Trigo - énoncés feuille d'exercices 2

situation le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O

attendu les valeurs des lignes trigonométriques des réels distincts de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ doivent être justifiées

exercice 1

On donne la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ par : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

1) Développer $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2$ puis en déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

2) En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$, $\sin -\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{13\pi}{12}$, $\cos\frac{11\pi}{12}$, $\sin\frac{41\pi}{12}$

exercice 2

les outils : $\rightarrow$ le signe de $\cos\alpha$ et le signe de $\sin\alpha$

$\rightarrow \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ et donc : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$;$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

1) a est un réel vérifiant $\cos a = -\frac{3}{5}$ et $a \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Calculer $\sin a$ puis en déduire la valeur de $\tan a$

2) b est un réel vérifiant $\sin b = \frac{3}{4}$. Calculer $\cos b$ dans chacun des cas suivants : 1) $b \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$; 2) $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

exercice 3

α est défini par : $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ et $\cos^2\alpha = \frac{48}{49}$. **1)** Que vaut $\cos\alpha$?

2) En déduire la valeur de chacun des réels suivants : $\sin\alpha$; $\tan\alpha$; $\sin(25\pi+\alpha)$; $\cos(\frac{9\pi}{2}+\alpha)$; $\sin(-7\pi-\alpha)$; $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$

3) Résoudre graphiquement : $x\in[0,2\pi]$, $\sin\alpha \le \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct et $\mathcal{C}$: cercle trigonométrique de centre O

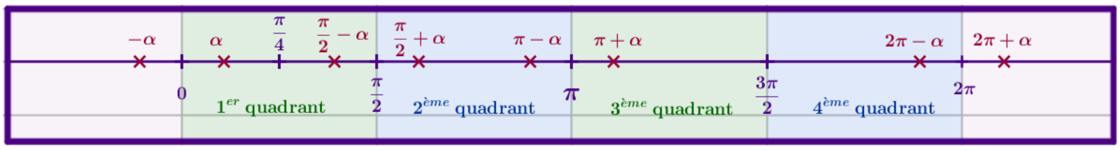
Dans chacun des cas suivants on demande de faire une figure en représentant sur le cercle $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M images des réels x solutions de l'inéquation proposée puis de résoudre graphiquement cette inéquation .

1^er cas $(I_1) : x\in[0,2\pi[$, $\cos x \le -\frac{1}{2}$; 2^ème cas $(I_2) : x \in]-\pi,\pi[$, $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3^ème cas $(I_3) : x\in[0,2\pi]$, $-\sqrt{3} \le 2\cos x \le 1$

exercice 5

les outils : $\rightarrow \forall k\in\mathbb{Z}$, $\cos(\alpha+2k\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha+2k\pi) = \sin\alpha$; $\rightarrow$ 1 tour en $\frac{\pi}{2}$: .... $\times \frac{\pi}{2} = 2\pi$

$\rightarrow$ les lignes des mesures associées à la mesure α (angles associés)



$\rightarrow \forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ et donc : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$;$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

Simplifier au mieux les égalités suivantes :

$$A(x) = \cos(x+19\pi) + 2\cos\left(\frac{19\pi}{2}-x\right) + \sin(-\pi-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$B(x) = -\cos\left(-x+\frac{35\pi}{2}\right) + 2\sin\left(-\frac{17\pi}{2}-x\right) + 3\cos(21\pi-x) + 4\sin\left(-\frac{7\pi}{2}-x\right)$$

$$C(x) = \cos^2\left(\frac{33\pi}{2}+x\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin^2(x-39\pi) + \sin^2\left(\frac{23\pi}{2}+x\right) + \cos^2\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)$$

$$D = \cos^2\frac{\pi}{22} + \cos^2\frac{3\pi}{22} + \cos^2\frac{8\pi}{22} + \cos^2\frac{10\pi}{22} + \cos^2\frac{26\pi}{22} + \cos^2\frac{29\pi}{22} + \cos^2\frac{11\pi}{22}$$

$$E = \sin^2\frac{\pi}{14} + \sin^2\left(-\frac{15\pi}{14}\right) + \sin^2\left(\frac{8\pi}{14}\right) + \sin^2\left(-\frac{22\pi}{14}\right) + \sin^2\left(\frac{20\pi}{14}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{42}\right) + \sin^2\left(-\frac{27}{14}\pi\right)$$

réponse

$A(x) = -\sin x$

$B(x) = \sin x - \cos x$

$C(x) = 1 + 3\sin^2 x$

$D = 3$

$E = \frac{13}{4}$

exercice 6

1) Simplifier au mieux ce qui suit

$$a = \cos^2\left(\frac{4\pi}{24}\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{24}\right) + \cos^2\left(\frac{21\pi}{24}\right) - \sin^2\left(\frac{29\pi}{24}\right) + \sin^2\left(\frac{35\pi}{24}\right) + \cos^2\left(\frac{39\pi}{24}\right) + \sin^2\left(\frac{49\pi}{24}\right)$$

2) Utiliser les formules de duplication pour justifier chacune des deux égalités suivantes :

$\rightarrow 16\times\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\times\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)\times\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right) = 1$ $\quad\rightarrow \cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}$

exercice 7

Résoudre les équations suivantes qui sont de la forme $x\in\mathbb{R}$, $P(\cos x) = 0$ ou $P(\sin x) = 0$

$(E_1) : x\in\mathbb{R}, 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$; $(E_2) : x\in\mathbb{R}, 2\sin^2 x + \sin x = 0$; $(E_3) : x\in\mathbb{R}$, $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$

$(E_4) : x\in\mathbb{R}, 4\sin^2 x + 2(1+\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0$ (**en préalable à la résolution de** (E_4) : développer $(1-\sqrt{2})^2$)

exercice 8

les équations à résoudre	les solutions à trouver
$(E_1) : x \in \mathbb{R}\,, -2\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$	pour $(E_1) : x \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{13}{12}\,[2\pi]$
$(E_2) : x \in \mathbb{R}\,, \cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(2x+\frac{\pi}{5})$	pour $(E_2) : x \equiv -\frac{\pi}{30}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{11\pi}{90}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$
$(E_3) : x \in \mathbb{R}\,, \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(3x+\frac{\pi}{4})$	pour $(E_3) : x \equiv \frac{\pi}{8}\,[\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{16}\left[\frac{\pi}{2}\right]$
$(E_4) : x \in \mathbb{R}\,, \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = \cos(x+\frac{3\pi}{5})$	pour $(E_4) : x \equiv -\frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{9\pi}{10}\,[2\pi]$
$(E_5) : x \in \mathbb{R}\,, \sin(x+\frac{3\pi}{4}) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) = 0$	pour $(E_5) : x \equiv -\frac{7\pi}{8}\,[\pi]$
$(E_6) : x \in \mathbb{R}\,, \cos(x+\frac{\pi}{3}) = -\cos(x+\frac{\pi}{6})$	pour $(E_6) : x \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]$
$(E_7) : x \in \mathbb{R}\,, \sin(2x+\frac{\pi}{5}) = -\sin(x+\frac{3\pi}{5})$	pour $(E_7) : x \equiv -\frac{4\pi}{15}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{7\pi}{5}\,[2\pi]$

exercice 9

Montrer , avec les formules d'addition , que chacune des égalités suivantes est vraie pour tous réels x et y

1) $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

2) $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

3) $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$

4) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

5) $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3+\cos 4x}{4}$

6) $\cos x + \cos(x+\frac{2\pi}{3}) + \cos(x+\frac{4\pi}{3}) = 0$

7) $\sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) + \sin(x+\frac{4\pi}{3}) = 0$

8) $\cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

9) $\sin^2 x + \sin^2(x+\frac{\pi}{3}) + \sin^2(x+\frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

10) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1-\cos 4x}{8}$

11) $(\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos^3 x + \sin^3 x$

12) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

13) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

14) $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$

15) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

16) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

17) $\sin(x+y)\cos(x-y) + \sin(x-y)\cos(x+y) = \sin 2x$

exercice 10

1) Justifier pour tous réels x et y :

1-1 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\,[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

1-2 $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\,[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

1-3 $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\,[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

2) En déduire pour tous réels a et b :

2-1 $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

2-2 $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

2-3 $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

exercice 11

En utilisant les formules de trigo à connaître exprimer chacun des nombres suivants soit comme un sinus , soit comme un cosinus , soit comme le carré d'un sinus , soit comme le carré d'un cosinus .

$a = -\cos\frac{7\pi}{15}$	$c = 2\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$	$e = \sin^2\frac{3\pi}{10} - \cos^2\frac{3\pi}{10}$	$g = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{10\pi}{21}\right)$
$b = 2\cos^2\frac{17\pi}{24} - 1$	$d = 1 - \sin^2\frac{2\pi}{9}$	$f = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{2\pi}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{2\pi}{5}$	$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{7\pi}{8} - \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{8}$

exercice 12

1) Calculer $\cos 2x$ lorsque : **1-1** on donne : $\cos x = -\frac{1}{4}$; **1-2** on donne : $\sin x = \frac{3}{5}$

2) Calculer $\sin 2x$ dans chacun des deux cas suivants : $\begin{cases} \textbf{2-1} \text{ on donne : } \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } \pi < x < 2\pi \\ \textbf{2-2} \text{ on donne : } \sin x = \frac{3}{5} \textit{ et } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}\,, \cos 4x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$

exercice 13

1) Reconnaître chacun des réels A et B comme un cosinus puis chacun des réels C et D comme un sinus : $A = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$; $B = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$; $C = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$; $D = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

2) On donne $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$; on demande de reconnaître α

2-1 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **2-2** $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$ puis résoudre : $x \in \mathbb{R}$, $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4) Résoudre : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$

exercice 14 Le réel x est tel que : $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1) Calculer la valeur numérique de $\cos 2x$ et $\sin 2x$

2) Vérifier : $\cos 4x = \sin x$ puis en déduire la valeur de x

exercice 15 **1)** En utilisant les lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ calculer $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{7\pi}{12}$

2) En déduire la résolution de (E_5) : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \sqrt{6}(\sin x + \cos x) = -2\sqrt{2}$

exercice 16 **1)** Démontrer que pour tout réel x : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

2) En déduire les valeurs de $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin^2 \dfrac{\pi}{8}$ puis donner les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin \dfrac{\pi}{8}$

3) En déduire la résolution de (E) : $x \in \mathrm{R}$, $\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x = \sqrt{2}$

exercice 17 α étant un réel quelconque , on lui associe l'équation (E_α) : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2(\cos\alpha)x + \cos 2\alpha = 0$

1) Pour quelles valeurs de α l'équation (E_α) admet-elle le réel 0 comme solution ?

2) Pour quelles valeurs de α l'équation (E_α) admet-elle le réel 1 comme solution ?

3) Justifier que l'équation (E_α) admet pour toute valeur de α deux solutions (éventuellement égales)

exercice 18 Les cinq questions suivantes sont indépendantes et font intervenir quatre égalités ou quatre énoncés qui sont vrais ou faux . Pour chaque question il y a exactement deux égalités vraies ou deux énoncés vrais .
Vous devez donc cocher au plus deux réponses (les deux égalités que vous jugez correctes ou bien les deux énoncés que vous jugez corrects) .

question Q1 α est un réel pour lequel les membres des 4 égalités proposées sont définis . Alors :

☐ $\cos(\dfrac{21\pi}{2} + \alpha) - \sin(5\pi + \alpha) = 0$

☐ $\sin(\alpha - \dfrac{\pi}{2}) + \cos(\alpha - \pi) = 2\cos\alpha$

☐ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{-1}{\cos^2\alpha}$

☐ $1 - \cos 4\alpha = 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

question Q2 x est un réel compris strictement entre π et $\dfrac{3\pi}{2}$ vérifiant : $\cos^2 x = \dfrac{9}{25}$. Alors :

☐ x vérifie $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ et $\sin x = \dfrac{4}{5}$

☐ x vérifie $\sin 2x = \dfrac{24}{25}$ et $\cos 2x = -\dfrac{7}{25}$

☐ x vérifie $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

☐ x vérifie $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$

question Q3 On note S l'ensemble solution de l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $8\sin^3 x + 3\sqrt{3} = 0$. Alors :

☐ $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ sont des solutions de (E)

☐ $x \in S$ entraîne $\pi + x \in S$

☐ $x \in S$ entraîne $\pi - x \in S$

☐ $x \in S$ entraîne $-x \in S$

question Q4 x étant un réel , on donne 4 expressions de la forme $a\cos x + b\sin x$ (a et b réels) . Alors :

☐ $-\cos x + \sin x$ est égal à $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} - x\right)$

☐ $-\cos x - \sqrt{3}\sin x$ est égal à $2\sin\left(x - \dfrac{11\pi}{6}\right)$

☐ $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ est égal à $2\cos\left(\dfrac{11\pi}{6} + x\right)$

☐ $-\cos x - \sin x$ est égal à $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{5\pi}{4}\right)$

question Q5 On examine les éventuelles solutions de 4 équations trigonométriques .

☐ l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\sin x\cos x = -2$ n'admet pas de solution

☐ l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + 2\cos^2 x + 1 = 0$ n'admet pas de solution

☐ l'équation $x \in \mathbb{R}$, $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$ admet au moins une solution

☐ l'équation $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x - \sin^2 x = -2$ admet au moins une solution