Trigo - feuille d'exercices 2 - corrigés

situation le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O

attendu les valeurs des lignes trigonométriques des réels distincts de $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ doivent être justifiées

exercice 1

On donne la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$: $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

1) $\rightarrow \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}\times\sqrt{6}\right) + \left(\sqrt{6}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{12} + 6 = 8 - 2\times 2\sqrt{3} = \underline{8-4\sqrt{3} = \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}$

$\rightarrow$ valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ $\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ donc : $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = 1-\cos^2\dfrac{\pi}{12} = 1-\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

D'où : $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = 1-\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16} = \dfrac{16-\left[\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\times\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{6}\right)^2\right]}{16} = \dfrac{16-\left[8+4\sqrt{3}\right]}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}$

Avec $8-4\sqrt{3} = \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2$ on obtient : $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}{16} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Or : $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\dfrac{\pi}{12} = -\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{car : avec a et b réels}\\ a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b \text{ ou } a=-b\end{array}\right.$

Soit : $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

D'autre part : $\rightarrow \dfrac{\pi}{12} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\dfrac{\pi}{12} > 0$

$\rightarrow 2<6$ donc $\sqrt{2}<\sqrt{6}$ ce qui entraîne $\sqrt{2}-\sqrt{6}<0$ et $\sqrt{6}-\sqrt{2}>0$ puis : $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}<0\\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>0\end{array}\right.$ (car $4>0$).

Par conséquent : la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ est : $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2) déductions : $\rightarrow \tan\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$\tan\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{6-2\sqrt{12}+6}{6-2} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}$ et donc : $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

$\rightarrow \sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\rightarrow \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}$ donc $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\rightarrow \dfrac{13\pi}{12} = \pi+\dfrac{\pi}{12}$ donc $\sin\dfrac{13\pi}{12} = \sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{12}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\rightarrow \dfrac{11\pi}{12} = \pi-\dfrac{\pi}{12}$ donc $\cos\dfrac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{12} = -\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\rightarrow \dfrac{41\pi}{12} = \dfrac{48\pi}{12}-\dfrac{7\pi}{12} = 4\pi-\dfrac{7\pi}{12} = -\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$ avec : $k=2$ et $2\in\mathbb{Z}$ donc :

$$\sin\frac{41\pi}{12} = \sin\left(-\frac{7\pi}{12}+\underbrace{2k\pi}_{k=2}\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\frac{7\pi}{12} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

exercice 2

les outils : $\rightarrow$ le signe de $\cos\alpha$ et le signe de $\sin\alpha$

$\rightarrow \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ et donc : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ et $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

1) a est un réel vérifiant $\cos a = -\dfrac{3}{5}$ et $a\in\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Calculer $\sin a$ puis en déduire la valeur de $\tan a$

$\left(\forall\alpha\in\mathbb{R}, \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha\right)$ et $\cos a = -\dfrac{3}{5}$. Donc : $\sin^2 a = 1-\cos^2 a = 1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1-\dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

D'autre part : $\left(\sin^2 a = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sin a = \dfrac{4}{5} \text{ ou } \sin a = -\dfrac{4}{5}\right)$ et $\left(a\in\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[\text{ entraîne } \sin a<0\right)$.

par conséquent : $\sin a = -\dfrac{4}{5}$.

On déduit ensuite : $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$

2) b est un réel vérifiant $\sin b = \dfrac{3}{4}$. Calculer $\cos b$ sachant que : **2-1** $b \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$; **2-2** $b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha)$ et $\sin b = \dfrac{3}{4}$. Donc : $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16} = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2$

2-1 $b \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ donc $\cos b < 0$.

Ayant : $\cos b < 0$ et $\left(\cos^2 b = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \cos b = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \text{ ou } \cos b = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ on déduit : $\cos b = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

2-2 $b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos b > 0$.

Ayant : $\cos b > 0$ et $\left(\cos^2 b = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \cos b = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \text{ ou } \cos b = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ on déduit : $\cos b = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

exercice 3

α est défini par : $\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ et $\cos^2\alpha = \dfrac{48}{49}$.

1) Que vaut $\cos\alpha$? $\left(\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\text{ entraîne } \cos\alpha > 0\right)$ et $\left(\cos^2\alpha = \dfrac{48}{49} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{48}{49}} \text{ ou } \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{48}{49}}\right)$.

Donc : $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{48}{49}} = \dfrac{\sqrt{48}}{7} = \dfrac{\sqrt{16\times 3}}{7} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

2) $\rightarrow$ valeur de $\sin\alpha$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ et $\cos^2\alpha = \dfrac{48}{49}$ donc : $\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{48}{49} = \dfrac{1}{49} = \left(\dfrac{1}{7}\right)^2$

D'autre part : $\left(\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\text{ entraîne } \sin\alpha < 0\right)$ et $\left(\sin^2\alpha = \dfrac{48}{49} \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{7} \text{ ou } \sin\alpha = -\dfrac{1}{7}\right)$.

Par conséquent : $\sin\alpha = -\dfrac{1}{7}$.

$\rightarrow$ valeurs respectives de $\tan\alpha$, $\sin(25\pi + \alpha)$, $\cos\left(\dfrac{9\pi}{2} + \alpha\right)$, $\sin(-7\pi - \alpha)$, $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{7}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{1\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} .$$

$$\sin(25\pi + \alpha) = \sin(\underbrace{24\pi}_{2k\pi, k=12} + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} .$$

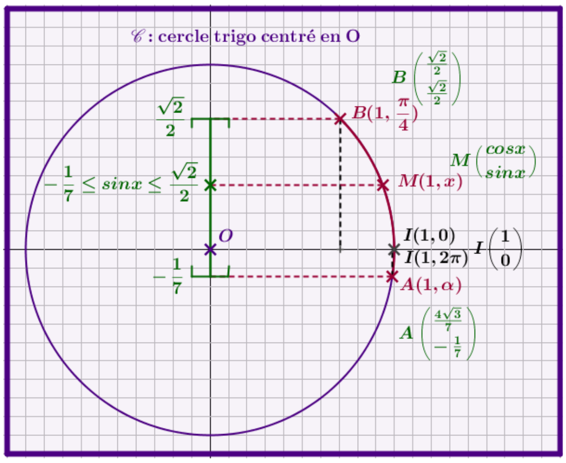
$$\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\underbrace{4\pi}_{2k\pi, k=2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha = -\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} .$$

$$\sin(-7\pi - \alpha) = \sin(-8\pi + \pi - \alpha) = \sin\left(\underbrace{-8\pi}_{2k\pi, k=-4} + \pi - \alpha\right) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = -\frac{1}{7} .$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = -\frac{1}{7} .$$

3) S désigne l'ensemble solution de l'inéquation : $x \in [0, 2\pi]$, $\sin\alpha \le \sin x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Pour la légende de la figure j'utilise les deux systèmes de coordonnées pour un point M du cercle trigonométique $\mathcal{C}$ centré en O . Avec x mesure de $(\overrightarrow{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$ les coordonnées cartésiennes de M sont $M\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$ et un couple de coordonnées polaires de M est $M(OM, x)$ soit $M(1, x)$ (M est le point image du réel x sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$)



Pour tout réel x de $[0, 2\pi]$,

$x \in S \Leftrightarrow \sin\alpha \le \sin x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$x \in S \Leftrightarrow \sin\alpha \le \sin x \le \sin\dfrac{\pi}{4}$

α est élément de $\left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ donc :

$$x \in S \Leftrightarrow \begin{array}{l}\left(\sin\alpha \le \sin x \le \sin\frac{\pi}{4} \text{ et } x \in [0, \pi]\right)\\ \text{ou } \left(\sin\alpha \le \sin x \le \sin\frac{\pi}{4} \text{ et } x \in [\pi, 2\pi]\right)\end{array}$$

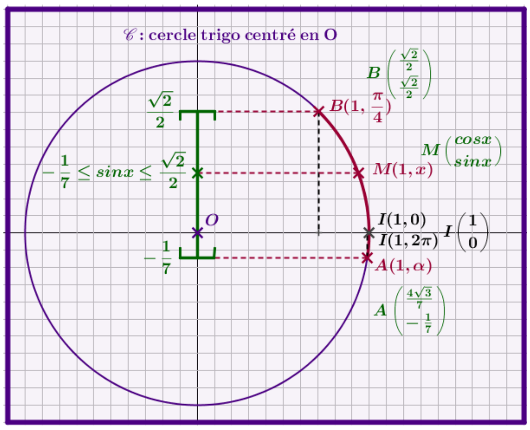
Graphiquement on obtient :

$x \in S \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ ou $\alpha \le x \le 2\pi$

Ainsi : $S = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup [\alpha, 2\pi]$

exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct et $\mathcal{C}$: cercle trigonométrique de centre O . Dans chacun des cas suivants on demande de faire une figure en représentant sur le cercle $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M images des réels x solutions de l'inéquation à étudier puis de résoudre graphiquement cette inéquation .



S_1 désigne l'ensemble solution de $(I_1) : x \in [0, 2\pi[\ , \cos x \geq -\dfrac{1}{2}$

Pour tout réel x de $]-\pi, \pi[$, $x \in S_1 \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi[$ et $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$

D'autre part : $-\dfrac{1}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

Et on a aussi : $-\dfrac{1}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos(\pi + \dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{4\pi}{3}$

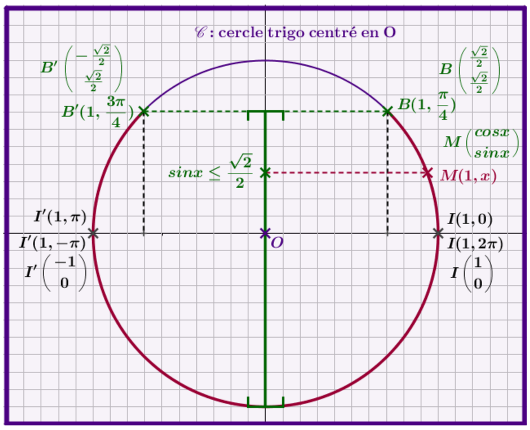
Donc : $x \in S_1 \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi[$ et $\cos x \geq \cos\dfrac{2\pi}{3}$

Et : $x \in S_1 \Leftrightarrow x \in [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi[$ et $\cos x \geq \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$x \in S_1 \Leftrightarrow \left(0 \leq x \leq \pi \text{ et } \cos x \geq \cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ou $\left(\pi \leq x < 2\pi \text{ et } \cos x \geq \cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Graphiquement on obtient : $S_1 = \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right[$

S_2 désigne l'ensemble solution de $(I_2) : x \in]-\pi, \pi[\ , \sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Pour tout réel x de $]-\pi, \pi[$, $x \in S_2 \Leftrightarrow x \in]-\pi, \pi[$ et $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'autre part : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \sin(\pi - \dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{3\pi}{4}$

Donc : $x \in S_2 \Leftrightarrow x \in]-\pi, \pi[$ et $\sin x \leq \sin\dfrac{\pi}{4}$

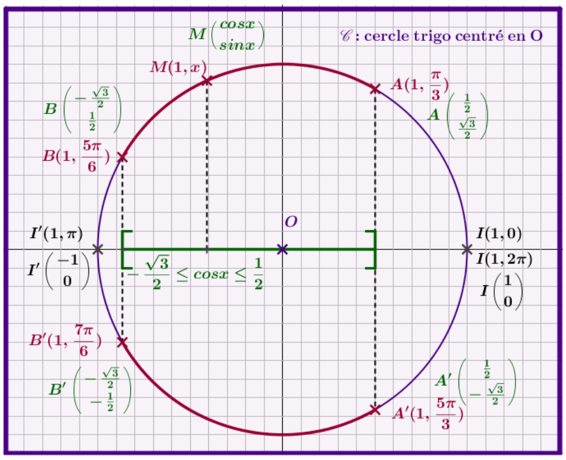
Et : $x \in S_2 \Leftrightarrow x \in]-\pi, 0] \cup [0, \pi[$ et $\sin x \leq \sin\dfrac{\pi}{4}$

$x \in S_2 \Leftrightarrow \left(-\pi < x \leq 0 \text{ et } \sin x \leq \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ou $\left(0 \leq x < \pi \text{ et } \sin x \leq \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Graphiquement on obtient :

$S_2 =]-\pi, 0] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[= \left]-\pi, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$

S_3 désigne l'ensemble solution de $(I_3) : x \in [0, 2\pi]\ , -\sqrt{3} \leq 2\cos x \leq 1$



Pour tout réel x de $[0, 2\pi]$, $x \in S_3 \Leftrightarrow\ x \in [0, 2\pi]$ et $-\sqrt{3} \leq 2\cos x \leq 1$

$x \in S_3 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ($2 > 0$) . D'autre part :

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} \left(= \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{3}$

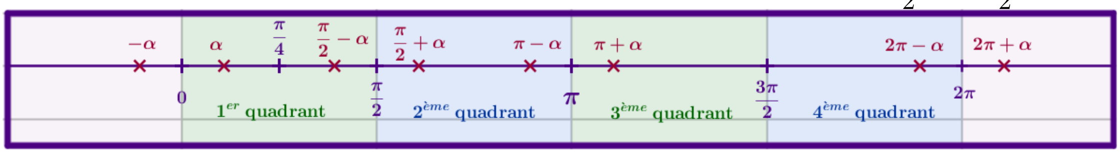
$$\text{Donc : } x \in S \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left(\cos\dfrac{5\pi}{6} \leq \cos x \leq \cos\dfrac{\pi}{3} \text{ et } x \in [0, \pi]\right) \\ \text{ou } \left(\cos\dfrac{7\pi}{6} \leq \cos x \leq \cos\dfrac{5\pi}{3} \text{ et } x \in [\pi, 2\pi]\right) \end{array}$$

Graphiquement on obtient : $S_3 = \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

exercice 5

les outils : $\rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$; $\rightarrow$ 1 tour en $\dfrac{\pi}{2}$: $4 \times \dfrac{\pi}{2} = 2\pi$

$\rightarrow$ les lignes des mesures associées à la mesure α (angles associés)



$\rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et donc : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$A(x) = \cos(x + 19\pi) + 2\cos(\dfrac{19\pi}{2} - x) + \sin(-\pi - x) + \sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = -\sin x$. En effet :

- $\cos(x + 19\pi) = \cos(x + \pi + \underbrace{18\pi}_{2k\pi\ ,\ k=9}) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\dfrac{19\pi}{2} - x) = \cos(\dfrac{20\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} - x) = \cos(\underbrace{10\pi}_{2k\pi\ ,\ k=5} - \dfrac{\pi}{2} - x) = \cos(-\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos\left[-(\dfrac{\pi}{2} + x)\right] = \cos(\dfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x$
- $\sin(-\pi - x) = \sin[-(\pi + x)] = -\sin(\pi + x) = -[-\sin x] = \sin x$
- $\sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos x$

Donc : $A(x) = (-\cos x) + 2(-\sin x) + (\sin x) + (\cos x) = -\sin x$

$B(x) = -\cos(-x + \frac{35\pi}{2}) + 2\sin(-\frac{17\pi}{2} - x) + 3\cos(21\pi - x) + 4\sin(-\frac{7\pi}{2} - x) = \sin x - \cos x$. En effet :

$\bullet \cos(-x + \frac{35\pi}{2}) = \cos(-x + \frac{36\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \cos(-x + \underbrace{18\pi}_{2k\pi\,,\,k=9} - \frac{\pi}{2}) = \cos(-x - \frac{\pi}{2}) = \cos\left[-(\frac{\pi}{2} + x)\right] = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

$\bullet \sin(-\frac{17\pi}{2} - x) = \sin(-\frac{16\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x) = \sin(\underbrace{-8\pi}_{2k\pi\,,\,k=-4} - \frac{\pi}{2} - x) = \sin(-\frac{\pi}{2} - x) = \sin\left[-(\frac{\pi}{2} + x)\right] = -\sin(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos x$

$\bullet \cos(21\pi - x) = \cos(\underbrace{20\pi}_{2k\pi\,,\,k=10} + \pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$

$\bullet \sin(-\frac{7\pi}{2} - x) = \sin(-\frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x) = \sin(\underbrace{-4\pi}_{2k\pi\,,\,k=-2} + \frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

Donc : $B(x) = -(-\sin x) + 2(-\cos x) + 3(-\cos x) + 4(\cos x) = \sin x - \cos x$

$C(x) = \cos^2(\frac{33\pi}{2} + x) + \cos^2(-\frac{\pi}{2} - x) + \sin^2(x - 39\pi) + \sin^2(\frac{23\pi}{2} + x) + \cos^2(\frac{13\pi}{2} - x) = 1 + 3\sin^2 x$. En effet :

$\bullet \cos(\frac{33\pi}{2} + x) = \cos(\frac{32\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x) = \cos(\underbrace{16\pi}_{2k\pi\,,\,k=8} + \frac{\pi}{2} + x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

$\bullet \cos(-\frac{\pi}{2} - x) = \cos\left[-(\frac{\pi}{2} + x)\right] = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

$\bullet \sin(x - 39\pi) = \sin(x + (\underbrace{-40\pi}_{2k\pi\,,\,k=-20}) + \pi) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\bullet \sin(\frac{23\pi}{2} + x) = \sin(\frac{24\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x) = \sin(\underbrace{12\pi}_{2k\pi\,,\,k=6} - \frac{\pi}{2} + x) = \sin(-\frac{\pi}{2} + x) = \sin\left[-(\frac{\pi}{2} - x)\right] = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$

$\bullet \cos(\frac{13\pi}{2} - x) = \cos(\frac{12\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x) = \cos(\underbrace{6\pi}_{2k\pi\,,\,k=3} + \frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

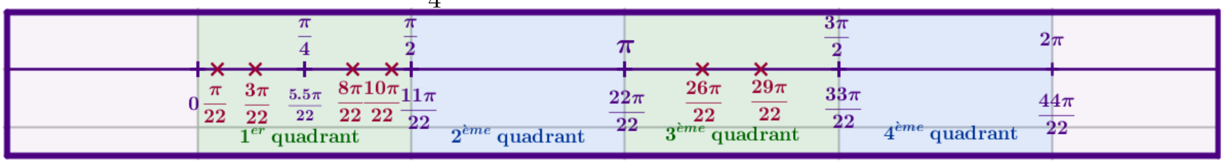
Donc : $C(x) = (-\sin x)^2 + (-\sin x)^2 + (-\sin x)^2 + (-\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \sin^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x$

Et : $C(x) = 3\sin^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3\sin^2 x + 1$ car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$D = \cos^2\frac{\pi}{22} + \cos^2\frac{3\pi}{22} + \cos^2\frac{8\pi}{22} + \cos^2\frac{10\pi}{22} + \cos^2\frac{26\pi}{22} + \cos^2\frac{29\pi}{22} + \cos^2\frac{11\pi}{22} = 3$

des conseils de méthode pour ce type de simplification

L'idée est de tout ramener entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir utiliser en fin de solution : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.



Le graphique ci-dessus (à faire au brouillon) peut être utile : il indique par exemple que cela ne sert à rien de transformer $\cos\frac{\pi}{22}$ et $\cos\frac{3\pi}{22}$, que l'on doit transformer $\cos\frac{8\pi}{22}$ et $\cos\frac{10\pi}{22}$ en utilisant les lignes de $\frac{\pi}{2} - \alpha$, que l'on peut commencer à transformer $\cos\frac{26\pi}{22}$ et $\cos\frac{29\pi}{22}$ en utilisant les lignes de $\pi + \alpha$.

$\bullet \cos\frac{8\pi}{22} = \cos\left(\frac{11\pi}{22} - \frac{3\pi}{22}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{22}\right) = \sin\frac{3\pi}{22}$

$\bullet \cos\frac{10\pi}{22} = \cos\left(\frac{11\pi}{22} - \frac{\pi}{22}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{22}\right) = \sin\frac{\pi}{22}$

$\bullet \cos\frac{26\pi}{22} = \cos\left(\frac{22\pi}{22} + \frac{4\pi}{22}\right) = \cos\left(\pi + \frac{4\pi}{22}\right) = -\cos\frac{4\pi}{22}$

$\bullet \cos\frac{29\pi}{22} = \cos\left(\frac{22\pi}{22} + \frac{7\pi}{22}\right) = \cos\left(\pi + \frac{7\pi}{22}\right) = -\cos\frac{7\pi}{22} = -\cos\left(\frac{11\pi}{22} - \frac{4\pi}{22}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{22}\right) = -\sin\frac{4\pi}{22}$

$\bullet \cos\frac{11\pi}{22} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

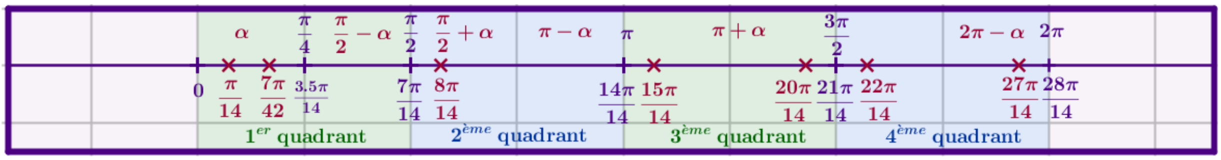
Donc : $D = \cos^2\frac{\pi}{22} + \cos^2\frac{3\pi}{22} + \left(\sin\frac{3\pi}{22}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{22}\right)^2 + \left(-\cos\frac{4\pi}{22}\right)^2 + \left(-\sin\frac{4\pi}{22}\right)^2 + (0)^2$

Et : $D = \cos^2\frac{\pi}{22} + \cos^2\frac{3\pi}{22} + \sin^2\frac{3\pi}{22} + \sin^2\frac{\pi}{22} + \cos^2\frac{4\pi}{22} + \sin^2\frac{4\pi}{22}$

Puis : $D = \left(\cos^2\frac{\pi}{22} + \sin^2\frac{\pi}{22}\right) + \left(\cos^2\frac{3\pi}{22} + \sin^2\frac{3\pi}{22}\right) + \left(\cos^2\frac{4\pi}{22} + \sin^2\frac{4\pi}{22}\right)$

Puis : $D = (1) + (1) + (1) = 3$ car : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$E=\sin^2\left(\frac{\pi}{14}\right)+\sin^2\left(-\frac{15\pi}{14}\right)+\sin^2\left(\frac{8\pi}{14}\right)+\sin^2\left(-\frac{22\pi}{14}\right)+\sin^2\left(\frac{20\pi}{14}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{42}\right)+\sin^2\left(-\frac{27}{14}\pi\right)=\frac{13}{4}$



• $\sin\left(-\frac{15\pi}{14}\right)=-\sin\left(\frac{15\pi}{14}\right)=-\sin\left(\frac{14\pi}{14}+\frac{\pi}{14}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{14}\right)=-\left(-\sin\frac{\pi}{14}\right)=\sin\frac{\pi}{14}$

• $\sin\left(\frac{8\pi}{14}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{14}+\frac{\pi}{14}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{14}$

• $\sin\left(-\frac{22\pi}{14}\right)=-\sin\left(\frac{22\pi}{14}\right)=-\sin\left(2\pi-\frac{6\pi}{14}\right)=-\sin\left(-\frac{6\pi}{14}\right)=-\left(-\sin\frac{6\pi}{14}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{14}-\frac{\pi}{14}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{14}$

• $\sin\left(\frac{20\pi}{14}\right)=\sin\left(\frac{14\pi}{14}+\frac{6\pi}{14}\right)=\sin\left(\pi+\frac{6\pi}{14}\right)=-\sin\frac{6\pi}{14}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)=-\cos\frac{\pi}{14}$

• $\sin\left(\frac{7\pi}{42}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

• $\sin\left(-\frac{27}{14}\pi\right)=-\sin\left(\frac{27\pi}{14}\right)=-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{14}\right)=-\left(\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)\right)=-\left(-\sin\frac{\pi}{14}\right)=\sin\frac{\pi}{14}$

Donc : $E=\sin^2\frac{\pi}{14}+\left(\sin\frac{\pi}{14}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{14}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{14}\right)^2$

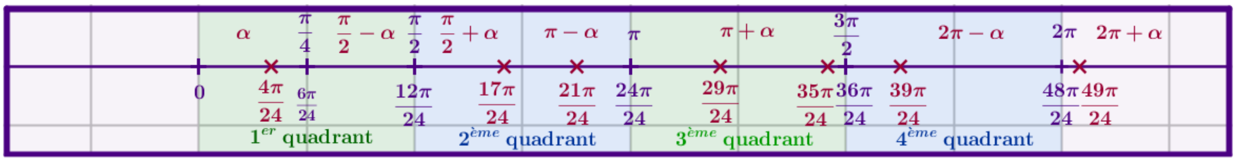
Puis : $E=\sin^2\frac{\pi}{14}+\sin^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{\pi}{14}+\frac{1}{4}+\sin^2\frac{\pi}{14}=3\left(\sin^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{\pi}{14}\right)+\frac{1}{4}$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ donc : $E=3\,(1)+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$.

exercice 6

1) Simplifier au mieux ce qui suit

$a=\cos^2\left(\frac{4\pi}{24}\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{24}\right)+\cos^2\left(\frac{21\pi}{24}\right)-\sin^2\left(\frac{29\pi}{24}\right)+\sin^2\left(\frac{35\pi}{24}\right)+\cos^2\left(\frac{39\pi}{24}\right)+\sin^2\left(\frac{49\pi}{24}\right)$



• $\cos\left(\frac{4\pi}{24}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\sin\left(\frac{17\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{12\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}\right)=\cos\frac{5\pi}{24}$

• $\cos\left(\frac{21\pi}{24}\right)=\cos\left(\frac{24\pi}{24}-\frac{3\pi}{24}\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{24}\right)=-\cos\frac{3\pi}{24}$

• $\sin\left(\frac{29\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{24\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}\right)=\sin\left(\pi+\frac{5\pi}{24}\right)=-\sin\frac{5\pi}{24}$

• $\sin\left(\frac{35\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{48\pi}{24}-\frac{13\pi}{24}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{12\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)=-\cos\frac{\pi}{24}$

• $\cos\left(\frac{39\pi}{24}\right)=\cos\left(\frac{48\pi}{24}-\frac{9\pi}{24}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{12\pi}{24}+\frac{3\pi}{24}\right)=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{24}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{24}\right)=\sin\frac{3\pi}{24}$

• $\sin\left(\frac{49\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{48\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{24}$

Donc : $a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\cos\frac{5\pi}{24}\right)^2+\left(-\cos\frac{3\pi}{24}\right)^2-\left(-\sin\frac{5\pi}{24}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{24}\right)^2+\left(\sin\frac{3\pi}{24}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{24}\right)^2$

D'où : $a=\frac{3}{4}-\cos^2\frac{5\pi}{24}+\cos^2\frac{3\pi}{24}-\sin^2\frac{5\pi}{24}+\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{3\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}$

Puis : $a=\frac{3}{4}-\left(\cos^2\frac{5\pi}{24}+\sin^2\frac{5\pi}{24}\right)+\left(\cos^2\frac{3\pi}{24}+\sin^2\frac{3\pi}{24}\right)+\left(\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$

Puis : $a=\frac{3}{4}-(1)+(1)+(1)=\frac{7}{4}$ car : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

2) Utiliser les formules de duplication pour justifier chacune des deux égalités suivantes :

$\rightarrow$ $b=16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{7\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}=1$. En effet :

$\sin\frac{7\pi}{24}=\sin\left(\frac{12\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}\right)=\cos\frac{5\pi}{24}$ et $\sin\frac{11\pi}{24}=\sin\left(\frac{12\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\right)=\cos\frac{\pi}{24}$

Donc : $b=16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{7\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}=16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\cos\frac{5\pi}{24}\times\cos\frac{\pi}{24}$

Et : $b=\left(2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\right)\times\left(2\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\right)\times 4$

D'autre part : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Donc :

$b = \sin\left(2\times\frac{\pi}{24}\right)\times\sin\left(2\times\frac{5\pi}{24}\right)\times 4 = 4\times\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$

Puis : $b = 4\times\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\left(\frac{6\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right) = 4\times\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = 4\times\sin\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{\pi}{12}$

Puis : $b = 2\times\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = 2\times\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$ car : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

Ainsi : $b = 2\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$

$\rightarrow$ $\underline{c = \cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}}$

On a : $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\frac{3\pi}{8}$ donc : $\cos^4\frac{5\pi}{8} = \left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^4 = \cos^4\frac{3\pi}{8}$

et : $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8}$ donc : $\cos^4\frac{7\pi}{8} = \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^4 = \cos^4\frac{\pi}{8}$.

Donc : $c = \cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8} = \cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8} = 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}\right)$

D'autre part : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ce qui entraîne : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Donc : $\cos^4\frac{\pi}{8} = \left(\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 = \frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}{4} = \frac{1+2\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}}{4}$

et : $\cos^4\frac{3\pi}{8} = \left(\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2$

et : $\cos^4\frac{3\pi}{8} = \frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}{4} = \frac{1-2\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}}{4}$.

L'égalité $c = 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}\right)$ devient alors : $c = 2\left(\frac{1+2\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}}{4}+\frac{1-2\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}}{4}\right)$. D'où :

$c = 2\left(\frac{2+2\cos^2\frac{\pi}{4}}{4}\right) = 2\left(\frac{2\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)}{4}\right) = \frac{4\left(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)}{4} = 1+\cos^2\frac{\pi}{4} = 1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

exercice 7

Résoudre les équations suivantes de la forme $x \in \mathbb{R}, P(\cos x) = 0$ ou $P(\sin x) = 0$

des conseils de méthode pour (E_1) et (E_2) : factoriser respectivement par $\cos x$, par $\sin x$

pour (E_3) et (E_4) : S désigne l'ensemble solution de l'équation étudiée .

étape 1) faire un changement de variable : $X = \cos x$ ou $X = \sin x$ pour créer $x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ ou $x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ P(X) = 0 \end{cases}$

étape 2) déterminer les racines de $P(X)$

étape 3) retour en x en résolvant $\cos x = X_0$ ou $\sin x = X_0$ avec X_0 racine de $P(X)$ (possible ssi X_0 compris entre -1 et 1)

S_1 désigne l'ensemble solution de (E_1) : $x \in \mathbb{R}, 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$ Pour tout réel x ,

$x \in S_1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow (\cos x)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$x \in S_1 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ ou $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

Par théorème : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\cos a = \cos b \Leftrightarrow a \equiv b\,[2\pi]$ ou $a \equiv -b\,[2\pi]$

Donc : $x \in S_1 \Leftrightarrow \left(x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\right.$ ou $\left.x \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\right)$ ou $\left(x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]\right.$ ou $\left.x \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\right)$

Et : $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\right\}$

S_2 désigne l'ensemble solution de (E_2) : $x \in \mathbb{R}, 2\sin^2 x + \sin x = 0$ Pour tout réel x ,

$x \in S_2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow (\sin x)(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x \in S_2 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0$ ou $\sin x = -\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin x = \sin 0$ ou $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Par théorème : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\sin a = \sin b \Leftrightarrow a \equiv b\,[2\pi]$ ou $a \equiv (\pi - b)\,[2\pi]$

Donc : $x \in S_2 \Leftrightarrow (x \equiv 0\,[2\pi]$ ou $x \equiv (\pi - 0)\,[2\pi])$ ou $\left(x \equiv \left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]\right.$ ou $\left.x \equiv \left[\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right][2\pi]\right)$

Et : $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv 0\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{7\pi}{6}\,[2\pi]\right\}$

S_3 désigne l'ensemble solution de $(E_3) : x \in \mathbb{R}\,, 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$

étape 1 : Pour tout réel x ,

$x \in S_3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ 2X^2 + 5X - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ en notant : $P(X) = 2X^2 + 5X - 3$

étape 2 : Le discriminant Δ de $P(X)$ vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2$

Δ étant strictement positif , $P(X)$ admet deux racines distinctes X_1 et X_2 égales à :

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{4} = -\dfrac{12}{4} = -3$; $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $P(X) = 0 \Leftrightarrow X = -3$ ou $X = \dfrac{1}{2}$

étape 3 : L'équivalence $x \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ devient : $x \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ X = -3 \text{ ou } X = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

D'où : $x \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ X = -3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = \cos x \\ \text{ou } X = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ et $x \in S_3 \Leftrightarrow \cos x = -3$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2}$ (A ce stade, X disparaît)

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1,1]$ et $-3 \notin [-1,1]$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \neq -3$ et : $x \in S_3 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

D'où : $x \in S_3 \Leftrightarrow \cos x = \cos \dfrac{\pi}{3}$ et par théorème : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\cos a = \cos b \Leftrightarrow a \equiv b\,[2\pi]$ ou $a \equiv -b\,[2\pi]$.

Par conséquent : $x \in S_3 \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et : $S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}\,,\, x \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \right\}$

S_4 désigne l'ensemble solution de $(E_4) : x \in \mathbb{R}\,, 4\sin^2 x + 2(1+\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$

Préalable : $(1-\sqrt{2})^2 = (1)^2 - 2(1)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$

Résolution de (E_4) . Pour tout réel x ,

$x \in S_4 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 2(1+\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ 4X^2 + 2(1+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$ changement de variable : $X = \sin x$

$x \in S_4 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ en notant : $P(X) = 4X^2 + 2(1+\sqrt{2})X + \sqrt{2}$

Le discriminant Δ de $P(X)$ vaut :

$\Delta = b^2 - 4ac = (2(1+\sqrt{2}))^2 - 4(4)(\sqrt{2}) = 4(1+\sqrt{2})^2 - 16\sqrt{2} = 4\left(1^2 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) - 16\sqrt{2} = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 16\sqrt{2}$

$\Delta = 12 - 8\sqrt{2} = 4(3 - 2\sqrt{2}) = 4(1-\sqrt{2})^2$ (d'après le préalable : $(1-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$)

$\Delta = 2^2(1-\sqrt{2})^2 = \left(2(1-\sqrt{2})\right)^2 = \left(2 - 2\sqrt{2}\right)^2$

valeur de $\sqrt{\Delta}$: Attention! $\sqrt{\Delta}$ est le seul réel positif qui a pour carré Δ ; $\left(2-2\sqrt{2}\right)^2$ est le carré des deux réels opposés suivants : $2 - 2\sqrt{2}$ et $-2 + 2\sqrt{2}$; ayant $\sqrt{2} > 1$ et $2 > 0$ on déduit $2\sqrt{2} > 2$ puis : $2 - 2\sqrt{2} < 0$ et $-2 + 2\sqrt{2} > 0$.

Par conséquent , on doit choisir impérativement pour $\sqrt{\Delta}$: $\sqrt{\Delta} = -2 + 2\sqrt{2}$

Δ étant strictement positif , $P(X)$ admet deux racines distinctes X_1 et X_2 égales à :

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2(1+\sqrt{2}) - \left(-2+2\sqrt{2}\right)}{8} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{-4\sqrt{2}}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2(1+\sqrt{2}) + \left(-2+2\sqrt{2}\right)}{8} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

Par conséquent : $P(X) = 0 \Leftrightarrow X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = -\dfrac{1}{2}$

retour en x L'équivalence $x \in S4 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ devient : $x \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } X = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

D'où : $x \in S_4 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin x \\ X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = \sin x \\ \text{ou } X = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ et $x \in S_4 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

D'autre part : $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $-\dfrac{1}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x \in S_4 \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ou $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Par théorème : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\sin a = \sin b \Leftrightarrow a \equiv b\,[2\pi]$ ou $a \equiv (\pi - b)\,[2\pi]$

Donc : $x \in S_4 \Leftrightarrow \left(x \equiv \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \left[\pi - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right][2\pi]\right)$ ou $\left(x \equiv \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \left[\pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right][2\pi]\right)$

Et : $S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}\,,\, x \equiv \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \dfrac{5\pi}{4}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv \left(-\dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \dfrac{7\pi}{6}\,[2\pi] \right\}$

1) transformer l'égalité de l'équation proposée en une égalité de deux cosinus (à privilégier quand c'est possible) ou en une égalité de deux sinus , utiliser les lignes des angles associés (tableau ci-dessous) , utiliser une ligne à connaître .

égalité à tranformer	propriétés des lignes des angles associés utilisables	égalité de départ équivalente à ?
$\cos X = -\cos Y$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha)$ ou $-\cos\alpha = \cos(\pi+\alpha)$	$\cos X = -\cos Y \Leftrightarrow \cos X = \cos(\pi - Y)$
$\sin X = -\sin Y$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ ou $-\sin\alpha = \sin(\pi+\alpha)$	$\sin X = -\sin Y \Leftrightarrow \sin X = \sin(-Y)$
$\cos X = \sin Y$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ ou $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$\cos X = \sin Y \Leftrightarrow \cos X = \cos(\frac{\pi}{2} - Y)$
$\cos X = -\sin Y$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$\cos X = -\sin Y \Leftrightarrow \cos X = \cos(\frac{\pi}{2} + Y)$

2) utiliser par théorème l'une des deux propriétés fondamentales suivantes

$$\begin{cases} \forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi] \text{ ou } X \equiv -Y\,[2\pi] \\ \forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \sin X = \sin Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi] \text{ ou } X \equiv (\pi - Y)\,[2\pi] \end{cases}$$

remarque : L'égalité de deux cosinus donne l'application la plus rapide !

3) travailler avec des égalités de congruence , l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$. x , a , b réels quelconques

3-1 transférer avec l'addition

Théorème : $\boxed{x + a \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv (b-a)\,[2\pi]}$

justification

$x + a \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x + a = b + 2k\pi$

$x + a \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = (b-a) + 2k\pi$

$x + a \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv (b-a)\,[2\pi]$

remarque : on travaille comme dans $\mathbb{R}$ en conservant la nature du modulo 2π

3-2 transférer avec la multiplication (nature du modulo changée !)

Théorème : $\boxed{a \neq 0 \text{ et } ax \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{b}{a}\left[\frac{2\pi}{a}\right]}$

justification

$ax \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, ax = b + 2k\pi$

$ax \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{b}{a} + \frac{2k\pi}{a}$ $(a \neq 0)$ (équivalence 2)

$ax \equiv b\,[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{b}{a} + k\left(\frac{2\pi}{a}\right) \Leftrightarrow x \equiv \frac{b}{a}\left[\frac{2\pi}{a}\right]$

remarque : on travaille comme dans $\mathbb{R}$ mais en changeant le modulo 2π en modulo $\frac{2\pi}{a}$ (équivalence 2 : tout est divisé par a !)

3-3 modulo 2π (sens direct) et modulo -2π (sens indirect) : on définit les mêmes réels (on raisonne par tour complet et le tour en sens direct pour l'un devient le tour en sens indirect pour l'autre) . Théorème : $\boxed{x \equiv a\,[-2\pi] \Leftrightarrow x \equiv a\,[2\pi]}$

justification $x \equiv a\,[-2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + k(-2\pi) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + (-k)(2\pi)$

$x \equiv a\,[-2\pi] \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x = a + k'(2\pi)$ en posant : $k' = -k$, $-k \in \mathbb{Z}$ car : $k \in \mathbb{Z}$ et donc : $x \equiv a\,[-2\pi] \Leftrightarrow x \equiv a\,[2\pi]$

$\boxed{S_1 \text{ désigne l'ensemble solution de } (E_1) : x \in \mathbb{R}, -2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}}$

Pour tout réel x , $x \in S_1 \Leftrightarrow -2\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(-2 \neq 0)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

Donc : $x \in S_1 \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ devient : $x \in S_1 \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{3\pi}{4}$ (une égalité entre deux cosinus !)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv -Y\,[2\pi]$. D'où :

$x \in S_1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $x + \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$

$x \in S_1 \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{9\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(-\frac{9\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{13\pi}{12}\,[2\pi]$.

Ainsi : $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{13\pi}{12}\,[2\pi]\right\}$

$\boxed{S_2 \text{ désigne l'ensemble solution de } (E_2) : x \in \mathbb{R}, \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(2x + \frac{\pi}{5})}$

Pour tout réel x , $x \in S_2 \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos(2x + \frac{\pi}{5})$ (dès le départ : une égalité entre deux cosinus !)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv -Y\,[2\pi]$. D'où :

$x \in S_2 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \equiv \left(2x + \frac{\pi}{5}\right)[2\pi]$ ou $x + \frac{\pi}{6} \equiv -\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)[2\pi]$

$x \in S_2 \Leftrightarrow x - 2x \equiv \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ ou $x + 2x \equiv \left(-\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ et $\frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{30}$; $\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{30}$

$x \in S_2 \Leftrightarrow -x \equiv \left(\frac{\pi}{30}\right)[2\pi]$ ou $3x \equiv \left(-\frac{11\pi}{30}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{\pi}{30}\right)[-2\pi]$ ou $x \equiv \left(-\frac{11\pi}{90}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

$x \in S_2 \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{\pi}{30}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(-\frac{11\pi}{90}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ et $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \left(-\frac{\pi}{30}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \left(-\frac{11\pi}{90}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

S_3 désigne l'ensemble solution de (E_3) : $x \in \mathbb{R}, \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(3x+\frac{\pi}{4})$

Pour tout réel x , $x \in S_3 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(3x+\frac{\pi}{4})$ (dès le départ : une égalité entre deux sinus !)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \sin X = \sin Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (\pi - Y)\,[2\pi]$. Donc :

$x \in S_3 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{2} \equiv \left(3x+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$ ou $x+\frac{\pi}{2} \equiv \left(\pi-(3x+\frac{\pi}{4})\right)[2\pi] \Leftrightarrow x-3x \equiv \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ ou $x+\frac{\pi}{2} \equiv \left(\pi - 3x - \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

$x \in S_3 \Leftrightarrow -2x \equiv \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ ou $x+3x \equiv \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)[2\pi] \Leftrightarrow -2x \equiv \left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$ ou $4x \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

$x \in S_3 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{-2}\right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{16}\left[\frac{2\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8}\,[-\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{16}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

$x \in S_3 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8}\,[\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{16}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi : $S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \frac{\pi}{8}\,[\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{16}\left[\frac{\pi}{2}\right]\right\}$

S_4 désigne l'ensemble solution de (E_4) : $x \in \mathbb{R}, \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = \cos(x+\frac{3\pi}{5})$

Pour tout réel x , $x \in S_4 \Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = \cos(x+\frac{3\pi}{5})$ (une égalité du type $\sin Y = \cos X$)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ donc : $\sin(2x+\frac{\pi}{5}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(2x+\frac{\pi}{5})\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}-2x\right)$

Par conséquent : $x \in S_4 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{10}-2x\right) = \cos(x+\frac{3\pi}{5})$ (on a ainsi obtenu une égalité de deux cosinus)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv -Y\,[2\pi]$. D'où :

$x \in S_4 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{10} - 2x \equiv \left(x+\frac{3\pi}{5}\right)[2\pi]$ ou $\frac{3\pi}{10} - 2x \equiv -\left(x+\frac{3\pi}{5}\right)[2\pi]$

$x \in S_4 \Leftrightarrow -x-2x \equiv \left(\frac{3\pi}{5}-\frac{3\pi}{10}\right)[2\pi]$ ou $x-2x \equiv \left(-\frac{3\pi}{5}-\frac{3\pi}{10}\right)[2\pi]$

$x \in S_4 \Leftrightarrow -3x \equiv \left(\frac{3\pi}{10}\right)[2\pi]$ ou $-x \equiv \left(-\frac{9\pi}{10}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{3\pi}{30}\right)\left[-\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \left(\frac{9\pi}{10}\right)[-2\pi]$

$x \in S_4 \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{\pi}{10}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{9\pi}{10}\,[2\pi]$. Ainsi : $S_4 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \left(-\frac{\pi}{10}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{9\pi}{10}\,[2\pi]\right\}$

S_5 désigne l'ensemble solution de (E_5) : $x \in \mathbb{R}, \sin(x+\frac{3\pi}{4}) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) = 0$

Pour tout réel x ,

$x \in S_5 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{3\pi}{4}) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x+\frac{3\pi}{4})$ (une égalité du type $\cos X = -\sin Y$)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ donc : $-\sin(x+\frac{3\pi}{4}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+(x+\frac{3\pi}{4})\right) = \cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$.

Par conséquent : $x \in S_5 \Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$ (une égalité de deux cosinus)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv -Y\,[2\pi]$. D'où :

$x \in S_5 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{2} \equiv \left(x+\frac{5\pi}{4}\right)[2\pi]$ ou $x+\frac{\pi}{2} \equiv -\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)[2\pi]$

$x \in S_5 \Leftrightarrow x-x \equiv \left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$ ou $x+x \equiv \left(-\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi] \Leftrightarrow 0 \equiv \left(\frac{3\pi}{4}\right)[2\pi]$ ou $2x \equiv \left(-\frac{7\pi}{4}\right)[2\pi]$

$0 \equiv \left(\frac{3\pi}{4}\right)[2\pi]$ est faux car $\frac{3\pi}{4}$ n'est pas une mesure de l'angle nul (qui a pour mesure 0) . Donc :

$x \in S_5 \Leftrightarrow 2x \equiv \left(-\frac{7\pi}{4}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{7\pi}{8}\right)\left[\frac{2\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{7\pi}{8}\right)[\pi]$ et : $S_5 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \left(-\frac{7\pi}{8}\right)[\pi]\right\}$

S_6 désigne l'ensemble solution de (E_6) : $x \in \mathbb{R}, \cos(x+\frac{\pi}{3}) = -\cos(x+\frac{\pi}{6})$

Pour tout réel x ,

$x \in S_6 \Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{3}) = -\cos(x+\frac{\pi}{6})$ (une égalité du type $\cos X = -\cos Y$)

Je choisis : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha)$ donc : $-\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos\left(\pi-(x+\frac{\pi}{6})\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$

Par conséquent : $x \in S_6 \Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$ (une égalité de deux cosinus)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv -Y\,[2\pi]$. D'où :

$x \in S_6 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3} \equiv \left(\frac{5\pi}{6}-x\right)[2\pi]$ ou $x+\frac{\pi}{3} \equiv -\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)[2\pi]$

$x \in S_6 \Leftrightarrow x+x \equiv \left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$ ou $x-x \equiv \left(-\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\frac{3\pi}{6}\right)[2\pi]$ ou $0 \equiv \left(-\frac{7\pi}{6}\right)[2\pi]$

$0 \equiv \left(-\frac{7\pi}{6}\right)[2\pi]$ est faux car $-\frac{7\pi}{6}$ n'est pas une mesure de l'angle nul (qui a pour mesure 0) . Donc :

$x \in S_6 \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\frac{3\pi}{6}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{3\pi}{12}\right)\left[\frac{2\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]$ et : $S_6 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]\right\}$

S_7 désigne l'ensemble solution de $(E_7) : x \in \mathbb{R}\,, \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = -\sin(x+\frac{3\pi}{5})$

Pour tout réel x , $x \in S_7 \Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = -\sin(x+\frac{3\pi}{5})$ (une égalité du type $\sin X = -\sin Y$)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\,, -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ donc : $x \in S_7 \Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = \sin(-x-\frac{3\pi}{5})$ (une égalité de deux sinus)

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}\,, \forall Y \in \mathbb{R}\,, \sin X = \sin Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (\pi - Y)\,[2\pi]$. Donc :

$x \in S_7 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{5} \equiv (-x-\frac{3\pi}{5})\,[2\pi]$ ou $2x+\frac{\pi}{5} \equiv \left(\pi - (-x-\frac{3\pi}{5})\right)[2\pi]$

$x \in S_7 \Leftrightarrow 2x+x \equiv (-\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{5})\,[2\pi]$ ou $2x-x \equiv \left(\pi+\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)[2\pi] \Leftrightarrow 3x \equiv \left(-\frac{4\pi}{5}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(\frac{7\pi}{5}\right)[2\pi]$

$x \in S_7 \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{4\pi}{15}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{7\pi}{5}\,[2\pi]$. Ainsi : $S_7 = \left\{x \in \mathbb{R}\,, x \equiv \left(-\frac{4\pi}{15}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{7\pi}{5}\,[2\pi]\right\}$

exercice 9

outils : les formules à connaître

lignes de $a+b$ en fonction de celles de a et b

$$\begin{cases} F_1 : \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ F_2 : \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

lignes de $a-b$ en fonction de celles de a et b

$$\begin{cases} F_3 : \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ F_4 : \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases}$$

lignes de $2a$ en fonction de celles de a

$$\begin{cases} F_5 : \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \\ F_6 : \sin 2a = 2 \sin a \cos a \end{cases}$$

lignes de x en fonction de celles de sa moitié $\frac{x}{2}$

$$\begin{cases} F_7 : \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \\ F_8 : \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \end{cases}$$

cos^2x et sin^2x en fonction de $cos2x$

$F_9 : \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

relations liant cos^2x et sin^2x

$F_{10} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

égalité 1 : $cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosx - sinx)$

En utilisant la formule F_1 on obtient : $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = (\cos x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

égalité 2 : $sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosx + sinx)$

En utilisant la formule F_2 on obtient : $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = (\sin x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\cos x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

égalité 3 : $cos(x-\frac{\pi}{2}) = sinx$

En utilisant la formule F_3 on obtient : $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Donc : $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = (\cos x)(0) + (\sin x)(1) = \sin x$

égalité 4 : $cos^4x - sin^4x = cos2x$

$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 - \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$ (avec a et b réels : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}\,, \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ (voir F_5) et $\forall x \in \mathbb{R}\,, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (voir F_{10}) .

Donc : $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos 2x)(1) = \cos 2x$

égalité 5 : $cos^4x + sin^4x = \frac{3 + cos4x}{4}$

$\cos^4 x + \sin^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 + \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ (avec a et b réels : $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$)

$\cos^4 x + \sin^4 x = (1)^2 - 2\,(\sin x \cos x)^2$ car : $\forall x \in \mathbb{R}\,, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

En utilisant la formule F_6 on obtient : $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Donc : $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ et $(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

Par conséquent : $\cos^4 x + \sin^4 x = (1)^2 - 2\,(\sin x \cos x)^2$ devient : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$

D'où : $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{4 - 2\sin^2 2x}{4} = \frac{3 + \left(1 - 2\sin^2 2x\right)}{4}$

D'autre part : $\forall a \in \mathbb{R}\,, \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ (voir F_5) . Donc : $1 - 2\sin^2 2x = \cos(2 \times 2x) = \cos 4x$

Ainsi : $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3 + \left(1 - 2\sin^2 2x\right)}{4}$ devient : $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$

égalité 6 : $cosx + cos(x+\frac{2\pi}{3}) + cos(x+\frac{4\pi}{3}) = 0$

En utilisant la formule F_1 on a : $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos x\cos\frac{2\pi}{3} - \sin x\sin\frac{2\pi}{3}$ et $\cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x\cos\frac{4\pi}{3} - \sin x\sin\frac{4\pi}{3}$.

D'autre part : $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ donc : $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

Et : $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ donc : $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$

Par conséquent : $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos x\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) - \sin x\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}$

Et : $\cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) - \sin x\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}$

D'où : $\cos x + \cos(x+\frac{2\pi}{3}) + \cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x + \left(-\cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Et : $\cos x + \cos(x+\frac{2\pi}{3}) + \cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x - 2\cos x\cos\frac{\pi}{3} = \cos x - 2(\cos x)\left(\frac{1}{2}\right)$ car : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\cos x + \cos(x+\frac{2\pi}{3}) + \cos(x+\frac{4\pi}{3}) = \cos x - \cos x = 0$

égalité 7 : $sinx + sin(x+\frac{2\pi}{3}) + sin(x+\frac{4\pi}{3}) = 0$

En utilisant la formule F_2 on a : $\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin x\cos\frac{2\pi}{3} + \cos x\sin\frac{2\pi}{3}$ et $\sin(x+\frac{4\pi}{3}) = \sin x\cos\frac{4\pi}{3} + \cos x\sin\frac{4\pi}{3}$.

D'autre part : $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ donc : $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$

Et : $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ donc : $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$

Par conséquent : $\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin x\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \cos x\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}$

et : $\sin(x+\frac{4\pi}{3}) = \sin x\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \cos x\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}$

D'où : $\sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) + \sin(x+\frac{4\pi}{3}) = \sin x + \left(-\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Et : $\sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) + \sin(x+\frac{4\pi}{3}) = \sin x - 2\sin x\cos\frac{\pi}{3} = \sin x - 2(\sin x)\left(\frac{1}{2}\right)$ car : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) + \sin(x+\frac{4\pi}{3}) = \sin x - \sin x = 0$

égalité 8 : $cos^2x + cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) + cos^2(x+\frac{4\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

En utilisant la formule F_1 on a : $\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}$ et $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos x\cos\frac{2\pi}{3} - \sin x\sin\frac{2\pi}{3}$.

Or : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos x\left(\frac{1}{2}\right) - \sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

Et : $\cos(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos x\left(-\frac{1}{2}\right) - \sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

D'où : $\cos^2(x+\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cos x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\cos x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$

$\cos^2(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x$

Et : $\cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$ car : $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \\ (-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = (a+b)^2 \end{cases}$

$\cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \left(\frac{1}{2}\cos x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\cos x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 = \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x$

On obtient alors :

$\cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x + \frac{3}{4}\sin^2 x$

$\cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x$

$\cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x = \frac{3}{2}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc : $\cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$

égalité 9 : $sin^2x + sin^2(x + \frac{2\pi}{3}) + sin^2(x + \frac{4\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

En utilisant la formule F_2 on a : $\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}$ et $\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin x \cos\frac{2\pi}{3} + \cos x \sin\frac{2\pi}{3}$.

Or : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin x\left(\frac{1}{2}\right) + \cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

Et : $\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin x\left(-\frac{1}{2}\right) + \cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

D'où : $\sin^2(x+\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2$

$\sin^2(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{4}\cos^2 x$

Et : $\sin^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \left(-\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2$ car : $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \\ (-a+b)^2 = [-(a-b)]^2 = (a-b)^2 \end{cases}$

$\sin^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{4}\cos^2 x$

On obtient alors :

$\sin^2 x + \sin^2(x+\frac{\pi}{3}) + \sin^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{4}\cos^2 x$

$\sin^2 x + \sin^2(x+\frac{\pi}{3}) + \sin^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{3}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{3}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Donc : $\sin^2 x + \sin^2(x+\frac{\pi}{3}) + \sin^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$

égalité 10 : $cos^2x\ sin^2x = \frac{1-cos4x}{8}$

D'après les deux formules de linéarisation F_9 : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

D'où : $\cos^2 x\sin^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = \frac{(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)}{4} = \frac{1-\cos^2 2x}{4}$

D'autre part : en changeant x en $2x$ dans $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ on obtient : $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 2(2x)}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2}$

Donc : $\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1-\cos^2 2x}{4}$ devient : $\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1-\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)}{4}$.

D'où : $\cos^2 x\sin^2 x = \frac{\frac{2-(1+\cos 4x)}{2}}{4} = \frac{2-1-\cos 4x}{2\times 4} = \frac{1-\cos 4x}{8}$

égalité 11 : $(cosx + sinx)(1 - \frac{1}{2}sin2x) = cos^3x + sin^3x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\sin x\cos x$ (formule de duplication F_6) . Donc : $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x$ et :

$(\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x) = \cos x + \sin x - \cos^2 x\sin x - \sin^2 x\cos x$

$(\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos x - \sin^2 x\cos x + \sin x - \cos^2 x\sin x = \cos x(1-\sin^2 x) + \sin x(1-\cos^2 x)$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

D'où : $(\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos x(\cos^2 x) + \sin x(\sin^2 x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

égalité 12 : $cos3x = 4cos^3x - 3cosx$

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x$ (Formule d'addition F_1)

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (formules de duplication F_5 et F_6)

Donc : $\cos 3x = \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x\cos x$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Donc : $\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x$

Ainsi : $\cos 3x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

égalité 13 : $sin3x = 3sinx - 4sin^3x$

$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$ (formule d'addition F_2)

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ (formules de duplication F_5 et F_6)

Donc : $\sin 3x = (2\sin x \cos x)\cos x + \left(1 - 2\sin^2 x\right)\sin x = 2\sin x \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Donc : $\sin 3x = 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x - 2\sin^3 x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$

Ainsi : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

égalité 14 : $sin4x = 4sinxcos^3x - 4cosxsin^3x$

$\sin 4x = \sin[2(2x)] = 2\sin 2x \cos 2x$ (formule de duplication F_6)

$\sin 4x = 2(2\sin x\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$ (formules de duplication F_5 et F_6)

$\sin 4x = 4\sin x \cos^3 x - 4\cos x \sin^3 x$

égalité 15 : $cos(x+y)cos(x-y) = cos^2x - sin^2y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$ et $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ (formules d'addition F_1 et F_3)

Donc : $\cos(x+y)\cos(x-y) = (\cos x\cos y - \sin x \sin y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$ (produit de la forme $(a-b)(a+b)$)

Et : $\cos(x+y)\cos(x-y) = (\cos x \cos y)^2 - (\sin x \sin y)^2 = \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y$

D'autre part : $\forall y \in \mathbb{R}, \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Donc : $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x\left(1 - \sin^2 y\right) - \left(1 - \cos^2 x\right)\sin^2 y = \cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x \sin^2 y$

Ainsi : $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

égalité 16 : $sin(x+y)sin(x-y) = sin^2x - sin^2y$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ et $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$ (formules d'addition F_2 et F_4)

Donc : $\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y)$ (produit de la forme $(a+b)(a-b)$)

Et : $\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2 = \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y$

D'autre part : $\forall y \in \mathbb{R}, \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Donc : $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x\left(1 - \sin^2 y\right) - \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y$

Ainsi : $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

égalité 17 : $sin(x+y)cos(x-y) + sin(x-y)cos(x+y) = sin2x$

Pour la suite , on note $A = \sin(x+y)\cos(x-y)$ et $B = \sin(x-y)\cos(x+y)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ et $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ (formules d'addition F_2 et F_3)

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ et $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ (formules d'addition F_4 et F_1)

Donc : $A = \sin(x+y)\cos(x-y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y)$

Puis : $A = \sin x \cos x \cos^2 y + \sin^2 x \cos y \sin y + \cos^2 x \sin y \cos y + \sin^2 y \cos x \sin x$

D'où : $A = \sin x \cos x\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) + \sin y \cos y\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Donc : $A = \sin x \cos x\,(1) + \sin y \cos y\,(1) = \sin x \cos x + \sin y \cos y$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (formule de duplication F_6) . Donc : $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$.

Ainsi : $A = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2y$

De même pour $B = \sin(x-y)\cos(x+y)$ on a :

$B = \sin(x-y)\cos(x+y) = (\sin x \cos y - \cos x \sin y)(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$

Puis : $B = \sin x \cos x \cos^2 y - \sin^2 x \cos y \sin y - \cos^2 x \sin y \cos y + \sin^2 y \cos x \sin x$

Puis : $B = \sin x \cos x\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) - \sin y \cos y\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ donc : $B = \sin x \cos x\,(1) - \sin y \cos y\,(1)$

Et : $B = \sin x \cos x - \sin y \cos y = \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2y$ car : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

On obtient alors :

$\sin(x+y)\cos(x-y) + \sin(x-y)\cos(x+y) = A + B = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2y + \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2y$

Ainsi : $\sin(x+y)\cos(x-y) + \sin(x-y)\cos(x+y) = \sin 2x$

exercice 10

On a : $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ et $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ (formules d'addition F_1 et F_2)

Et : $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ et $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$ (formules d'addition F_3 et F_4)

Par conséquent :

1-1 $\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y=2\cos x\cos y$

D'où : $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

1-2 $\cos(x+y)-\cos(x-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y-\cos x\cos y-\sin x\sin y=-2\sin x\sin y$

Et : $\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

1-3 $\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y$

Et : $\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

2) 2-1 d'après **1-1** $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

$\cos(x+y)+\cos(x-y)$ est de la forme $\cos a+\cos b$ en posant : $a=x+y$ et $b=x-y$

Pour utiliser **1-1** on doit en préalable exprimer x et y en fonction de a et b . Or :

$\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)+(x-y)=a+b\\(x+y)-(x-y)=a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=a+b\\2y=a-b\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{a+b}{2}$ et $y=\dfrac{a-b}{2}$

En changeant $x+y$ en a , $x-y$ en b , x en $\dfrac{a+b}{2}$ et y en $\dfrac{a-b}{2}$, $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$ devient :

$\cos a+\cos b=2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

2-2 d'après **1-2** $\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$

En changeant $x+y$ en a , $x-y$ en b , x en $\dfrac{a+b}{2}$ et y en $\dfrac{a-b}{2}$, $\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$ devient :

$\cos a-\cos b=-2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

2-3 d'après **1-3** $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

En changeant $x+y$ en a , $x-y$ en b , x en $\dfrac{a+b}{2}$ et y en $\dfrac{a-b}{2}$, $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$ devient :

$\sin a+\sin b=2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

exercice 11

En utilisant les formules de trigo à connaître exprimer chacun des nombres suivants soit comme un sinus , soit comme un cosinus , soit comme le carré d'un sinus , soit comme le carré d'un cosinus .

$a=-\cos\dfrac{7\pi}{15}=\cos\left(\pi-\dfrac{7\pi}{15}\right)=\cos\dfrac{8\pi}{15}$ en utilisant : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\cos(\pi-x)=-\cos x$

$b=2\cos^2\dfrac{17\pi}{24}-1=\cos\left[2\left(\dfrac{17\pi}{24}\right)\right]=\cos\dfrac{17\pi}{12}$ en utilisant : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$c=2\sin\dfrac{5\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}=\sin\left[2\left(\dfrac{5\pi}{24}\right)\right]=\cos\dfrac{5\pi}{12}$ en utilisant : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\sin 2x=2\sin x\cos x$

$d=1-\sin^2\dfrac{2\pi}{9}=\cos^2\dfrac{2\pi}{9}$ en utilisant : $\forall x\in\mathbb{R}\,,1-\sin^2 x=\cos^2 x$

$e=\sin^2\dfrac{3\pi}{10}-\cos^2\dfrac{3\pi}{10}=-\left[\cos^2\dfrac{3\pi}{10}-\sin^2\dfrac{3\pi}{10}\right]=-\cos\left[2\left(\dfrac{3\pi}{10}\right)\right]=-\cos\dfrac{3\pi}{5}$ en utilisant : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

puis : $e=\cos\left(\pi-\dfrac{3\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{5}$ en utilisant : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\cos(\pi-x)=-\cos x$

$f=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(-\dfrac{3\pi}{20}\right)$ en utilisant la formule d'addition F_1

ou : $f=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\dfrac{13\pi}{20}\right)$ avec la formule d'addition F_2

$g=\dfrac{1+\cos\dfrac{10\pi}{21}}{2}=\dfrac{1+\cos\left[2\left(\dfrac{5\pi}{21}\right)\right]}{2}=\cos^2\dfrac{5\pi}{21}$ en utilisant la formule F_9 : $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ avec $x=\dfrac{5\pi}{21}$

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{7\pi}{8}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{7\pi}{8}=\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{7\pi}{8}-\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{7\pi}{8}=\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{17\pi}{24}\right)$ en utilisant la formule d'addition F_4

exercice 12

1) <u>Valeur de $\cos 2x$</u>

1-1 on donne : $\cos x=-\dfrac{1}{4}$. $\forall x\in\mathbb{R}\,,\cos 2x=2\cos^2 x-1$ donc $\cos x=-\dfrac{1}{4}$ entraîne : $\cos 2x=2\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2-1=\dfrac{1}{8}-1=-\dfrac{7}{8}$

1-2 on donne : $\sin x=\dfrac{3}{5}$. $\forall x\in\mathbb{R}\,,\cos 2x=1-2\sin^2 x$ donc $\sin x=\dfrac{3}{5}$ entraîne : $\cos 2x=1-2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1-\dfrac{18}{25}=\dfrac{7}{25}$

2) valeur de $\sin 2x$. Pour appliquer $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\sin x \cos x$, il faut connaître $\sin x$ et $\cos x$!

2-1 on donne : $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\pi < x < 2\pi$

$\rightarrow$ valeur de $\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ donc : $\sin^2 x = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

D'autre part : $\sin^2 x = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $\pi < x < 2\pi$ entraîne $\sin x < 0$. Donc : $\sin x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\rightarrow$ déduction : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\sin x \cos x$ donc : $\sin 2x = 2\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2-2 on donne : $\sin x = \dfrac{3}{5} et -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\rightarrow$ valeur de $\cos x$: $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc $\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

D'autre part : $\cos^2 x = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{4}{5}$ ou $\cos x = -\dfrac{4}{5}$ et $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ entraîne $\cos x > 0$. Donc : $\cos x = \dfrac{4}{5}$

$\rightarrow$ déduction : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\sin x \cos x$ donc : $\sin 2x = 2\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{24}{25}$

3) Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 4x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$

On a : $\cos 4x = \cos[2(2x)]$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$. Donc : $\cos 4x = 1 - 2\sin^2(2x)$.

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\sin x \cos x$. Donc : $\cos 4x = 1 - 2(2\sin x \cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

Et : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Donc : $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$

exercice 13

Préalable : $\left\{\begin{array}{l} F_1 : \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b) \ ; \ F_2 : \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b) \\ F_3 : \sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a+b) \ ; \ F_4 : \sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a-b) \end{array}\right.$

1)1-1 Reconnaître A puis B comme un cosinus avec : $A = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ et $B = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

- $A = \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ d'après F_1
- $B = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin x = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin x$

$B = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\sin x = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right)$ d'après F_1

1-2 Reconnaître C puis D comme un sinus avec : $C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$; $D = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x$

- $C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$ d'après F_4
- $D = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = -\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x = \sin x \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos x$

$D = \sin x \cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\cos x = \sin\left(x + \dfrac{7\pi}{6}\right)$ d'après F_3

2) On donne $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$; on demande de reconnaître α

2-1 $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sin\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\alpha = \cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) \text{ d'après } F_1 \\ \sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) \text{ d'après } F_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \cos\dfrac{10\pi}{24} \\ \sin\alpha = \sin\dfrac{10\pi}{24} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \cos\dfrac{5\pi}{12} \\ \sin\alpha = \sin\dfrac{5\pi}{12} \end{array}\right.$

Ayant : $\cos\alpha = \cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\alpha = \sin\dfrac{5\pi}{12}$ on déduit : $\alpha \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

2-2 $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = -\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \sin\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = -\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\alpha = \cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = -\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sin\alpha = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) \text{ d'après } F_1 \\ \sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) \text{ d'après } F_4 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\alpha = -\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \\ \sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right) \\ \sin\alpha = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \cos\dfrac{11\pi}{12} \\ \sin\alpha = \sin\dfrac{11\pi}{12} \end{cases}$$

Ayant : $\cos\alpha = \cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\alpha = \sin\dfrac{11\pi}{12}$

on déduit : $\alpha \equiv \dfrac{11\pi}{12}\ [2\pi]$

3) $\rightarrow$ Justifions : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$. Pour tout réel x ,

$$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - \cos x) = \sin x - \cos x$$

$\rightarrow$ S_3 désigne l'ensemble solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour tout réel x ,

$x \in S_3 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (prouvé précédemment : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$)

$x \in S_3 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{6}$

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \sin X = \sin Y \Leftrightarrow X \equiv Y\ [2\pi]$ ou $X \equiv (\pi - Y)\ [2\pi]$. Donc :

$x \in S_3 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(\dfrac{\pi}{4}+\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

$x \in S_3 \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{13\pi}{12}\ [2\pi]$. Ainsi : $\boxed{S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \dfrac{13\pi}{12}\ [2\pi]\right\}}$

4) S_4 désigne l'ensemble solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$. Pour tout réel x ,

$x \in S_4 \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x = -\cos\dfrac{\pi}{3}$

$x \in S_4 \Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\ [2\pi]$ ou $X \equiv (-Y)\ [2\pi]$. Donc :

$x \in S_4 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x + \dfrac{\pi}{3} \equiv \left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)[2\pi]$

$x \in S_4 \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv (-\pi)\ [2\pi]$. Ainsi : $\boxed{S_4 = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv (-\pi)\ [2\pi]\right\}}$

exercice 14

Le réel x est tel que : $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1) valeur numérique de $\cos 2x$ On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (formule de duplication F_5)

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ donc : $\cos 2x = 1 - 2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - 2\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = 1 - \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{8}$

$$\cos 2x = \frac{8-(\sqrt{5}-1)^2}{8} = \frac{8-\left((\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}+1^2\right)}{8} = \frac{8-5+2\sqrt{5}-1}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

valeur numérique de $\sin 2x$ On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 2x = 2\sin x\cos x$ (formule de duplication F_6)

on doit d'abord calculer $\cos x$ en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Donc : $\cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}$

$$\cos^2 x = \frac{16-(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{16-\left((\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1^2\right)}{16} = \frac{16-(6-2\sqrt{5})}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)^2$$

D'autre part : $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos x > 0$ et : $\cos^2 x = \left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)^2 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

Par conséquent : $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos^2 x = \left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)^2 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Ainsi : $\cos x = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

On obtient ensuite la valeur de $\sin 2x$: $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right) = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{8}}$

2) Vérifions : $\cos 4x = \sin x$. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ donc $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$

$$\cos 4x = 1 - 2\left(\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = 1 - 2\frac{(\sqrt{5}-1)^2(5+\sqrt{5})}{32} = 1 - \frac{\left((\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1^2\right)(5+\sqrt{5})}{16}$$

$$\cos 4x = \frac{16-(6-2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{16} = \frac{16-(30+6\sqrt{5}-10\sqrt{5}-10)}{16} = \frac{4\sqrt{5}-4}{16} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et : } \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin x$$

Donc : $\cos 4x = \sin x$ est vraie .

<u>déduction de la valeur de x</u> On a : $\cos 4x = \sin x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (-Y)\,[2\pi]$.

Donc : $\cos 4x = \sin x \Leftrightarrow 4x \equiv \left(\frac{\pi}{2} - x\right)[2\pi]$ ou $4x \equiv -\left(\frac{\pi}{2} - x\right)[2\pi] \Leftrightarrow 4x + x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $4x - x \equiv -\left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$

$\cos 4x = \sin x \Leftrightarrow 5x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $3x \equiv -\left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$ ou $x \equiv -\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

D'autre part : $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; $x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{10} + k\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $x \equiv -\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{\pi}{6} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

• $0 < \frac{\pi}{10} + k\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{10} < k\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{10} < k\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{10} \times \frac{5}{2\pi} < k\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \frac{5}{2\pi} < \frac{2\pi}{5} \times \frac{5}{2\pi}$

$0 < \frac{\pi}{10} + k\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < 1 \Leftrightarrow k = 0$ (car $k \in \mathbb{Z}$) . Donc : $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10}$

• $0 < -\frac{\pi}{6} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < k\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < k\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \times \frac{3}{2\pi} < k\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times \frac{3}{2\pi} < \frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{2\pi}$

$0 < -\frac{\pi}{6} + k\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < 1$ et l'intervalle $\left]\frac{1}{4}, 1\right[$ ne contient aucun entier k .

Donc $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x \equiv -\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\frac{2\pi}{3}\right]\right)$ est impossible . Donc : $\cos 4x = \sin x$ et $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vrai si et seulement si : $\boxed{x = \frac{\pi}{10}}$

<u>remarque</u> : On récupère ainsi des nouvelles lignes trigonométriques : avec $x = \frac{\pi}{10}$

$\cos 4x = \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ devient : $\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$; $\cos x = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ devient : $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$

$\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ devient : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$; $\sin 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ devient : $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$

exercice 15

1) <u>valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$</u>

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ et pour tous réels a et b , $\begin{cases} F_1 : \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ F_3 : \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases}$. Donc

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2) <u>S désigne l'ensemble solution de (E_5) : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \sqrt{6}(\sin x + \cos x) = -2\sqrt{2}$</u> . Pour tout réel x ,

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \sqrt{6}(\sin x + \cos x) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x - \sqrt{6}\sin x - \sqrt{6}\cos x = -2\sqrt{2}$

$x \in S \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) - \cos x\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sin x\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) - \cos x\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4}$ ($4 \neq 0$)

$x \in S \Leftrightarrow \sin x\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right) - \cos x\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{7\pi}{12} - \cos x\sin\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'après **1)**

$\sin x\cos\frac{7\pi}{12} - \cos x\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(x - \frac{7\pi}{12}\right)$ d'après F_3 et $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ($\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$)

Donc : $x \in S \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \sin X = \sin Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (\pi - Y)\,[2\pi]$. D'où :

$x \in S \Leftrightarrow x - \frac{7\pi}{12} \equiv \left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$ ou $x - \frac{7\pi}{12} \equiv \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(\frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

$x \in S \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{12\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right)[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{4\pi}{12}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(\frac{22\pi}{12}\right)[2\pi]$

$x \in S \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$ ou $x \equiv \left(\frac{11\pi}{6}\right)[2\pi]$. Ainsi : $\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R}, x \equiv \left(\frac{\pi}{3}\right)[2\pi] \text{ ou } x \equiv \left(\frac{11\pi}{6}\right)[2\pi]\right\}}$

exercice 16

1) Pour tout réel x , $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (formules de duplication)

Donc : $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ et $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$. Puis : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

On a donc justifié deux formules de linéarisation (la question **1)** est une question de cours !)

2) En changeant x en $\frac{\pi}{8}$ dans les deux égalités justifiées précédemment , on obtient :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \left(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}\right)^2$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}\right)^2$$

D'autre part : $\rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)^2 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

$\rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)^2 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$\rightarrow \frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ entraîne : $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$.

Par conséquent : $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

3) S désigne l'ensemble solution de $(E) : x \in \mathrm{R}\,, \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x = \sqrt{2}$. Pour tout réel x ,

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2\sin x\cos x = \sqrt{2}$

Pour tout réel x , $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (formules de duplication) . Donc :

$x \in S \Leftrightarrow \sqrt{3}\,(\cos 2x) + \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\,(\cos 2x) + \sin 2x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \in S \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x = \cos\frac{\pi}{4}$ et pour tous réels a et b , $\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b) = \cos(b-a)$.

D'où : $x \in S \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (-Y)\,[2\pi]$.

Donc : $x \in S \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $2x - \frac{\pi}{6} \equiv \left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi] \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ ou $2x \equiv \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

Puis : $x \in S \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right)[2\pi]$ ou $2x \equiv \left(-\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right)[2\pi] \Leftrightarrow 2x \equiv \left(\frac{5\pi}{12}\right)[2\pi]$ ou $2x \equiv \left(-\frac{\pi}{12}\right)[2\pi]$

Puis : $x \in S \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{5\pi}{24}\right)\left[\frac{2\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv \left(-\frac{\pi}{24}\right)\left[\frac{2\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \equiv \left(\frac{5\pi}{24}\right)[\pi]$ ou $x \equiv \left(-\frac{\pi}{24}\right)[\pi]$

Ainsi : $\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R}\,, x \equiv \left(\frac{5\pi}{24}\right)[\pi] \text{ ou } x \equiv \left(-\frac{\pi}{24}\right)[\pi]\right\}}$

exercice 17

α étant un réel quelconque , on lui associe l'équation $(E_\alpha) : x \in \mathbb{R}\,, x^2 + 2(\cos\alpha)x + \cos 2\alpha = 0$

Préalable : l'équation (E_α) est une équation du second degré car le coefficient de x^2, qui vaut 1 , n'est pas nul .

1) On note $(E_\alpha) : x \in \mathbb{R}\,, P_\alpha(x) = 0$ avec $P_\alpha(x) = x^2 + 2(\cos\alpha)x + \cos 2\alpha$

L'équation (E_α) admet le réel 0 comme solution si et seulement si : $P_\alpha(0) = 0$.

Or : $P_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow (0)^2 + 2(\cos\alpha)(0) + \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \cos\frac{\pi}{2}$.

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (-Y)\,[2\pi]$.

Donc : $P_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ ou $2\alpha \equiv \left(-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]$ ou $\alpha \equiv \left(-\frac{\pi}{4}\right)[\pi]$.

Ainsi : L'équation (E_α) admet le réel 0 comme solution si et seulement si : $\alpha \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]$ ou $\alpha \equiv \left(-\frac{\pi}{4}\right)[\pi]$.

2) L'équation (E_α) admet le réel 1 comme solution si et seulement si : $P_\alpha(1) = 0$.

Or : $P_\alpha(1) = 0 \Leftrightarrow (1)^2 + 2(\cos\alpha)(1) + \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$

Pour tout réel α , $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Donc : $P_\alpha(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos\alpha + \left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 0$

$P_\alpha(1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \underset{2\neq 0}{\Leftrightarrow} \cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow (\cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = 0$

$P_\alpha(1) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$ ou $1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$ ou $\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos 0$ ou $\cos x = \cos\pi$

Par théorème : $\forall X \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}, \cos X = \cos Y \Leftrightarrow X \equiv Y\,[2\pi]$ ou $X \equiv (-Y)\,[2\pi]$.

Donc : $\begin{cases} \cos\alpha = \cos 0 \Leftrightarrow \alpha \equiv 0\,[2\pi] \text{ ou } \alpha \equiv (-0)\,[2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv 0\,[2\pi] \\ \cos\alpha = \cos\pi \Leftrightarrow \alpha \equiv \pi\,[2\pi] \text{ ou } \alpha \equiv (-\pi)\,[2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv \pi\,[2\pi] \text{ car } -\pi \equiv \pi\,[2\pi] \end{cases}$

Et : $P_\alpha(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha \equiv 0\,[2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi\,[2\pi]$.

Ainsi : L'équation (E_α) admet le réel 1 comme solution si et seulement si : $\alpha \equiv 0\,[2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi\,[2\pi]$.

3) (E_α) est une équation du second degré et son discriminant Δ vaut :

$\Delta = b^2 - 4ac = [2(\cos\alpha)]^2 - 4(1)(\cos 2\alpha) = 4\cos^2\alpha - 4\cos 2\alpha$ et pour tout réel α , $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 4\cos^2\alpha - 8\cos^2\alpha + 4 = 4 - 4\cos^2\alpha = 4\left(1 - \cos^2\alpha\right)$

$\Delta = 4\sin^2\alpha$ car $\forall\alpha \in \mathbb{R}\,, 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

signe de Δ : $4 > 0$ et $\forall\alpha \in \mathbb{R}\,, \sin^2\alpha \geq 0$. Donc : $\forall\alpha \in \mathbb{R}\,, 4\sin^2\alpha \geq 0$.

Ainsi : pour tout réel α , Δ est positif ou nul

Par conséquent : l'équation (E_α) admet bien pour toute valeur de α deux solutions (éventuellement égales) .

exercice 18 Les cinq questions suivantes sont indépendantes et font intervenir quatre égalités ou quatre énoncés qui sont vrais ou faux . Pour chaque question il y a exactement deux égalités ou deux énoncés vrais .

question Q1 **situation : α est un réel quelconque pour lequel les membres des quatre égalités proposées sont définis**

VRAI : $cos(\frac{21\pi}{2}+\alpha)-sin(5\pi+\alpha)=0$ On a : $\sin(5\pi+\alpha)=\sin(\underbrace{4\pi}_{2k\pi\,,\,k=2}+\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

Et : $\cos(\frac{21\pi}{2}+\alpha)=\cos(\frac{20\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos(\underbrace{10\pi}_{2k\pi\,,\,k=5}+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

Donc : $\cos(\frac{21\pi}{2}+\alpha)-\sin(5\pi+\alpha)=-\sin\alpha-(-\sin\alpha)=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$

Faux : $sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+cos(\alpha-\pi)=2\,cos\alpha$ contre-exemple : avec $\alpha=\pi$, on obtient : $2\cos\alpha=2\cos\pi=2(-1)=-2$.

Et : $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha-\pi)=\sin(\pi-\frac{\pi}{2})+\cos(\pi-\pi)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos 0=1+1=2$

Or : $2\neq -2$. Donc : $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha-\pi)=2\cos\alpha$ est faux pour : $\alpha=\pi$.

remarque : $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha-\pi)=\sin\left[-(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right]+\cos\left[-(\pi-\alpha)\right]=-\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)$.

Donc : $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha$ et $-2\cos\alpha=2\cos\alpha$ est faux par exemple pour $\alpha=\pi$.

Faux : $1+tan^2\alpha=\frac{-1}{cos^2\alpha}$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ sont définis pour tout réel α vérifiant : $\cos\alpha\neq 0$.

Dans ces conditions , l'égalité proposée est fausse car ses deux membres sont de signes contraires . En effet :

$\rightarrow \tan^2\alpha\geq 0$ entraîne $1+\tan^2\alpha\geq 0+1$ soit $1+\tan^2\alpha\geq 1$ et donc $1+\tan^2\alpha>0$

$\rightarrow$ avec $\cos\alpha\neq 0$ on a : $\cos^2\alpha>0$ puis $\frac{-1}{\cos^2\alpha}<0$ (car $-1<0$) .

ou bien contre-exemple : en prenant $\alpha=0$, on obtient : $1+\tan^2\alpha=1+\tan^2 0=1+(0)^2=1$ et :

$\frac{-1}{\cos^2\alpha}=\frac{-1}{\cos^2 0}=\frac{-1}{(1)^2}=-1$. Or : $1\neq -1$. Donc : $1+\tan^2\alpha=\frac{-1}{\cos^2\alpha}$ est faux pour : $\alpha=0$

remarque : $1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (égalité définie pour tout réel α vérifiant : $\cos\alpha\neq 0$)

VRAI : $1-cos4\alpha=8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ formule de duplication : Pour tout réel x , $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

Donc pour tout réel x , $1-\cos 2x=2\sin^2 x$. En changeant x en 2α dans $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ on obtient :

$1-\cos 2\,(2\alpha)=2\sin^2(2\alpha)$ soit $1-\cos 4\alpha=(\sin 2\alpha)^2$.

formule de duplication : Pour tout réel x , $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

Donc : $1-\cos 4\alpha=(\sin 2\alpha)^2$ devient : $1-\cos 4\alpha=2\,(2\sin\alpha\cos\alpha)^2$ soit : $1-\cos 4\alpha=8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

question Q2 **situation : x est un réel compris strictement entre π et $\frac{3\pi}{2}$ vérifiant : $cos^2x=\frac{9}{25}$**

Faux : x vérifie $cosx=-\frac{3}{5}$ et $sinx=\frac{4}{5}$ Avec x strictement compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ on a : $\cos x<0$ et $\sin x<0$.

Or $\frac{4}{5}>0$. Donc $\sin x=\frac{4}{5}$ est faux et l'énoncé proposé devient faux .

VRAI : x vérifie $sin2x=\frac{24}{25}$ et $cos2x=-\frac{7}{25}$ valeurs de $\cos 2x$: Formule de duplication : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

Avec $\cos^2 x=\frac{9}{25}$ on obtient : $\cos 2x=2\left(\frac{9}{25}\right)-1=\frac{18}{25}-1=-\frac{7}{25}$

valeurs de $\sin 2x$: Formule de duplication : $\sin 2x=2\sin x\cos x$

• valeurs de $\cos x$ et $\sin x$: Avec $x\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ on a : $\cos x<0$ et $\sin x<0$ et $\cos^2 x=\frac{9}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$.

$\rightarrow \cos^2 x=\left(\frac{3}{5}\right)^2$ et $\cos x<0 \Leftrightarrow \left(\cos x=\frac{3}{5}\text{ ou }\cos x=-\frac{3}{5}\right)$ et $\cos x<0$. Donc : $\cos x=-\frac{3}{5}$

$\rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

$\sin^2 x=\left(\frac{4}{5}\right)^2$ et $\sin x<0 \Leftrightarrow \left(\sin x=\frac{4}{5}\text{ ou }\sin x=-\frac{4}{5}\right)$ et $\sin x<0$. Donc : $\sin x=-\frac{4}{5}$

• on déduit : $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$

VRAI : x vérifie $sin(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

formule d'addition : $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$. Donc :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-4\sqrt{2}}{10}+\frac{3\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Faux : x vérifie $cos(x+\frac{\pi}{3})=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ formule d'addition : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$. Donc :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-3+4\sqrt{3}}{10}=-\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

$-\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\neq\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ (réels opposés non nuls) donc : $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ est faux .

question Q3 **situation : On note S l'ensemble solution de l'équation suivante : $(E):x\in\mathbb{R},8sin^3x+3\sqrt{3}=0$**

VRAI : $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ sont des solutions de (E)

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc pour $x=-\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$ on a : $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. On obtient alors :

$8\sin^3x+3\sqrt{3}=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+3\sqrt{3}=8\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)+3\sqrt{3}=-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=0$. Par conséquent : $-\frac{\pi}{3}\in S$ et $\frac{4\pi}{3}\in S$

faux : $x\in S$ entraîne $\pi+x\in S$ contre-exemple : $x=-\frac{\pi}{3}$. D'après l'énoncé précédent : $-\frac{\pi}{3}\in S$ vrai .

D'autre part : $x=-\frac{\pi}{3}$ entraîne : $\pi+x=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ puis $\sin(\pi+x)=\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On obtient ensuite : $8\sin^3x+3\sqrt{3}=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+3\sqrt{3}=8\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)+3\sqrt{3}=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

$6\sqrt{3}\neq0$ donc $\frac{2\pi}{3}\notin S$ et l'énoncé " $x\in S$ entraîne $\pi+x\in S$ " est faux .

VRAI : $x\in S$ entraîne $\pi-x\in S$ $x\in S$ signifie $8\sin^3x+3\sqrt{3}=0$. D'autre part : $\sin(\pi-x)=\sin x$.

Donc : $x\in S$ entraîne : $8\left[\sin(\pi-x)\right]^3+3\sqrt{3}=8\sin^3x+3\sqrt{3}=0$ soit : $\pi-x\in S$

Faux : $x\in S$ entraîne $-x\in S$ contre-exemple : $x=-\frac{\pi}{3}$. On a prouvé précédemment : $-\frac{\pi}{3}\in S$ vrai .

D'autre part : $x=-\frac{\pi}{3}$ entraîne : $-x=\frac{\pi}{3}$ puis $\sin(-x)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On obtient ensuite : $8\sin^3x+3\sqrt{3}=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+3\sqrt{3}=8\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)+3\sqrt{3}=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

$6\sqrt{3}\neq0$ donc $\frac{\pi}{3}\notin S$ et l'énoncé " $x\in S$ entraîne $-x\in S$ " est faux .

question Q4 **situation : x étant un réel quelconque, on donne quatre expressions de la forme $acosx+bsinx$**

VRAI : $-cosx+sinx$ est égal à $\sqrt{2}\ \sin(\frac{5\pi}{4}-x)$

formule d'addition : $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$. Donc : $\sin\left(\frac{5\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{5\pi}{4}\cos x-\cos\frac{5\pi}{4}\sin x$

Et $\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$ entraîne : $\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{4}-x)=\sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x\right]=-\cos x+\sin x$. L'énoncé est bien vrai

Faux : $-cosx-\sqrt{3}sinx$ est égal à $2\ sin(x-\frac{11\pi}{6})$ contre-exemple :

$$\text{avec } x=2\pi : \begin{cases}-\cos x-\sqrt{3}\sin x=-\cos(2\pi)-\sqrt{3}\sin(2\pi)=-1-(\sqrt{3}\times0)=-1\\ 2\sin\left(x-\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\pi-\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\times\frac{1}{2}=1\end{cases}$$

$1\neq-1$ donc $-\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(2\pi-\frac{11\pi}{6}\right)$ est faux pour $x=2\pi$.

VRAI : $\sqrt{3}cosx + sinx$ est égal à $2\ cos(\frac{11\pi}{6}+x)$

formule d'addition : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$. Donc : $\cos\left(\frac{11\pi}{6}+x\right) = \cos\frac{11\pi}{6}\cos x - \sin\frac{11\pi}{6}\sin x$.

D'autre part : $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ donc $\begin{cases} \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Donc : $2\cos\left(\frac{11\pi}{6}+x\right) = 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x - \left(-\frac{1}{2}\right)\sin x\right] = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

Faux : $-cosx - sinx$ est égal à $\sqrt{2}\ cos(x+\frac{5\pi}{4})$ contre-exemple : avec $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} -\cos x - \sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\times 0 = 0 \end{cases}$$

$-\sqrt{2} \neq 0$ donc $-\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x+\frac{5\pi}{4})$ est faux pour $x = \frac{\pi}{4}$.

question Q5   **situation : On examine les éventuelles solutions de 4 équations trigonométriques**

VRAI : l'équation $x \in \mathbb{R}, sinxcosx = -2$ n'admet pas de solution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (formule de duplication) . Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Par conséquent : $\sin x\cos x = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -4$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x \in [-1,1]$ et $-4 \notin [-1,1]$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x \neq -4$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x\cos x \neq -2$.

L'équation $x \in \mathbb{R}$, $\sin x\cos x = -2$ n'admet donc pas de solution et l'énoncé proposé est vrai .

VRAI : l'équation $x \in \mathbb{R}, sin^2x + 2cos^2x + 1 = 0$ n'admet pas de solution

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x + 1 = \cos^2 x + 2$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = -2$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x \geq 0$ et $-2 < 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x \neq -2$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 1 \neq 0$.

L'équation $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 1 = 0$ n'admet donc pas de solution et l'énoncé proposé est vrai

Faux : l'équation $x \in \mathbb{R}, 3cos^2x - 5cosx - 12 = 0$ admet au moins une solution

On note S l'ensemble solution de $x \in \mathbb{R}$, $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$. Pour tout réel x on a :

$x \in S \Leftrightarrow 3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ 3X^2 - 5X - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ en notant : $P(X) = 3X^2 - 5X - 12$

3 est une racine de $P(X)$ car : $P(3) = 3(3)^2 - 5(3) - 12 = 27 - 15 - 12 = 0$.

Donc $P(X)$ est factorisable par $X - 3$ et $\forall X \in \mathbb{R}$, $P(X) = (X-3)(3X+4)$. Par conséquent :

$x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ P(X) = 0 \end{cases}$ devient : $x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ (X-3)(3X+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos x \\ X = 3 \text{ ou } X = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 3$ ou $\cos x = -\frac{4}{3}$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \in [-1,1]$ et $-\frac{4}{3} \notin [-1,1]$ et $3 \notin [-1,1]$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \neq -\frac{4}{3}$ et $\cos x \neq 3$.

L'équation $x \in \mathbb{R}$, $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$ n'admet donc pas de solution et l'énoncé proposé est faux

Faux : l'équation $x \in \mathbb{R}, cos^2x - sin^2x = -2$ admet au moins une solution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (formule de duplication) . Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x - \sin^2 x = -2 \Leftrightarrow \cos 2x = -2$

D'autre part : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x \in [-1,1]$ et $-2 \notin [-1,1]$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x \neq -2$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x - \sin^2 x \neq -2$.

L'équation $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x - \sin^2 x = -2$ n'admet donc pas de une solution et l'énoncé proposé est faux .