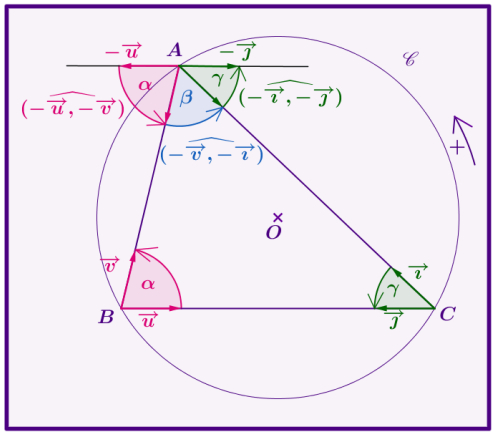
→ Les arcs orientés indiquant les mesures α , β , γ des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ sont orientés dans le sens direct .

→ $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$, $(\widehat{-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}})$ sont de même mesure α ; $(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}})$, $(\widehat{-\overrightarrow{i},-\overrightarrow{j}})$ sont de même mesure γ .

→ $-\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{j}$ étant colinéaires de sens contraires , L'angle orienté $(\widehat{-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{j}})$ est un angle plat de mesure π

→ L'angle orienté $(\widehat{-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{j}})$ étant un angle plat de mesure π , la relation de Chasles concernant les mesures des angles orientés permet d'affirmer : $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

figure : ABC de sens direct



2) **un triangle ABC est dit de sens indirect** lorsque les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ associés aux sommets du triangle ont des mesures principales négatives dont la somme vaut $-\pi$. Dans ce cas , pour aller de A vers B puis de B vers C puis de C vers A on se déplace dans le sens indirect sur le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC . Sur la figure ci-dessus il suffit de conserver la position de A et de permuter les sommets B et C pour obtenir un triangle ABC de sens indirect et alors "tout tourne en sens indirect " !

3) Le **cercle circonscrit à un triangle ABC rectangle en A** est un cercle de diamètre $[BC]$.

4) Le **cercle de diamètre** $[BC]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MC}$ (avec M disctinct de B et C , le triangle MBC est rectangle en M) .

5) **angle opposé de** $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$: avec α mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ on a : $-\alpha$ mesure de $(\widehat{\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}})$. Autrement dit : $\overline{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}\equiv-\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\,[2\pi]$.

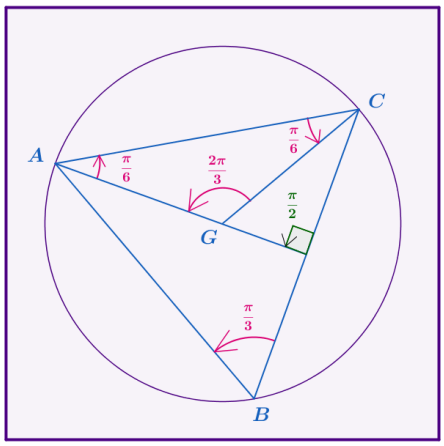
6) **angle** $(\widehat{a\overrightarrow{u},b\overrightarrow{v}})$: avec a et b non nuls : $\overline{(a\overrightarrow{u},b\overrightarrow{v})}\equiv\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\,[2\pi]\Leftrightarrow ab>0$; $\overline{(a\overrightarrow{u},b\overrightarrow{v})}\equiv\left(\pi+\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)[2\pi]\Leftrightarrow ab<0$.

7) **Relations de Chasles concernant les angles orientés**

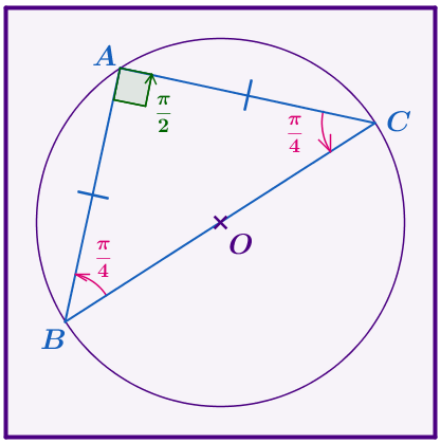
→ avec des vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{t}$: $\begin{cases}\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\equiv\left(\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}+\overline{(\overrightarrow{w},v)}\right)[2\pi]\\ \overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\equiv\left(\overline{(\overrightarrow{t},\overrightarrow{v})}-\overline{(\overrightarrow{t},\overrightarrow{u})}\right)[2\pi]\end{cases}$

→ avec des vecteurs $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI}$: $\begin{cases}\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\left(\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}+\overline{(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})}\right)[2\pi]\\ \overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\left(\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}-\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}\right)[2\pi]\end{cases}$

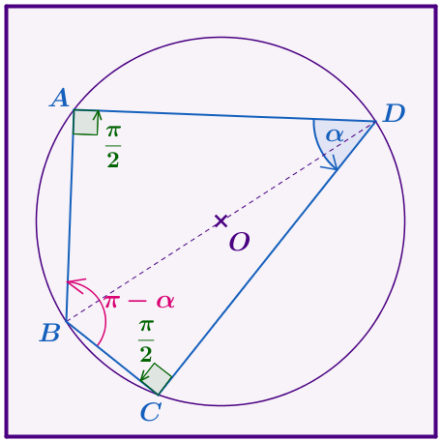
ABC équilatéral de centre de gravité G



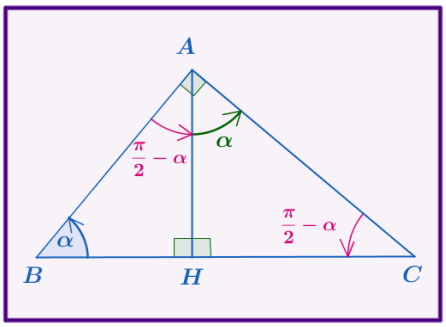
ABC rectangle isocèle de sommet principal A



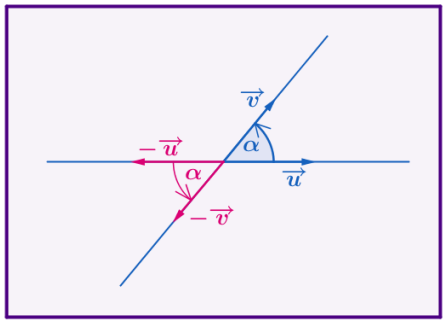
ABCD quadrilatère inscriptible dans un cercle de diamètre [AB]



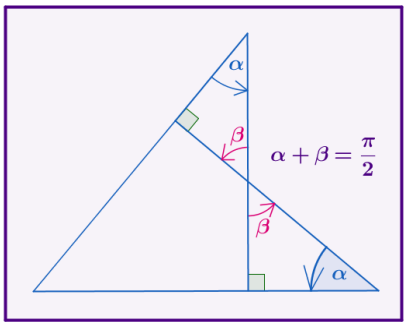
ABC rectangle en A [AH] hauteur issue de A



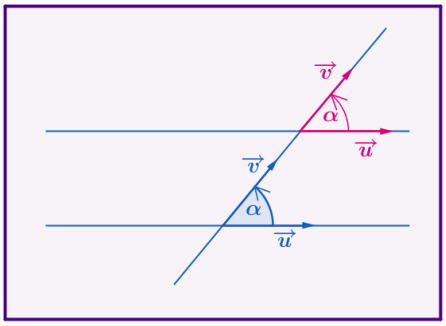
angles dits opposés par le sommet



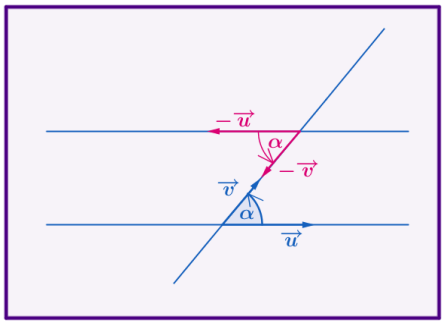
angles à côtés deux à deux perpendiculaires



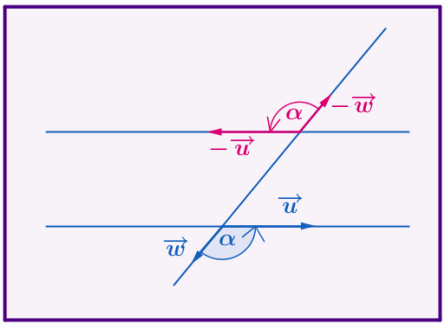
angles dits correspondants

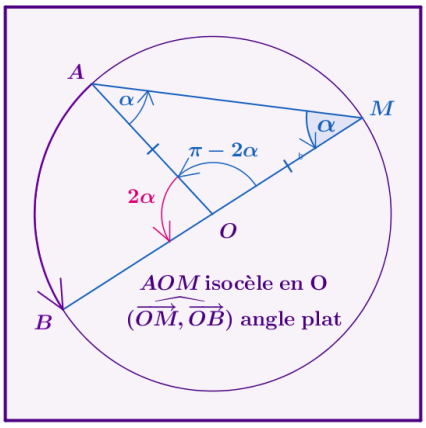


angles dits alternes internes



angles dits alternes externes

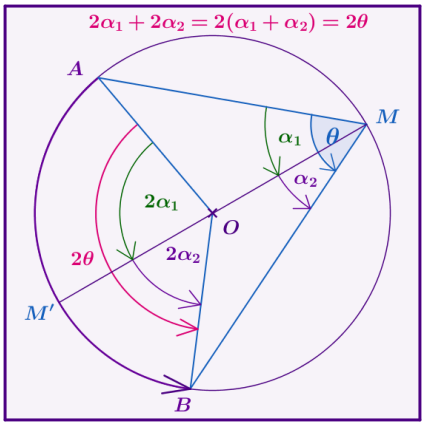




deux situations utilisant un angle inscrit $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ et un angle au centre $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ interceptant le même arc $\overset{\frown}{AB}$

A savoir :

$\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \equiv 2\overline{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}[2\pi]$

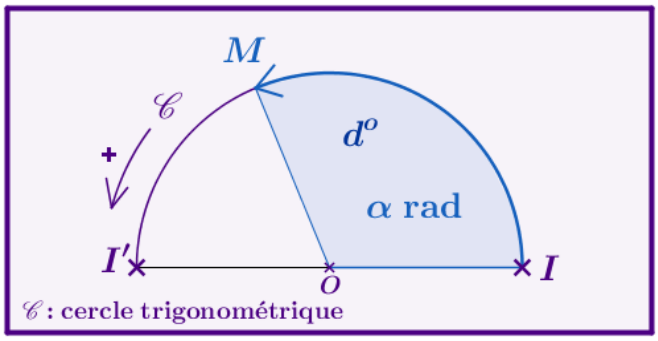


En préalable

→ L'arc orienté $\overset{\frown}{II'}$ utilise un demi-tour de longueur π et est associé à l'angle plat $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OI'}})$ de mesure π radians ou bien de mesure 180 degrés .

→ Pour les mesures de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$, qui sont aussi les mesures de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$, on utilise le principe suivant pour faire des conversions degrés $\longleftrightarrow$ radians :

mesure de $\overset{\frown}{IM}$ = quantité de demi-tour × mesure d'un demi-tour



Pour compléter le tableau **on commence par déterminer la quantité de demi-tour utilisée (deuxième ligne du tableau)**

α radians ; $\alpha = q \times \pi$	1 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{3} \times \pi = \frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{4}$ rad
quantité q de demi-tour utilisée : $q = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{d}{180}$	$\frac{1}{\pi} \simeq 0,32$	$\frac{1}{6}$	$\frac{60}{180} = \frac{1}{3}$	$\frac{100}{180} = \frac{5}{9}$	$\frac{3}{4}$
d degrés ; $d = q \times 180$	$\frac{1}{\pi} \times 180 \simeq 57,3$	$\frac{1}{6} \times 180 = 30$	60°	100°	$\frac{3}{4} \times 180 = 135$

α radians ; $\alpha = q \times \pi$	$\frac{7\pi}{12}$ rad	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{34\pi}{45}$
quantité q de demi-tour utilisée : $q = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{d}{180}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{22,5}{180} = \frac{45}{360} = \frac{1}{8}$	$\frac{136}{180} = \frac{34}{45}$
d degrés ; $d = q \times 180$	$\frac{7}{12} \times 180 = 105$	$22,5^o$	136°

exercice 3 Points images sur un cercle trigonométrique de réels définis par un modulo

le principe On a : $\frac{2\pi}{n} \times n = 2\pi$ et donc intuitivement : il suffit de faire successivement n arcs de cercle de même mesure $\frac{2\pi}{n}$ pour faire un tour complet du cercle $\mathcal{C}$. En raisonnant modulo n , un ensemble de réels x définis modulo $\frac{2\pi}{n}$ peut être décomposé en une partition de n catégories de réels définis modulo 2π et représentés par un seul point image sur le cercle trigo . Un tel ensemble est donc représenté par un ensemble de n sommets distincts qui sont les extrémités d'un diamètre de $\mathcal{C}$ ($n = 2$) ou bien les sommets d'un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$)

⟶ figure 1 : points images des réels x tels que : $x \equiv \frac{3\pi}{8}[\pi]$

On a : $x \equiv \frac{3\pi}{8}\,[\pi] \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{8} + K\,(\pi)$ et avec deux demi-tours $(2 \times \pi)$ on effectue un tour complet de cercle . En utilisant les deux restes (0 et 1) de la division d'un entier par 2 on obtient deux formes possibles pour l'entier K : $2k + 0$ soit $2k$, $2k + 1$

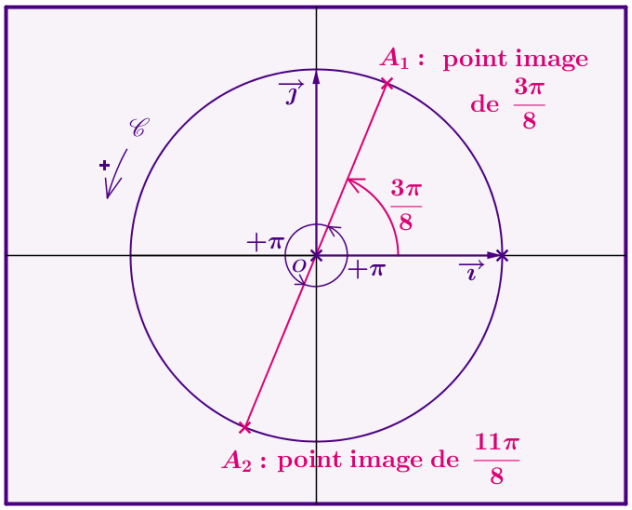
D'où : $x \equiv \frac{3\pi}{8}\,[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{8} + (2k+1)\,(\pi)$

Puis : $x \equiv \frac{3\pi}{8}\,[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ ou $x = \left(\frac{3\pi}{8} + \pi\right) + 2k\pi$

Soit : $x \equiv \frac{3\pi}{8}\,[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{8} + 2k\pi$

Soit : $x \equiv \frac{3\pi}{8}\,[\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$ *ou* $x \equiv \frac{11\pi}{8}\,[2\pi]$

On crée ainsi deux catégories de réels modulo 2π associées à deux points images sur le cercle $\mathcal{C}$ qui sont diamétralement opposés .



entier K	0	1	2
$x = \frac{3\pi}{8} + K\,(\pi)$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8} + \pi$ soit : $\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8} + 2\pi$
point image sur $\mathcal{C}$	A_1	A_2	A_1

Pour placer le point A_1 sur le cercle trigo on utilise : $\frac{3\pi}{8}$ radians correspond à $\frac{3 \times 180}{8}$ degrés soit à $67,5^o$

⟶ figure 2 : points images des réels x tels que : $x \equiv -\frac{2\pi}{5}[\frac{2\pi}{3}]$

On a : $x \equiv -\frac{2\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{5} + K\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et avec trois tiers de tour $\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right)$ on effectue un tour complet de cercle .

En utilisant les trois restes (0 , 1 et 2) de la division euclidienne d'un entier par 3 on obtient trois formes possibles pour l'entier K :

$3k$, $3k+1$, $3k+2$.

D'où : $x \equiv -\frac{2\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{5} + 3k\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $x = -\frac{2\pi}{5} + (3k+1)\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $x = -\frac{2\pi}{5} + (3k+2)\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Puis : $x \equiv -\frac{2\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{5} + 3k\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $x = -\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} + 3k\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $x = -\frac{2\pi}{5} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3k\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

D'autre part : $-\frac{2\pi}{5} = -\frac{6\pi}{15}$ et $\frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{15}$ donc : $-\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{15}$ et : $-\frac{2\pi}{5} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{15} + \frac{2\pi}{3} = \frac{14\pi}{15}$

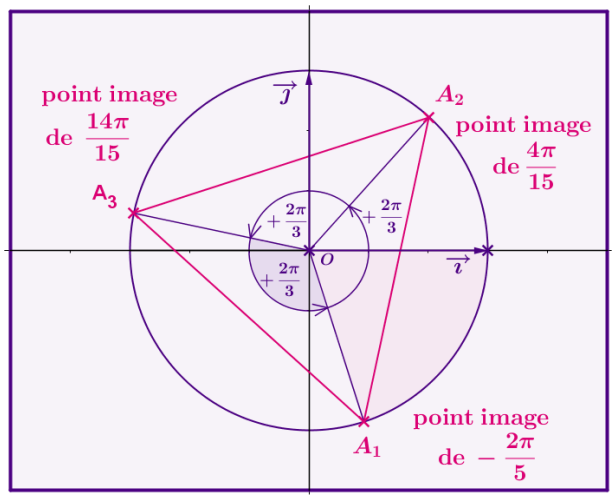
Par conséquent : $x \equiv -\frac{2\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{5} + k(2\pi)$ ou $x = \frac{4\pi}{15} + k(2\pi)$ ou $x = \frac{14\pi}{15} + k(2\pi)$

Soit : $x \equiv -\frac{2\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{2\pi}{5}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{4\pi}{15}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{14\pi}{15}[2\pi]$

On crée ainsi trois catégories de réels modulo 2π associées à trois points images sur le cercle $\mathcal{C}$.

entier K	0	1
$x = -\frac{2\pi}{5} + K\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{15}$	$-\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{15}$
point image sur $\mathcal{C}$	A_1	A_2

K	2	3
$x =$	$-\frac{2\pi}{5} + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{14\pi}{15}$	$-\frac{2\pi}{5} + 3\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi$
point image	A_3	A_1



Pour placer le point A_1 sur le cercle trigo avec un rapporteur on utilise :

$-\frac{2\pi}{5}$ radians correspond à $\frac{-2 \times 180}{5}$ degrés soit à -72°

Les trois points images A_1 , A_2 , A_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct .

En effet : les trois angles au centre O de $\mathcal{C}$ interceptant les arcs $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_1}$ sont de mesure $\frac{2\pi}{3}$ (on passe d'un sommet du triangle au suivant en faisant un tiers de tour) . Par conséquent les trois angles inscrits $(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}})$, $(\widehat{\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1}})$, $(\widehat{\overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_2}})$ interceptant respectivement les arcs $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_1}$ $\overset{\frown}{A_1A_2}$ sont tous de même mesure $\frac{\pi}{3}$.

⟶ figure 3 : points images des réels x tels que : $x \equiv \frac{4\pi}{9}[\frac{\pi}{2}]$

$x \equiv \frac{4\pi}{9}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z}, (\overline{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{9} + K\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$ soit : quatre quarts de tour pour effectuer un tour complet de cercle .

Avec les quatre restes (0 , 1 , 2 et 3) de la division d'un entier par 4 on obtient pour K : $K = 4k$ ou $4k+1$ ou $4k+2$ ou $4k+3$

$x \equiv \frac{4\pi}{9}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{4\pi}{9} + 4k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + (4k+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + (4k+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + (4k+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$x \equiv \frac{4\pi}{9}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{4\pi}{9} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + 1\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

$x \equiv \frac{4\pi}{9}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{4\pi}{9} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + \pi + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

D'autre part : $\frac{4\pi}{9} = \frac{8\pi}{18}$; $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$; $\pi = \frac{18\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{2} = \frac{27\pi}{18}$. Par conséquent :

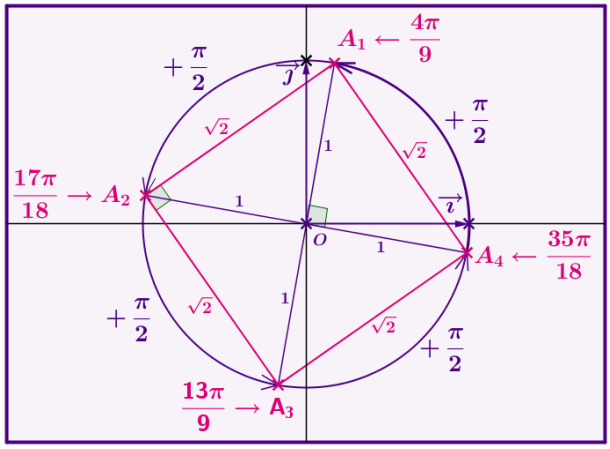
$x \equiv \frac{4\pi}{9}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{4\pi}{9} + 2k\pi$ ou $x = \frac{17\pi}{18} + 2k\pi$ ou $x = \frac{26\pi}{18} + 2k\pi$ ou $x = \frac{35\pi}{18} + 2k\pi$

Ainsi : $x \equiv \frac{4\pi}{9}\left[\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \equiv \frac{4\pi}{9}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{17\pi}{18}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{13\pi}{9}[2\pi]$ ou $x \equiv \frac{35\pi}{18}[2\pi]$

On a donc quatre catégories de réels modulo 2π associées à quatre points images sur le cercle $\mathcal{C}$.

entier K	0	1	2
$\frac{4\pi}{9}+K\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{9}+\frac{\pi}{2}=\frac{17\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}+\pi=\frac{13\pi}{9}$
point image sur $\mathcal{C}$	A_1	A_2	A_3

K	2	3
$x=$	$\frac{4\pi}{9}+\frac{3\pi}{2}=\frac{35\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}+4\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\pi}{9}+2\pi$
point image	A_4	A_1



Pour placer le point A_1 sur le cercle trigo avec un rapporteur on utilise :
$\frac{4\pi}{9}$ radians correspond à $\frac{4\times 180}{9}$ degrés soit à 80°

Les réels $\frac{13\pi}{9}$ et $\frac{4\pi}{9}$ ont une différence égale à π : leurs points images respectifs A_3 et A_1 sont donc diamétralement opposés .

Les réels $\frac{35\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ ont une différence égale à π : leurs points images respectifs A_4 et A_2 sont donc diamétralement opposés .

Les diamètres $[A_1A_3]$ et $[A_2A_4]$ sont portés par des droites perpendiculaires car $(\widehat{\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}})$ et $\overset{\frown}{A_1A_2}$ de même mesure $\frac{\pi}{2}$.

Les quatre points images A_1 , A_2 , A_3 , A_4 sont les sommets d'un carré . Les côtés $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, $[A_4A_1]$ sont de même longueur $\sqrt{2}$ comme hypothénuses de triangles rectangles isocèles en O ayant les autres côtés de longueur 1 (rayon de $\mathcal{C}$) .

$\longrightarrow$ figure 4 : points images des réels x tels que : $x\equiv\frac{7\pi}{10}[\frac{2\pi}{5}]$

$x\equiv\frac{7\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]\Leftrightarrow\exists K\in\mathbb{Z},\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\frac{7\pi}{10}+K\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $5\times\frac{2\pi}{5}=2\pi$ (on raisonne par cinquième de tour)

En utilisant les cinq restes (0 , 1 , 2 , 3 et 4) de la division euclidienne d'un entier par 5 on obtient cinq formes possibles pour l'entier K : $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ et $5k+4$. On peut donc remplacer $\exists K\in\mathbb{Z},\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=-\frac{7\pi}{10}+K\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ par : $\exists k\in\mathbb{Z}$,

$x=\frac{7\pi}{10}+5k\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ou $x=\frac{7\pi}{10}+(5k+1)\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ou $x=\frac{7\pi}{10}+(5k+2)\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ou $x=\frac{7\pi}{10}+(5k+3)\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ou $x=\frac{7\pi}{10}+(5k+4)\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

D'autre part : $\frac{7\pi}{10}+5k\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{7\pi}{10}+2k\pi$; $\frac{7\pi}{10}+(5k+1)\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{7\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}+5k\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{11\pi}{10}+2k\pi$

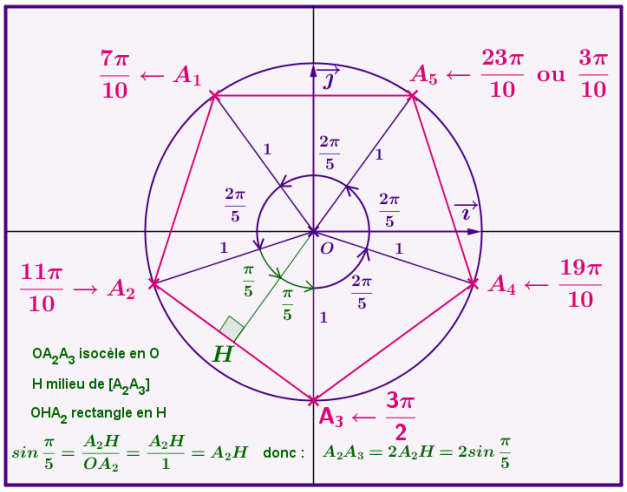
$\frac{7\pi}{10}+(5k+2)\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{7\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}+2k\pi=\frac{15\pi}{10}+2k\pi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{7\pi}{10}+(5k+3)\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{7\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}+2k\pi=\frac{19}{10}\pi+2k\pi$;

$\frac{7\pi}{10}+(5k+4)\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{7\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}+2k\pi=\frac{23}{10}\pi+2k\pi$. Par conséquent :

$x\equiv\frac{7\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},x=\frac{7\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=\frac{11\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ou $x=\frac{19}{10}\pi+2k\pi$ ou $x=\frac{23}{10}\pi+2k\pi$

$x\equiv\frac{7\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]\Leftrightarrow x\equiv\frac{7\pi}{10}\,[2\pi]$ ou $x\equiv\frac{11\pi}{10}\,[2\pi]$ ou $x\equiv\frac{3\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $x\equiv\frac{19\pi}{10}\,[2\pi]$ ou $x\equiv\frac{23\pi}{10}\,[2\pi]$

entier K	0	1	2	3	4	5
$\frac{7\pi}{10}+K\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{11\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{10}$	$\frac{23\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}+2\pi$
point image sur $\mathcal{C}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_1



Pour placer le point A_1 sur le cercle trigonométrique de centre O on utilise : $\frac{7\pi}{10}$ radians correspond à $\frac{7\times 180}{10}$ degrés soit à 126°

Les cinq points images A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 sont les sommets d'un pentagone régulier (pentagone ayant 5 angles égaux et cinq côtés de même longueur) .

exercice 4 **1) les outils :** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \equiv \alpha\,[2\pi]$

1-1 Compléter le théorème suivant : $\overline{(a\overrightarrow{u},b\overrightarrow{v})} \equiv \alpha\,[2\pi] \Leftrightarrow ab>0$ et $\overline{(a\overrightarrow{u},b\overrightarrow{v})} \equiv (\pi+\alpha)\,[2\pi] \Leftrightarrow ab<0$

1-2 En déduire : $\overline{(\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})} \equiv (\pi+\alpha)\ [2\pi]$; $\overline{(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \equiv (\pi+\alpha).\,[2\pi]$; $\overline{(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})} \equiv \alpha\ [2\pi]$

1-3 En déduire : Avec : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \equiv \alpha\,[2\pi]$ on a :

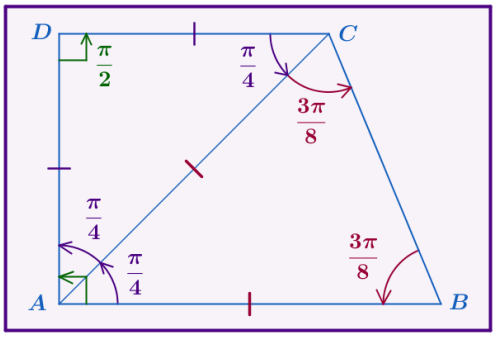
$\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA})} = \overline{(\overrightarrow{AB},-\overrightarrow{AC})}$ donc : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA})} \equiv (\pi+\alpha)\ [2\pi]$; $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})} = \overline{(-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ donc : $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})} \equiv (\pi+\alpha)\ [2\pi]$

$\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})} = \overline{(-\overrightarrow{AB},-\overrightarrow{AC})}$ donc : $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})} \equiv \alpha\ [2\pi]$; $\overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})} \equiv -\alpha\ [2\pi]$ (mesure de l'angle **opposé** de $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$)

2) ABC sont trois points distincts deux à deux tels que $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ Déduire de **1-3** ce qui suit :

$\pi+\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{7\pi}{5}$ donc : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA})} \equiv \dfrac{7\pi}{5}\ [2\pi]$; $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})} \equiv \dfrac{7\pi}{5}\ [2\pi]$; $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})} \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$; $\overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})} \equiv -\dfrac{2\pi}{5}[2\pi]$

3) $ABCD$ est un trapèze rectangle direct ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires de même sens) avec DAC rectangle isocèle direct en D et ABC isocèle direct de sommet principal A ($AB=AC$) .



3-1 <u>mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})}$</u>

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires de même sens donc $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})}$ est un angle nul de mesure principale 0 .

<u>mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}$</u>

La figure permet d'observer : $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}$ est un angle droit direct . On doit donc justifier : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires de même sens donc : $\exists a \in\,]0,+\infty[\,, \overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{DC}$ et : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = \overline{(a\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD})} \underset{\text{car } a>0}{=} \overline{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD})} = -\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})}$

D'autre part : $\rightarrow \overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})} = \overline{(-\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$ entraîne : $\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})} = \pi + \overline{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$

$\rightarrow$ et DAC rectangle isocèle direct en D entraîne : $\overline{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Par conséquent : $\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})} = \pi + \overline{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})} = \pi + \dfrac{\pi}{2}$ soit : $\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})} = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ainsi : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = -\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})}$ et $\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC})} = \dfrac{3\pi}{2}$ entraînent : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = -\dfrac{3\pi}{2}$.

Une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}$ étant $-\dfrac{3\pi}{2}$, sa mesure principale est : $-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi$ soit : $\dfrac{\pi}{2}$ (résultat conforme avec $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}$ droit direct) .

3-2 <u>mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}$</u>

DAC étant un triangle rectangle isocèle direct en D , les angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})}$ ont une même mesure α strictement positive . La somme des mesures principales des angles $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})}$,$\widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$ étant égale à π , on obtient : $\alpha+\alpha+\dfrac{\pi}{2}=\pi$. D'où : $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ entraînant : $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}$ est donc de mesure principale $\dfrac{\pi}{4}$.

$\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}$ est l'angle opposé de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}$ et $\overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})} = \dfrac{\pi}{4}$. Donc : $\widehat{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{4}$.

3-4 <u>mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})}$</u>

On a : $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})} \equiv \left(\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})}\right)[2\pi]$ (relation de Chasles concernant les angles orientés) .

D'autre part : $\rightarrow$ le triangle ABC étant isocèle direct en A , les angles orientés $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$ ont une même mesure β strictement positive . La somme des mesures principales des angles $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$, $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}$, $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$ étant égale à π , on obtient :

$\beta+\beta+\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}=\pi$. D'autre part : $\begin{cases} \rightarrow \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})} = \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = \dfrac{\pi}{2} (\text{car : } \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} \text{ angle droit direct}) \\ \rightarrow \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})} \text{ est de mesure principale } \dfrac{\pi}{4} (\text{d'après } \mathbf{3\text{-}2}) \end{cases}$

D'où : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \dfrac{\pi}{2} - \overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ entraînant : $2\beta+\dfrac{\pi}{4}=\pi$ puis : $\beta=\dfrac{3\pi}{8}$. Une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}$ est donc $\dfrac{3\pi}{8}$.

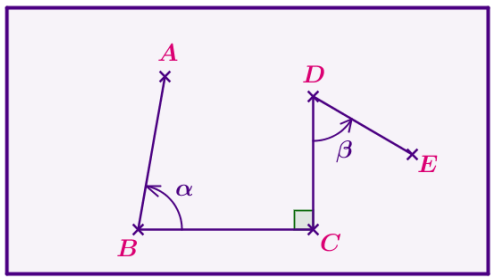
$\rightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$ donc : $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})} \equiv \left(\pi + \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}\right)[2\pi]$. $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$ est un angle droit direct de mesure principale $\frac{\pi}{2}$ donc $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})} \equiv \left(\pi + \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})}\right)[2\pi]$ devient $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})} \equiv \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ soit $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})} \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$

Par conséquent : $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})} \equiv \left(\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})}\right)[2\pi]$ devient : $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})} \equiv \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)[2\pi]$ soit : $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})} \equiv \frac{15\pi}{8}[2\pi]$

Une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}})$ est donc $\frac{15\pi}{8}$ et sa mesure principale est : $\frac{15\pi}{8} - 2\pi$ soit $-\frac{\pi}{8}$

exercice 5

1) A , B , C , D , E sont cinq points du plan tels que :



$\rightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$ est un angle droit direct

$\rightarrow$ Les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}})$ ont respectivement pour mesures α et β .

une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})$

On a $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})$ de mesure $\pi + \overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$.

D'autre part : $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ est l'angle opposé de $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ de mesure α donc : $\overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = -\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = -\alpha$

Par conséquent : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})$ de mesure $\pi + \overline{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$ devient : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})$ de mesure $\pi - \alpha$

une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}})$

On a : $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}}) = (\widehat{-\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}})$ donc $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}})$ de mesure $\pi + \overline{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})}$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}})$ de mesure β .

Donc : $\overline{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})} = \pi + \overline{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})} = \pi + \beta$. Ainsi : $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}})$ de mesure $\pi + \beta$.

déduction : une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})$

En utilisant la relation de Chasles concernant les angles orientés on obtient : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})} \equiv \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})} + \overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})} + \overline{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})}[2\pi]$

On vient de prouver : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})} \equiv (\pi - \alpha)[2\pi]$ et $\overline{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})} \equiv (\pi + \beta)[2\pi]$ (1)

D'autre part : $\rightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}}) = (\widehat{-\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ donc $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})} = \pi + \overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})}$.

$\rightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ est l'angle opposé de l'angle droit direct $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$ donc : $\overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})} = -\overline{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})} = -\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent : $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})} = \pi + \overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ (2)

En utilisant (1) et (2) on obtient : $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})} = \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})} + \overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})} + \overline{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})} = (\pi - \alpha) + \frac{\pi}{2} + (\pi + \beta) = \beta - \alpha + \frac{5\pi}{2}$

Une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})$ est donc : $(\beta - \alpha) + \frac{5\pi}{2} + 2\pi$. Une autre mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})$ est : $\left((\beta - \alpha) + \frac{5\pi}{2}\right) - 2\pi$.

Conclusion : une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})$ est donc : $(\beta - \alpha) + \frac{\pi}{2}$

2) En préalable : convertir en radians les différentes mesures en degrés intervenant dans ces deux figures

En utilisant le principe expliqué dans l'exercice 2 on obtient :

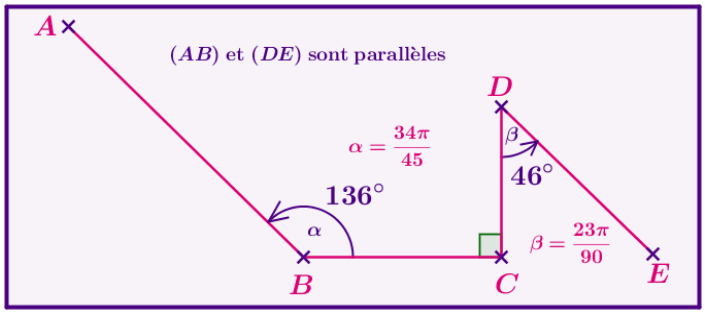
136° correspond à $\frac{136}{180} \times \pi$ radians soit à $\frac{34\pi}{45}$ radians ; 108° correspond à $\frac{108}{180} \times \pi$ radians soit à $\frac{3\pi}{5}$ radians .

46° correspond à $\frac{46}{180} \times \pi$ radians soit à $\frac{23\pi}{90}$ radians ; -72° correspond à $-\frac{72}{180} \times \pi$ radians soit à $-\frac{2\pi}{5}$ radians .

Les deux figures de la page 08 mettent en évidence un angle droit direct $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})$ et deux angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}})$.

Elles représentent donc deux illustrations de la situation définie à la question **1)** . En notant α et β les mesures en radian respectives des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}})$ on sait d'après la question **1)** que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})$ est de mesure : $(\beta - \alpha) + \frac{\pi}{2}$.

figure 1



$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ de mesure 136° et $\dfrac{34\pi}{45}$ rad . Donc : $\alpha = \dfrac{34\pi}{45}$

$(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}})$ de mesure 46° et $\dfrac{23\pi}{90}$ rad . Donc : $\beta = \dfrac{23\pi}{90}$

Donc : $(\beta - \alpha) + \dfrac{\pi}{2} = \left(\dfrac{23\pi}{90} - \dfrac{34\pi}{45}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

Soit : $(\beta - \alpha) + \dfrac{\pi}{2} = \left(\dfrac{23\pi}{90} - \dfrac{68\pi}{90}\right) + \dfrac{45\pi}{90} = 0$

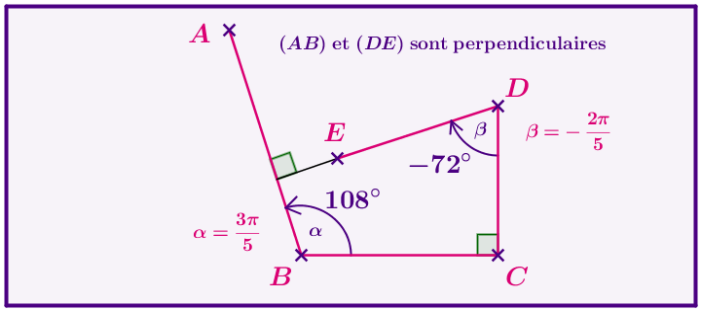
L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}})$ est donc de mesure : 0

On peut donc affirmer : $\rightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}})$ est un angle nul

$\rightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens

$\rightarrow$ les droites (AB) et (DE) sont parallèles

figure 2



$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ de mesure 108° et $\dfrac{3\pi}{5}$ rad . Donc : $\alpha = \dfrac{3\pi}{5}$

$(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}})$ de mesure -72° et $-\dfrac{2\pi}{5}$ rad . Donc : $\beta = -\dfrac{2\pi}{5}$

Donc : $(\beta - \alpha) + \dfrac{\pi}{2} = \left(-\dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{3\pi}{5}\right) + \dfrac{\pi}{2}$

Soit : $(\beta - \alpha) + \dfrac{\pi}{2} = (-\pi) + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}})$ est donc de mesure : $-\dfrac{\pi}{2}$

On peut donc affirmer : $\rightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}})$ est un angle droit indirect

$\rightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux

$\rightarrow$ les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires

exercice 6 Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ orthonormal direct ; M est un point situé sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O . Dans chacun des quatre cas suivants on donne une mesure x de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$.

On demande de déterminer les deux mesures suivantes de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$:

1) la mesure principale α traduisant un trajet de moins d'un demi-tour de cercle en sens direct ou indirect pour aller de I en M

2) la mesure β , distincte de α , traduisant un trajet de moins d'un tour de cercle en sens direct ou indirect pour aller de I en M

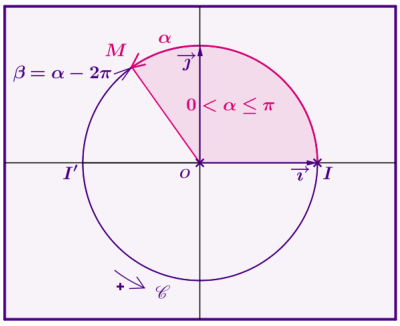
En préalable 1) point de vue trigonométrique

Pour se rendre en M à partir de I en moins d'un tour de cercle $\mathcal{C}$, on peut , selon le sens choisi pour le parcours , utiliser deux arcs orientés de longueurs respectives α *et* β dont la somme des valeurs absolues vaut 2π . En notant α la longueur du trajet le plus court (qui utilise moins d'un demi-tour de cercle) deux cas se présentent selon le sens (direct ou indirect) dans lequel il est effectué :

si le trajet le plus court est effectué en sens direct alors :

$\rightarrow$ sa longueur α vérifie : $\alpha > 0$ et $\alpha \in [0, \pi]$

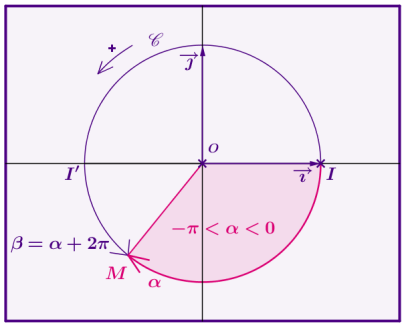
$\rightarrow$ le trajet de longueur β est effectué en sens indirect et la longueur β vérifie : $\beta < 0$ et $\alpha + (-\beta) = 2\pi$ d'où : $\beta = \alpha - 2\pi$



si le trajet le plus court est effectué en sens indirect alors :

$\rightarrow$ sa longueur α vérifie : $\alpha < 0$ et $\alpha \in]-\pi, 0]$

$\rightarrow$ le trajet de longueur β est effectué en sens direct et la longueur β vérifie : $\beta > 0$ et $\beta + (-\alpha) = 2\pi$ d'où : $\beta = \alpha + 2\pi$



méthode 1 En notant x la mesure d'un arc orienté , toute autre mesure y de cet arc peut se définir par une égalité du type : $y = x + 2k\pi$ avec k entier relatif . Rechercher la mesure principale α de cet arc revient donc à rechercher la mesure du type y appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

On est donc amené à **résoudre un encadrement du type $-\pi < x + 2k\pi \leqslant$ avec x connu et k à déterminer** .

La mesure principale α de cet arc est alors : $\alpha = x + 2k_0\pi$, k_0 étant la valeur trouvée précédemment pour k .

1er exemple d'application : $\boxed{1^{er} \text{ cas : } x = \frac{37}{4}\pi}$. Toute mesure de cet arc est de la forme $\frac{37}{4}\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et la mesure α dite principale de cet arc est la seule à vérifier l'encadrement : $-\pi < \alpha \leq \pi$. D'autre part :

$-\pi < x + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{37}{4}\pi + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi - \frac{37}{4}\pi < 2k\pi \leq \pi - \frac{37}{4}\pi \Leftrightarrow -\frac{41}{4}\pi < 2k\pi \leq -\frac{33}{4}\pi \Leftrightarrow -\frac{41}{4} < 2k \leq -\frac{33}{4}$ $(\pi > 0)$

D'où : $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{41}{8} < k \leq -\frac{33}{8}$ (car $2 > 0$)

Or : $-\frac{41}{8} = -5,125$; $-\frac{33}{8} = -4,125$. Donc le seul entier k vérifiant $-\frac{41}{8} < k \leq -\frac{33}{8}$ est : -5 .

Et avec $k = -5$ on obtient : $x + 2k\pi = \frac{37\pi}{4} - 10\pi = -\frac{3\pi}{4}$. La mesure principale α demandée est donc : $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

La deuxième mesure β à déterminer est alors : $\beta = \alpha + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$.

2ème exemple d'application : $\boxed{2^{ème} \text{ cas : } x = -\frac{121\pi}{5}}$. Toute mesure de cet arc est de la forme $-\frac{121\pi}{5} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et la mesure α dite principale de cet arc est la seule à vérifier l'encadrement : $-\pi < \alpha \leq \pi$. D'autre part :

$-\pi < x + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < -\frac{121\pi}{5} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi + \frac{121\pi}{5} < 2k\pi \leq \pi + \frac{121\pi}{5} \Leftrightarrow \frac{116\pi}{5} < 2k\pi \leq \frac{126\pi}{5}$

$-\pi < x + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow \frac{116}{10} < k \leq \frac{126}{10}$ $(2\pi > 0)$ et $\frac{116}{10} = 11,6$; $\frac{126}{10} = 12,6$.

Le seul entier k vérifiant $\frac{116}{10} < k \leq \frac{126}{10}$ est : 12 . Avec $k = 12$ on obtient : $x + 2k\pi = -\frac{121\pi}{5} + 24\pi = -\frac{121\pi}{5} + \frac{120\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$.

La mesure principale α demandée est donc : $\alpha = -\frac{\pi}{5}$.

La deuxième mesure β à déterminer est alors : $\beta = \alpha + 2\pi = -\frac{\pi}{5} + 2\pi = \frac{4\pi}{5}$.

méthode 2 En général la mesure x est donnée sous la forme $\pm\frac{a\pi}{n}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \\ a \text{ et } n \text{ premiers entre eux} \end{cases}$.

L'idée est d'approcher la mesure x donnée par un nombre de tours complets $\begin{pmatrix} \text{en sens direct pour } x > 0 \\ \text{en sens indirect pour } x < 0 \end{pmatrix}$.

Par exemple avec $x = \frac{a\pi}{n}$ on peut écrire $x = \frac{a\pi}{n} = \frac{a}{n} \times \pi = \underbrace{\frac{a}{2n}}_{\text{quantité de tour}} \times \underbrace{2\pi}_{\text{longueur d'un tour}}$.

On est donc amené à utiliser la division euclidienne de a par $2n$ pour rechercher le multiple de $2n$ le plus proche de de a .

On calcule ainsi la quantité de tours complets utilisés pendant le trajet de longueur x . Le trajet de moins d'un demi-tour restant à effectuer pour terminer le trajet de longueur x va fournir la mesure principale demandée .

1er exemple d'application : $\boxed{1^{er} \text{ cas : } x = \frac{37}{4}\pi}$. On raisonne par huitième de tour $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car : $8 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$ (un tour) .

Le multiple de 8 le plus proche de 37 est 40 . Donc : $x = \frac{37}{4}\pi = \frac{40}{4}\pi - \frac{3\pi}{4} = 10\pi - \frac{3\pi}{4} = \alpha + 10\pi$ en posant : $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$

D'autre part $\rightarrow \alpha$ est une autre mesure de l'arc car : $x = \alpha + 10\pi$ entraîne : $\alpha = x - 10\pi = x + 2k\pi$ avec $k = -5$, $-5 \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \alpha \in]-\pi, \pi]$ car $-\pi < -\frac{3\pi}{4} < 0$.

Par conséquent : $-\frac{3\pi}{4}$ répond bien à la définition de la mesure principale de l'arc de mesure $\frac{37}{4}\pi$

$\frac{37}{8} = 4,625$. Deux multiples de 8 encadrent 37 : 32(soit 4×8) et 40 (soit 5×8) . Si par erreur on choisissait 32 on obtiendrait comme égalité : $x = \frac{37}{4}\pi = \frac{32}{4}\pi + \frac{5\pi}{4} = 8\pi + \frac{5\pi}{4} = \beta + \underbrace{8\pi}_{4\text{tours}}$ en posant : $\beta = \frac{5\pi}{4}$. Avec ce choix de multiple de 8 , on trouve bien une autre mesure de l'arc (en fait la deuxième mesure β) mais cette mesure n'est pas la mesure principale car $\frac{5\pi}{4} > \pi$ entraîne : $\beta \notin]-\pi, \pi]$. Le choix de 5×8 s'explique aussi par $\frac{37}{8} = 4,625$ et $4,625 > 4,5$ ce qui donne un trajet de 4 tours ($4 \times 2\pi$) avec un reste dépassant un demi-tour ($0,625 \times \pi$) et donc ! une mesure principale négative et donc ! pour trouver cette mesure principale : approcher le trajet par 5 tours soit la mesure x par $\frac{40}{4}\pi$!

<u>2ème exemple d'application :</u> $\boxed{2^{ème} \text{ cas : } x = -\frac{121\pi}{5}}$. On raisonne par dixième de tour $\left(\frac{\pi}{10}\right)$ car : $10 \times \frac{\pi}{5} = 2\pi$ (un tour) .

$\frac{121}{10} = 12,1$. Le multiple de 10 le plus proche de 121 est : $12 \times 10 = 120$.

Donc : $x = -\frac{121\pi}{5} = -\frac{120\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = -12\pi - \frac{\pi}{5} = \alpha - 12\pi$ en posant : $\alpha = -\frac{\pi}{5}$

D'autre part $\rightarrow$ α est une autre mesure de l'arc car : $x = \alpha - 12\pi$ entraîne : $\alpha = x + 12\pi = x + 2k\pi$ avec $k = 6$, $6 \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \alpha \in]-\pi, \pi]$ car $-\pi < \frac{\pi}{5} < 0$.

Par conséquent : $-\frac{\pi}{5}$ répond bien à la définition de la mesure principale de l'arc de mesure $-\frac{121\pi}{5}$

$\boxed{3^{ème} \text{ cas : } x = \frac{125\pi}{6}}$ avec la méthode 1

Toute mesure de cet arc est de la forme $\frac{125\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et la mesure α dite principale de cet arc est la seule à vérifier l'encadrement : $-\pi < \alpha \leq \pi$. D'autre part :

$-\pi < x + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{125\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\pi - \frac{125\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi - \frac{125\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{131}{6}\pi < 2k\pi \leq -\frac{119}{6}\pi$

$-\pi < x + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{131}{12} < k \leq -\frac{119}{12}$ $(2\pi > 0)$ et $-\frac{131}{12} \simeq -10,9$, $-\frac{119}{12} \simeq -9,92$.

Le seul entier k vérifiant $-\frac{131}{12} < k \leq -\frac{119}{12}$ est -10 . Avec $k = -10$ on obtient $x + 2k\pi = \frac{125\pi}{6} - 20\pi = \frac{125\pi}{6} - \frac{120\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

<u>La mesure principale α demandée est donc : $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.</u>

La <u>deuxième mesure β</u> à déterminer est alors : $\beta = \alpha - 2\pi = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = \underline{-\frac{7\pi}{6}}$.

<u>une remarque concernant α et β</u> la mesure $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ traduit sur le cercle trigo un trajet en sens direct depuis le point I jusqu'en M de longueur $\frac{5\pi}{6}$. Pour compléter ce tour et revenir en I , il faut donc effectuer à partir de M , un trajet en sens direct de longueur $\frac{7\pi}{6}$ $\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6}\right)$. La mesure β correspond à ce trajet de longueur $\frac{7\pi}{6}$ mais en l'effectuant en sens indirect pour aller de I vers M .

$\boxed{4^{ème} \text{ cas : } x = -\frac{69\pi}{8}}$ avec la méthode 2 (ma préférée , la plus rapide et très utile pour calculer certaines lignes trigonométriques)

On raisonne par seizième de tour $\left(\frac{\pi}{16}\right)$ car : $16 \times \frac{\pi}{8} = 2\pi$ (un tour) .

$\frac{69}{16} \simeq 4,3$ et $4,3 < 4,5$ ($-\frac{69\pi}{8}$: " moins de 4,5 tours en sens indirect ") . Le multiple de 16 le plus proche de 69 est : $4 \times 16 = 64$

Donc : $x = -\frac{69\pi}{8} = -\frac{64\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = -8\pi - \frac{5\pi}{8} = \alpha - 8\pi$ en posant : $\alpha = -\frac{5\pi}{8}$

D'autre part $\rightarrow$ α est une autre mesure de l'arc car : $x = \alpha - 8\pi$ entraîne : $\alpha = x + 8\pi = x + 2k\pi$ avec $k = 4$, $4 \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \alpha \in]-\pi, \pi]$ car $-\pi < -\frac{5\pi}{8} < 0$.

Par conséquent : <u>$-\frac{5\pi}{8}$ est la mesure principale de l'arc de mesure $-\frac{69\pi}{8}$</u> .

La <u>deuxième mesure β</u> à déterminer est alors : $\beta = \alpha + 2\pi = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi = \underline{\frac{11\pi}{8}}$.