Trigonométrie : des outils à connaître

mesures d'un arc orienté ou d'un angle orienté d'un couple de deux vecteurs

→ notation des mesures : $\boxed{\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \equiv \alpha\,[2\pi]} \Leftrightarrow \boxed{\left(\exists k \in \mathbb{Z}, \overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = \alpha + 2k\pi\right)}$; la phrase mathématique : $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \equiv \alpha\,[2\pi]$ est lue : $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$ est congru à α modulo 2π .

→ La **mesure dite principale** pour l'arc orienté $\overset{\frown}{IA}$ est la mesure α de cet arc qui apartient à l'intervalle $]-\pi, +\pi]$ (trajet < le plus court > pour aller de I en A)

→ traduire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires : · **en termes d'angle** : $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est un angle nul ou un angle plat ; · **en termes de mesures** : $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = k\pi$

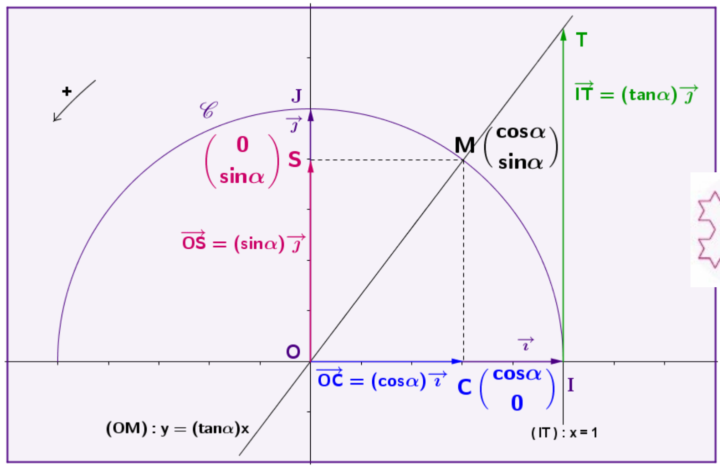
→ traduire $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ orthogonaux : · **en termes d'angle** : $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est un angle droit direct ou indirect ; · **en termes de mesures** : $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, $\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

→ Avec α mesure de $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ on a : $-\alpha$ mesure de $(\widehat{\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}})$. Autrement dit : $\overline{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})} \equiv -\overline{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\,[2\pi]$

trois lignes trigonométriques

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **orthonormal direct** et C cercle trigonométrique de centre O

α réel quelconque , M point de C tel que $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$ soit de mesure α



→ coordonnées de M , de C et S projetés orthogonaux respectifs de M sur (Ox) et (Oy) et de T point de la droite (OM) d'abscisse 1

$M\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}$; $S\begin{pmatrix}0\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}1\\ \tan\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OT}\begin{pmatrix}1\\ \tan\alpha\end{pmatrix}$

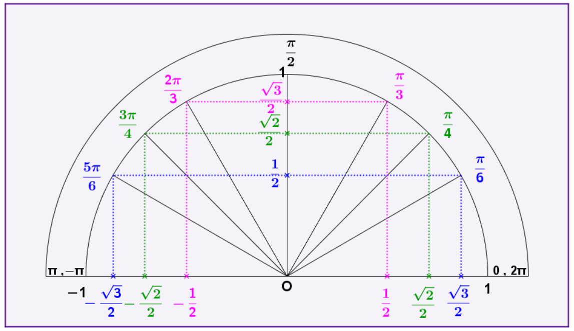
→ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\tan\alpha$ définie pour la mesure d'un angle non droit)

→ le coefficient directeur de la droite (OM) : $\tan\alpha$

→ l'équation réduite de la droite (OM) : $y = (\tan\alpha)x$

les lignes trigo à connaître

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*non définie*	0



des propriétés à connaître

→ Deux mesures quelconques d'un même angle orienté ont les mêmes lignes trigonométriques

Autrement dit : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \text{ , } \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \text{ et } \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha}$

(les fonctions cosinus et sinus sont dites périodiques de période 2π)

→ $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \ (\textit{donc} : \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \ ; \ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha)}$

remarque : cette propriété utilisée par exemple avec la forme $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ permet de déterminer la valeur du sinus d'un réel α donné en connaissant la valeur de son cosinus

→ $\boxed{|\cos\alpha| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \cos\alpha \le 1 \text{ et } |\sin\alpha| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin\alpha \le 1}$

Ainsi : l'égalité $\cos x = -2$ est fausse pour tout x car : $(\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le \cos x \le 1)$ et $(-2 < -1)$

→ $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = k\pi$ (α est une mesure d'un angle nul ou d'un angle plat)

→ $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (α est une mesure d'un angle droit direct ou indirect)

lignes trigonométriques associées aux lignes d'un réel α

vocabulaire : un point M est appelé point image du réel β sur le cercle trigonométrique de centre O lorsque :
M est un point de **C** tel que β soit une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$ ou de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

<u>point K'</u> : point image de $\frac{\pi}{2}+\alpha$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

ex : $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12}$

<u>point K</u> : point image de $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

ex : $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$: $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

<u>sommet M_2</u> : point image de $\pi-\alpha$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

<u>utile pour les mesures du 2ème quadrant :</u>

ex : $\frac{2\pi}{3} = \pi-\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} = \pi-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} = \pi-\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi-\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

<u>sommet M_3</u> : point image de $\pi+\alpha$

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$

<u>utile pour les mesures du 3ème quadrant :</u>

ex : $\frac{7\pi}{6} = \pi+\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4} = \pi+\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{3} = \pi+\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin(\pi+\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

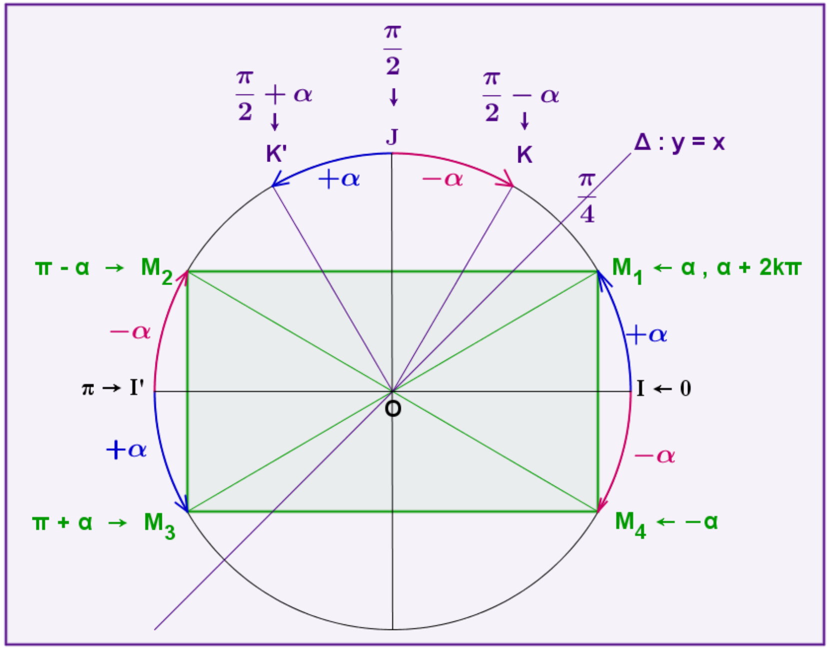


figure : → <u>le rectangle $M_1M_2M_3M_4$</u> associé à la mesure α

→ <u>les points K et K'</u> associés aux mesures $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et $\frac{\pi}{2}+\alpha$

<u>sommet M_1</u> : point image de α et $\alpha+2k\pi$

$$\cos(\alpha+2k\pi) = \cos\alpha$$
$$sin(\alpha+2k\pi) = \sin\alpha$$
$$\tan(\alpha+2k\pi) = \tan\alpha$$

<u>utile pour simplifier</u> les lignes des mesures associées à **<u>plus d'un tour de cercle</u>**

ex : $\sin\frac{33\pi}{4} = \sin(\underbrace{8\pi}_{2k\pi, k=4} + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>sommet M_4</u> : point image de $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

<u>utile pour les mesures négatives et</u> <u>les</u> **<u>mesures du 4ème quadrant</u>** : $-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{3}$

ex : $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$