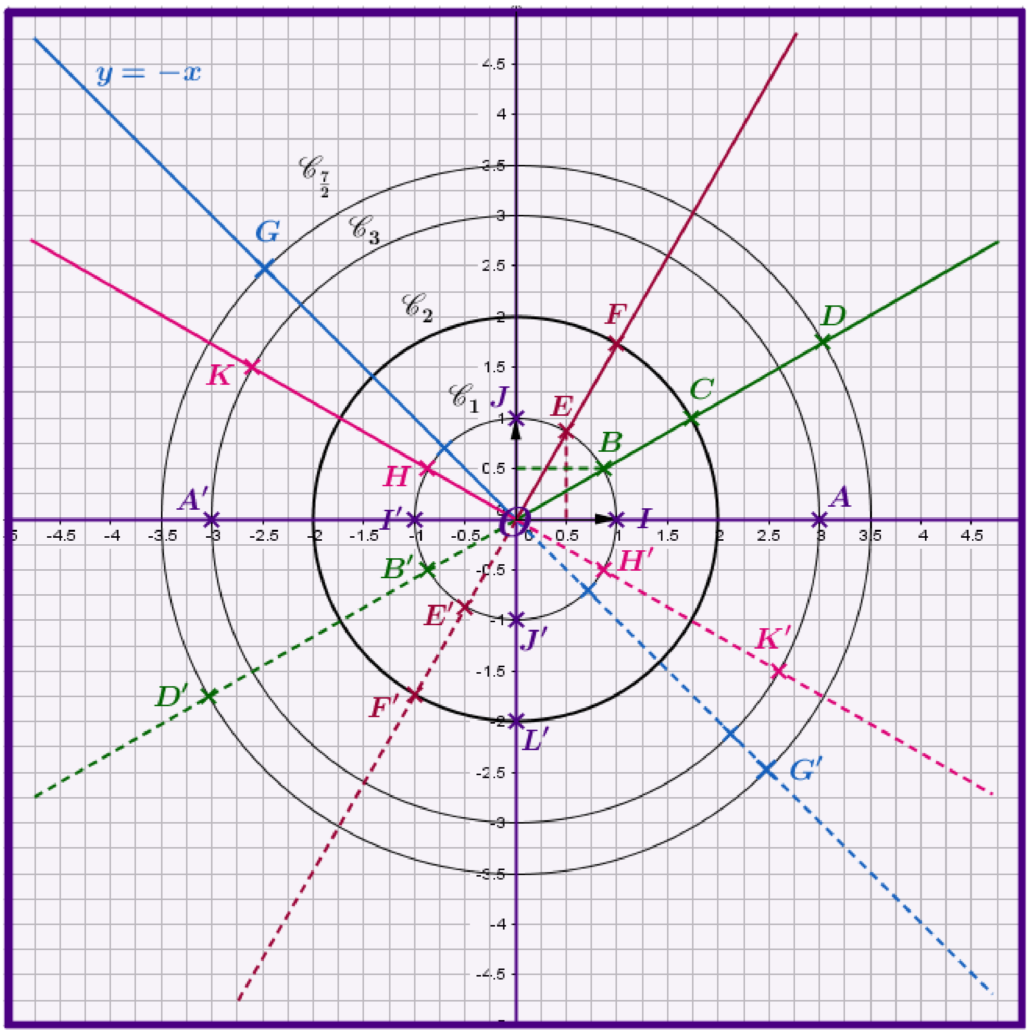
A propos des coordonnées polaires
exemples introductifs

On se place dans un plan orienté muni d'un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ orthonormal direct

Dans ce document , les vecteurs unitaires (de norme 1) de la base du repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\ )$ sont notés : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$

exemple 1 **repérer un point par deux nouvelles données numériques**

figure 1 L'objet de ce premier exemple introductif est de repérer un point M par deux données numériques autres que son abscisse et son ordonnée : les deux données numériques choisies sont sa distance à l'origine O du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$. La figure ci-dessous met en évidence 4 cercles concentriques centrés en O et de rayons respectifs : 1 , 2 , 3 , $\frac{7}{2}$.



1) Avec M non situé sur l'axe des ordonnées , $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ n'est pas un angle droit et sa mesure principale α étant distincte de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$, la droite (OM) possède un coefficient directeur égal à $\tan\alpha$ et une équation réduite du type : $y = x\tan\alpha$.
Compléter la figure en écrivant l'équation réduite pour chacune des droites suivantes : (OA) , (OD) , (OF) , (OG) , (OK) , (OA') , (OD') , (OF') , (OG') , (OK') . Terminer la légende en écrivant l'équation réduite de l'axe (Oy) .

2) On note pour tout point M : $r_M = OM = d(O, M)$ et α_M une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ (α_M non unique !)

2-1 Compléter les quatre tableaux suivants :

point M	un couple (r_M, α_M) ?	M	un couple (r_M, α_M) ?	M	un couple (r_M, α_M) ?	M	un couple (r_M, α_M) ?
I		I'		D		D'	
B		B'		F		F'	
E		E'		G		G'	
J		J'		K		K'	
H		H'		C		L'	

2-2 Donner 4 couples du type (r_D, θ_D) pour le point D :

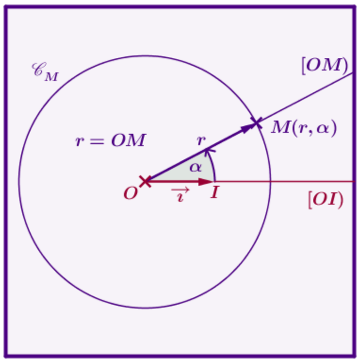
2-3 Que se passe-t-il pour un couple de type (r_M, θ_M) lorsque M est en O ?

vocabulaire : couples de coordonnées polaires

1) M étant un point distinct de l'origine O du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal direct , on appelle couple de coordonnées polaires du point M tout couple (r, α) tel que :

$$r = OM \text{ et } \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv \alpha \, [2\pi]$$

2) on décide : tout couple $(0, \alpha)$ avec α réel quelconque définit un couple de coordonnées polaires pour l'origine O .



remarques pour un point M distinct de O

→ Avec $M(r, \alpha)$ les autres couples de coordonnées polaires sont de la forme :

$M(r, \alpha + 2k\pi)$ k étant élément de $\mathbb{Z}$

→ Contrairement aux deux coordonnées cartésiennes (abscisse et ordonnée) associées aux distances du point M aux axes (Ox) et (Oy) du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les deux coordonnées polaires sont de nature différente :

• la première (r) mesure une distance : celle de M à l'origine O (point "central" appelé pôle) ; intuitivement : cela revient à considérer que le point M tourne autour du pôle O en décrivant un cercle centré en O .

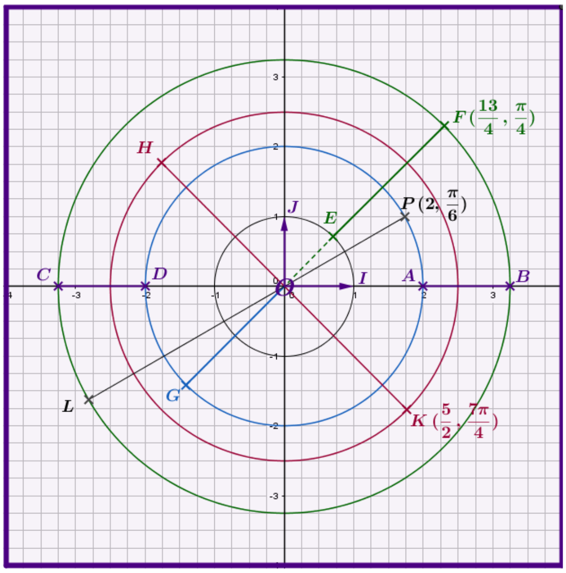
• la deuxième (α) mesure un angle : l'angle polaire $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})}$ formé par la demi-droite (axe polaire) $[OI)$ (I tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{i}$) et la demi-droite $[OM)$.

lettres usuelles pour noter → la distance OM : r (comme rayon) ; ρ (lettre grecque rho)

→ une mesure de l'angle polaire $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})}$: t , α (lettre grecque alpha) ; θ (lettre grecque thêta)

exemple 2 définir un segment , une demi-droite , une droite avec des coordonnées polaires

Les segments , demi-droites , droites de la figure sont des parties de droites ou des droites contenant toutes le "pôle" O . Pour chacun des ensembles suivants (segment , demi-droite , droite) : traduire sur le rayon r et l'angle polaire θ l'appartenance d'un point $M(r, \theta)$ à cet ensemble . La phrase mathématique ainsi obtenue est appelée une équation polaire de l'ensemble étudié .



→ segment $[AB]$: $[AB] = \{M(r, \theta) /$

→ segment $[CD]$: $[CD] = \{M(r, \theta) /$

→ segment $[EF]$: $[EF] = \{M(r, \theta) /$

→ segment $[OG]$: $[OG] = \{M(r, \theta) /$

→ diamètre $[HK]$: $[HK] = \{M(r, \theta) /$

→ segment $[LP]$: $[LP] = \{M(r, \theta) /$

→ demi-droite $[AB)$: $[AB) = \{M(r, \theta) /$

→ demi-droite $[OH)$: $[OH) = \{M(r, \theta) /$

→ demi-droite $[OK)$: $[OK) = \{M(r, \theta) /$

→ demi-droite $[LP)$: $[LP) = \{M(r, \theta) /$

→ droite (HK) : $(HK) = \{M(r, \theta) /$

→ droite (LP) : $(LP) = \{M(r, \theta) /$

→ axe (Ox) : $(Ox) = \{M(r, \theta) /$

→ axe (Oy) : $(Oy) = \{M(r, \theta) /$

exemple 3 définir un cercle , un demi-cercle , un arc de cercle avec des coordonnées polaires

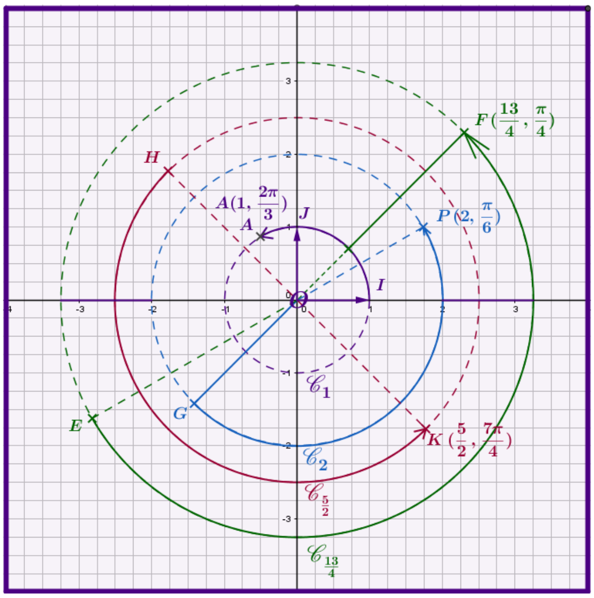
par exemple avec le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 1 on peut écrire plusieurs équations polaires :

$\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta) \,/\, r = 1 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}\ \}$ (la mesure θ est un réel quelconque) ou bien : $\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta) \,/\, r = 1\ \}$ (le plus simple !)

ou bien avec θ appartenant à un intervalle fermé ou semi-ouvert dont l'amplitude 2π correspond à un tour complet de cercle :

$\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta) \,/ r = 1 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]\ \}$ ou : $\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta) \,/ r = 1 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\ \}$ ou : $\mathcal{C}_1 = \{M(r,\theta) \,/ r = 1 \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi]\ \}$

1) En s'inspirant de ce qui précède , proposer deux définitions par une équation polaire pour chacun des ensembles suivants :



cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayon 2 : $\mathcal{C}_2 = \{M(r,\theta) \,/$

$\mathcal{C}_2 = \{M(r,\theta) \,/$

cercle $\mathcal{C}_{\frac{5}{2}}$ de centre O et de rayon $\dfrac{5}{2}$: $\mathcal{C}_{\frac{5}{2}} = \{M(r,\theta) \,/$

$\mathcal{C}_{\frac{5}{2}} = \{M(r,\theta) \,/$

cercle $\mathcal{C}_{\frac{13}{4}}$ de centre O et de rayon $\dfrac{13}{4}$: $\mathcal{C}_{\frac{13}{4}} = \{M(r,\theta) \,/$

$\mathcal{C}_{\frac{13}{4}} = \{M(r,\theta) \,/$

2) Compléter ce qui suit par lecture graphique (sans justifier)

le point M	I	A	G	P
un couple (r_M, α_M)		$A\left(1, \dfrac{2\pi}{3}\right)$		$P\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$

le point M	K	H	E	F
un couple (r_M, α_M)	$K\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right)$			$F\left(\dfrac{13}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

En déduire une définition des arcs orientés suivants avec une équation polaire :

l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$:

l'arc orienté $\overset{\frown}{GP}$:

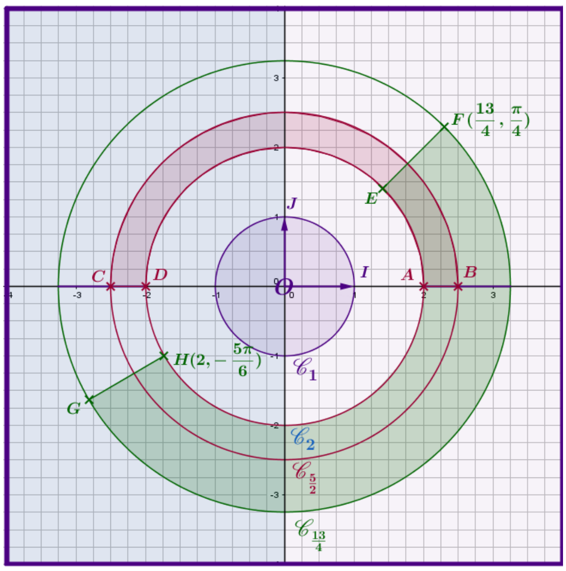
l'arc orienté $\overset{\frown}{HK}$:

l'arc orienté $\overset{\frown}{EF}$:

exemple 4 définir une région du plan avec des coordonnées polaires

Vocabulaire : toute région contenant ses frontières est dite fermée ; toute région ne contenant pas ses frontières est dite ouverte

Définir chacune des régions du plan suivantes avec une équation polaire



le disque fermé de centre O **et de rayon** 1 :

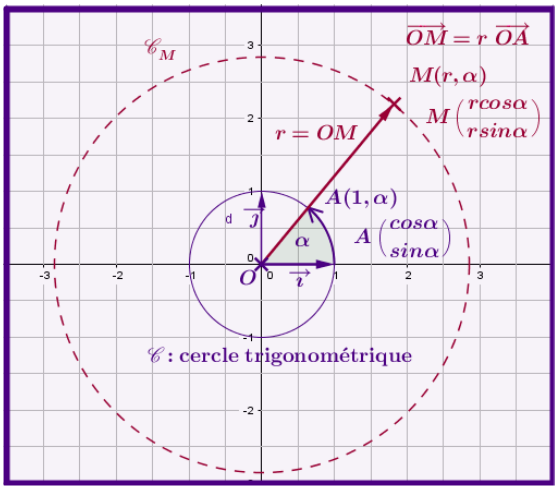
le disque ouvert de centre O **et de rayon** 1 :

la demi-couronne fermée :

le demi-plan fermé situé à gauche de l'axe (Oy) :

la région ouverte de frontières $[HG], [EF], \overset{\frown}{GF}, \overset{\frown}{HE}$:

situation 1 : $\begin{cases}\text{on connaît un couple de coordonnées polaires pour } M \\ \text{on demande de calculer ses coordonnées cartésiennes}\end{cases}$



méthode : avec $M(r, \alpha)$, on calcule les coordonnées cartésiennes de M en utilisant : $x_M = r\cos\alpha$ et $y_M = r\sin\alpha$

un exemple : Avec $A\left(6, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ on obtient :

$x_A = r_A\cos\alpha = 6\cos\dfrac{2\pi}{3} = 6\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = 6\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = 6 \times -\dfrac{1}{2} = -3$

$y_A = r_A\sin\alpha = 6\sin\dfrac{2\pi}{3} = 6\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = 6\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

D'où : $A\begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

exercice : Calculer les coordonnées cartésiennes de $B(\sqrt{2}, -\dfrac{5\pi}{4})$

$x_B =$

$y_B =$

situation 2 : $\begin{cases}\text{on connaît les coordonnées cartésiennes du point } M \\ \text{on demande un couple de coordonnées polaires pour } M\end{cases}$

méthode : on construit un couple de coordonnées polaires pour $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ en suivant la démarche suivante :

d'abord 1) on calcule r avec : $r > 0$ et $r^2 = OM^2 = x_M^2 + y_M^2$

puis 2) • on commence par calculer les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ avec : $\cos\alpha = \dfrac{x_M}{r}$ et $\sin\alpha = \dfrac{y_M}{r}$

• ensuite on détermine une mesure α en utilisant les lignes trigonométriques à connaître (pour $0, \pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \ldots$) et les valeurs numériques trouvées pour $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ pour créer deux égalités du type : $\cos\alpha = \cos\theta$ et $\sin\alpha = \sin\theta$ avec θ associé à une mesure connue . On obtient alors : $\alpha \equiv \theta\,[2\pi]$. Conclusion : $M(r, \theta)$!

un exemple : avec $C\begin{pmatrix} -6 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

1) $r_C^2 = OC^2 = x_C^2 + y_C^2 = (-6)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 36 + 12 = 48 = 3 \times 16 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$; $r_C > 0$ et $r_C^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$ donc : $r_C = 4\sqrt{3}$

2) Avec α mesure de $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OC}\right)$ on a : $x_C = r_C\cos\alpha = 4\sqrt{3}\cos\alpha$ et $y_C = r_C\sin\alpha = 4\sqrt{3}\sin\alpha$. D'où :

$\cos\alpha = \dfrac{x_C}{4\sqrt{3}} = \dfrac{-6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{6}$

$\sin\alpha = \dfrac{yC}{4\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{7\pi}{6}$

Ayant $\cos\alpha = \cos\dfrac{7\pi}{6}$ et $\sin\alpha = \sin\dfrac{7\pi}{6}$ on déduit : $\alpha \equiv \dfrac{7\pi}{6}\,[2\pi]$.

Un couple de coordonnées polaires pour le point C est donc : $C(4\sqrt{3}, \dfrac{7\pi}{6})$

exercice : déterminer un couple de coordonnées polaires pour le point $D\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$